ont lieu pour tous les nombres réels x sauf les x formant un ensembles de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Par conséquent:

Il existe une fonction non mesurable d'une variable réelle $f(x)$, telle que, quelle que soit la suite infinie $h_1, h_2, h_3, \ldots,$ de nombres réels non nuls tendant vers 0, l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = 0$$

a lieu pour tous les nombres réels x, sauf les x formant un ensemble de puissance inférieure à celle du continu.

Sul confronto di alcune definizioni di integrale definito [1]).

Di

Giovanni Dantoni (Pisa).

E' noto che la definizione di integrale definito di Mengoli-Cauchy, per una funzione $f(x)$ data in (a, b) consiste nel considerare la somma:

$$\sum_{r=0}^{m-1} (x_{r+1} - x_r) f\{x_r + \vartheta_r (x_{r+1} - x_r)\}, \tag{1}$$

corrispondente ad una divisione qualsiasi di (a, b) in parti mediante i punti: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ e ad una scelta del tutto arbitraria di ϑ_r, purché soddisfacente alle limitazioni $0 \leqslant \vartheta_r \leqslant 1$, e nel chiamare integrale definito della $f(x)$, in (a, b), il limite determinato e finito di tale somma al tendere allo zero di tutte le differenze $x_{r+1} - x_r$, ammesso, ben s'intende, che tale limite esista. Consideriamo una qualsiasi funzione $\vartheta(u, v)$ soddisfacente sempre alla doppia limitazione $0 \leqslant \vartheta(u, v) \leqslant 1$ e definita per ogni coppia u, v tale che $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$, e construiamo con tale funzione la somma:

$$\sum_{r=0}^{m-1} (x_{r+1} - x_r) f\{x_r + \vartheta(x_r, x_{r+1}) [x_{r+1} - x_r]\} \tag{2}$$

in corrispondenza ad ogni suddivisione di (a, b) in parti mediante i punti $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$.

Supponendo che la funzione $f(x)$ sia limitata e che al tendere comunque a zero di tutte le differenze $x_{r+1} - x_r$ la somma (2) tenda

[1]) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

ad un limite determinato e finito, chiameremo tale limite integrale definito della $f(x)$ in (a, b) secondo la funzione $\vartheta(u, v)$, e lo indicheremo con I_ϑ.

Supposto che l'integrale di Mengoli-Cauchy, che indicheremo con I_c, esista, vale a dire supposto che la $f(x)$ soddisfi alla condizione di integrabilità di Riemann, anche I_ϑ esiste ed è $I_\vartheta = I_c$. Noi qui vogliamo esaminare la questione inversa, e cioè quella di vedere se esistendo I_ϑ esiste anche I_c; in altre parole vogliamo vedere, se, nel campo delle funzioni $f(x)$ limitate, le due definizioni di integrale I_c e I_ϑ sono o no equivalenti.

E' facile vedere che tale equivalenza non sempre sussiste; e data una funzione $f(x)$, limitata, noi determineremo la condizione necessaria e sufficente a cui deve soddisfare la funzione $\vartheta(u, v)$ affinché dall' essistenza di I_ϑ si possa dedurre quella di I_c.

In particolare, *proveremo l'equivalenza delle due definizioni se la* $\vartheta(u, v)$ *è una funzione continua.*

I. Supponiamo, in primo luogo, che la $\vartheta(u, v)$ sia continua per ogni coppia u, v tale che $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$, e mostramo che, se per una data funzione limitata $f(x)$, non esiste il limite delle somme (1), non esiste neppure quello delle (2). Dimostriamo cioè che, in questo caso, preso $\delta > 0$ qualunque, esistono sempre due somme (2), S' ed S'', relative a divisioni in intervalli δ'_i e δ''_j, tutti minori di 2δ, le quali abbiano una differenza in valore assoluto maggiore di un numero positivo fisso, indipendente da δ.

Poiché, per ipotesi, non esiste il limite delle somme (1), dalla condizione di integrabilità data da du Bois-Reymond, segue che esiste almeno un $\sigma > 0$ tale che i punti $\bar{x}$ in cui l'oscillazione della $f(x)$ è $\geqslant \sigma$ formano un gruppo non rinchiudibile in un numero finito di intervalli di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola. Considerato uno di questi σ, si può quindi fissare un $\lambda > 0$ in modo che, rinchiudendo comunque i punti $\bar{x}$ in un numero finito di intervalli δ_s risulterà sempre:

$$\sum \delta_s \geqslant \lambda. \tag{3}$$

Chiamiamo punto *corrispondente all'intervallo* (α, β) di (a, b) il punto:

$$x = \alpha + \vartheta(\alpha, \beta)\,[\beta - \alpha] \tag{4}$$

e intervalli *corrispondenti al punto* x tutti quelli (α, β) appartenenti ad (a, b) e che sodisfano alla (4).

Preso δ tale che $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, ad ogni punto di $(a + \delta, b - \delta)$ vi *corrisponde* almeno un intervallo (α, β) di ampiezza δ. Infatti, consideriamo l'intervallo $(a, a + \delta)$ e facciamolo scorrere su (a, b) fino a sovrapporsi a $(b - \delta, b)$. Il punto x corrispondente descriverà in modo continuo almeno tutto $(a + \delta, b - \delta)$, perché deve appartenere sempre all'intervallo mobile considerato, e perché ϑ è funzione continua. Segue che, ad ogni x di $(a + \delta, b - \delta)$ ed in particolare ad ogni $\bar{x}$ dell'intervallo indicato, corrisponderà almeno un intervallo $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ tale che:

$$\bar{x} = \bar{\alpha} + \vartheta(\bar{\alpha}, \bar{\beta})\,[\bar{\beta} - \bar{\alpha}], \quad \bar{\beta} - \bar{\alpha} = \delta. \tag{5}$$

Consideriamo tutti gli intervalli costruiti nel modo suddetto, contenuti in $(a + \delta, b - \delta)$ e relativi a punti $\bar{x}$, e chiamiamo I, il loro insieme. Poiché, l'insieme degli $\bar{x}$ è chiuso, la funzione ϑ è continua e gli intervalli sono di lunghezza constante δ, al tendere di un intervallo di I ad un altro intervallo qualunque, il punto $\bar{x}$ corrispondente tenderà ad un punto x anch'esso del tipo $\bar{x}$, e l'intervallo limite sarà ancora dell'insieme I, il quale quindi è chiuso.

Preso prima $\delta < \frac{\lambda}{8}$ e poi $\varepsilon < \frac{\delta\lambda}{4(b-a)}$, chiamiamo δ_0 l'intervallo $(a, a + \delta)$, $\delta_1 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ il più a sinistra degli intervalli del l'insieme I che ha in comune con $(a, a + \delta + \varepsilon)$ al massimo un estremo, δ_2 il più a sinistra degli stessi intervalli che ha in comune con $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + \varepsilon)$ al massimo un estremo e che cade a destra di $x_2^{(0)} + \varepsilon$, e così via.

Questi intervalli saranno in numero finito, n. Detto δ_n l'intervallo $(b - \delta, b)$, si ha:

$$2 \sum_{r=0}^{n} \delta_r + n\varepsilon > \lambda,$$

perché i punti $\bar{x}$ che cadono tra due δ_r consecutivi sono compresi in un intervallino di ampiezza al massimo $\delta + \varepsilon$; per le limitazioni imposte a δ ed ε, si ha pure $n\varepsilon < \frac{\lambda}{4}\frac{n\delta}{b-a}$, ossia, essendo $n\delta <$

$< b-a$, $n\varepsilon < \frac{\lambda}{4}$. Segue:

$$\sum_{r=1}^{n-1} \delta_r > \frac{\lambda}{8}. \tag{6}$$

Abbiamo così costruito un sistema di intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, non aventi a due a due alcun punto in comune, tali che il punto x corrispondente a ciascuno di essi, secondo la corrispondenza fissata dalla (4), sia un punto $\overline{x}$, e tali inoltre che valga la (6).

Deduciamo da ciò due divisioni di (a, b) in parti tutte minori di 2δ e tali che le somme (2) corrispondenti differiscano per più di un numero fisso, indipendente da δ.

Per ogni $r = 1, 2, \dots, n-1$, chiamiamo $\overline{x}_r$ il punto corrispondente all'intervallo δ_r, e $x_{2r-1}^{(0)}$, $x_{2r}^{(0)}$ gli estremi di questo δ_r. Consideriamo due punti x_1', x_1'' dell'intorno di $\overline{x}_1$, tali che:

$$f(x_1') - f(x_1'') > \frac{\sigma}{2}. \tag{7}$$

Per x_1', x_1'' sufficentemente vicini $\overline{x}_1$ esisteranno almeno due intervalli corrispondenti $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ e $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, tali che, preso $\varepsilon_1 > 0$ qualunque purché $< \frac{\varepsilon}{8}$, tutti i moduli

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}|, \quad |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}|, \quad |x_1^{(2)} - x_1^{(0)}|, \quad |x_2^{(2)} - x_2^{(0)}| \tag{8}$$

siano $< \varepsilon_1$. Ripetiamo per gli altri δ_r la stessa operazione.

Si ottengono così gli intervalli:

$$\begin{gathered}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \quad (x_3^{(1)}, x_4^{(1)}), \dots, \quad (x_{2n-3}^{(1)}, x_{2(n-1)}^{(1)}), \\ (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), \quad (x_3^{(2)}, x_4^{(2)}), \dots, \quad (x_{2n-3}^{(2)}, x_{2(n-1)}^{(2)}),\end{gathered}$$

che risultano tutti minori di $\delta + 2\varepsilon_1 < \delta + \frac{\varepsilon}{4} < \delta + \frac{\delta}{16} < 2\delta$, e si ha:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (x_{2r}^{(1)} - x_{2r-1}^{(1)}) + 2(n-1)\varepsilon_1 > \frac{\lambda}{8}.$$

Per essere $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{8}$, $n\varepsilon < \frac{\lambda}{4}$, risulta $\varepsilon_1 < \frac{\lambda}{32n}$ e si ha:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (x_{2r}^{(1)} - x_{2r-1}^{(1)}) > \frac{\lambda}{16},$$

ed analogamente:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (x_{2r}^{(2)} - x_{2r-1}^{(2)}) > \frac{\lambda}{16}. \tag{9}$$

Consideriamo, per la prima divisione, gli intervalli:

$$\begin{gathered}(x_1^{(0)} - \varepsilon_1, x_1^{(1)}), (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(0)} + \varepsilon_1), \dots, (x_{2n-3}^{(0)} - \varepsilon_1, x_{2n-3}^{(1)}), \\ (x_{2n-3}^{(1)}, x_{2(n-1)}^{(1)}), (x_{2(n-1)}^{(1)}, x_{2(n-1)}^{(0)} + \varepsilon_1),\end{gathered}$$

e, per la seconda, gli intervalli corrispondenti:

$$\begin{gathered}(x_1^{(0)} - \varepsilon_1, x_1^{(2)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), (x_2^{(2)}, x_2^{(0)} + \varepsilon_1), \dots, (x_{2n-3}^{(0)} - \varepsilon_1, x_{2n-3}^{(2)}), \\ (x_{2n-3}^{(2)}, x_{2(n-1)}^{(2)}), (x_{2(n-1)}^{(2)}, x_{2(n-1)}^{(0)} + \varepsilon_1).\end{gathered}$$

Gli intervalli di (a, b) che restano, quando sopprimiamo quelli considerati, li dividiamo, se è necessario, in parti minori di δ, ma identiche per entrambe le divisioni. Chiamiamoli $\overline{\delta}_j$ e consideriamo la somma (2), S', relativa alla prima divisione.

Indichiamo con Σ_1 la parte corrispondente agli intervalli $(x_{2r-1}^{(1)}, x_{2r}^{(1)})$, con Σ_1' quella relativa agli intervalli $\overline{\delta}_j$ e con Σ_1'' quella corrispondente ai rimanenti (che sono tutti minori di $2\varepsilon_1$).

Quindi:

$$S' = \sum_{r=1}^{n-1}{}_1 (x_{2r}^{(1)} - x_{2r-1}^{(1)}) f(x_r') + \sum\nolimits_1' + \sum\nolimits_1''.$$

Analogamente de

$$S'' = \sum_{r=1}^{n-1}{}_2 (x_{2r}^{(2)} - x_{2r-1}^{(2)}) f(x_r'') + \sum\nolimits_2' + \sum\nolimits_2''$$

dove Σ_2' e Σ_2'' indicano, rispetto ad S'', quello che Σ_1' e Σ_1' indicavano rispetto ad S'.

Poiché $\Sigma_1' = \Sigma_2'$, si ha:

$$S' - S'' = \sum \{(x_{2r}^{(1)} - x_{2r-1}^{(1)}) f(x_r') - (x_{2r}^{(2)} - x_{2r-1}^{(2)}) f(x_r'')\} + \sum\nolimits_1'' - \sum\nolimits_2''$$

da cui:

$$S' - S'' \geqslant -4n\,\varepsilon_1 M + \sum \{(x_{2r}^{(1)} - x_{2r-1}^{(1)})\, f(x'_r) - (x_{2r}^{(2)} - x_{2r-1}^{(2)})\, f(x''_r)\}$$

dove M è il massimo modulo della $f(x)$ in (a, b).

E per le (7), (8) e (9):

$$S' - S'' \geqslant -4n\,\varepsilon_1 M + \sum [\{(x_{2r}^{(2)} - x_{2r-1}^{(2)}) + (x_{2r}^{(1)} - x_{2r}^{(2)}) -$$

$$-(x_{2r-1}^{(1)} - x_{2r-1}^{(2)})\}\, f(x'_r) - (x_{2r}^{(2)} - x_{2r-1}^{(2)})\, f(x''_r)] > -8n\,\varepsilon_1 M + \frac{\sigma\lambda}{32}.$$

Supponendo $\varepsilon_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma\lambda}{32} \cdot \frac{1}{8nM}$, si ha infine: $S' - S'' > \frac{\sigma\lambda}{64}$.

Abbiamo così dimostrato che, *se la funzione $\vartheta(u, v)$ è continua, dall'esistenza di I_ϑ segue quella di I_c*, e, naturalmente, l'eguaglianza $I_\vartheta = I_c$.

2. Consideriamo ora la funzione $\vartheta(u, v)$, per $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$, e qualsiasi, purché tale che $0 \leqslant \vartheta(u, v) \leqslant 1$.

Riportiamo su due assi ortogonali i valori di u e di v.

La funzione ϑ sarà definita nel triangolo MNP, con $M \equiv (a, a)$, $N \equiv (b, b)$, $P \equiv (a, b)$. Supponiamo che la $\vartheta(u, v)$ sia discontinua nei punti di un certo insieme K del triangolo MNP. Consideriamo il derivato di K, K', e l'insieme T somma di K, e di K', ed indichiamo con T_{MN} l'insieme dei punti di T che appartengono ad MN.

a) Sia $T_{MN} = 0$. Allora esiste una striscia di MNP, $M'MNN'$ (con $M'N'$ parallela ad MN), tale che non contenga nell'interno alcun punto di discontinuità di $\vartheta(u, v)$. Se si prende 2δ minore dell'altezza della striscia, essendo la funzione ϑ continua nel detto compo $M'MNN'$, si può ripetere il ragionamento del n° 1.

b) Sia $T_{MN} \neq 0$. Indichiamo con $\overline{T}_{MN}$ l'insieme dei punti che si ottengono proiettando quelli di T_{MN} sull'intervallo (a, b) del l'asse u. Considerata una funzione limitata $f(x)$, chiamiamo H_σ l'insieme dei punti $\bar{x}$ di (a, b) in cui la $f(x)$ ha oscillazione maggiore od uguale σ.

Sia per qualunque $\sigma > 0$: $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN} = 0$. Supposto che I_c non esista, sia σ tale che H_σ risulti *non integrabile*, vale a dire, non rinchiudibile in un numero finito di intervalli di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola.

L'insieme T_{MN} essendo chiuso, tale è anche $\overline{T}_{MN}$; e chiuso è pure H_σ.

Ricopriamo quest'ultimo nel seguente modo. Preso un $\bar{x}$ qualunque, consideriamo l'intervallo (x'_0, x''_0) di ampiezza massima che lo contiene e che non ha nell'interno alcun punto di $\overline{T}_{MN}$.

Sia $\bar{x}'$ il più a sinistra dei punti di H_σ contenuti in (x'_0, x''_0) e $\bar{x}''$ il piú a destra dei punti di H_σ pure contenuti in (x'_0, x''_0).

Facciamo corrispondere ad $\bar{x}$ l'intervallo $\left(\frac{x'_0 + \bar{x}'}{2}, \frac{x''_0 + \bar{x}''}{2}\right)$.

L'insieme H_σ è così ricoperto da un sistema S di intervalli tali che, preso un qualunque $\bar{x}$, vi è un intervallo di S che la contiene nell'interno. Inoltre i punti di $\overline{T}_{MN}$ sono tutti esterni agli intervalli di S.

Allora, per il teorema di Pincherle-Borel, si può scegliere un numero finito di intervalli di S in modo da ricoprire interamente H_σ, e con essi si possono formare degli intervalli *distinti*, ed in numero finito,

$$(10) \qquad (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \quad (\tilde{x}_3, \tilde{x}_4), \ldots, \quad (\tilde{x}_{2m-1}, \tilde{x}_{2m})$$

ricoprenti H_σ e non contenenti alcun punto di $\overline{T}_{MN}$.

Avendo supposto che H_σ non sia integrabile, esisterà un $\lambda > 0$ tale che ogni gruppo di intervalli in numero finito ricoprente interamente H_σ abbia lunghezza complessiva maggiore di λ. Sopprimiamo quelli fra gli intervalli (10) (se ce ne sono) che contengono di H_σ soltanto una parte integrabile: resteranno così degli intervalli:

$$(11) \qquad (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad (\bar{x}_3, \bar{x}_4), \ldots, \quad (\bar{x}_{2m'-1}, \bar{x}_{2m'})$$

ed esisteranno m' numeri positivi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m'}$, tali che:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{m'} = \lambda$$

e che, ricoprendo comunque la parte di H_σ contenuta in $(\bar{x}_{2r-1}, \bar{x}_{2r})$ con un numero finito di intervalli, la somma complessiva di tali intervalli risulti $\geqslant \lambda_r$.

Allora, preso comunque un numero $\delta > 0$, minore della metà dell'ampiezza del più piccolo degli intervalli (11) e minore pure dell'ottava parte del più piccolo dei numeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m'}$, potremo costruire come al n°. 1., e per n°. 2 a), un sistema di intervalli di ampiezza δ, in numero finito (n°. 1), non aventi a due a due alcun punto in comune, tutti interni agli intervalli (11), tali che il punto x corrispondente a ciascuno di essi, secondo la (4), sia un punto $\bar{x}$, e tali inoltre che la loro somma sia maggiore di $\frac{\lambda}{8}$.

Da questi intervalli possiamo dedurre, come al n°. 1. due somme (2), S' ed S'', relative a divisioni in parti tutte minori di 2δ e tali che:

$$S' - S'' > \mu,$$

con $\mu > 0$ indipendente da δ.

Segue quindi che, nella ipotesi $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN} = 0$, se non esiste I_c non esiste neppure I_ϑ.

c) Supponiamo infine che, per qualunque σ, $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$ sia un gruppo *integrabile.*

Supposto che non esista I_c, sia σ tale che H_σ risulti non integrabile. Allora esiste un $\lambda > 0$ tale che ogni gruppo di intervalli in numero finito rinchiudente H_σ abbia lunghezza maggiore di λ; ed esiste pure un sistema di intervalli Δ_s (in numero finito) che contengono nell'interno tutti i punti di $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$ e tali che:

$$\sum \Delta_s < \frac{\lambda}{2}.$$

Se sopprimiamo da (a, b) tutti i punti interni agli intervalli Δ_s, i punti di H_σ e di $\overline{T}_{MN}$ che rimangono constituiscono ancora due imsiemi chiusi non aventi alcun punto in comune ed i punti di H_σ rimanenti (H'_σ) sono tali che ogni gruppo di intervalli in numero finito che li rinchiude ha lunghezza maggiore di $\frac{\lambda}{2}$.

Ragionando sull'insieme H'_σ di questi punti, come si è fatto su H_σ in b), si ha ancora che, non esistendo I_c, non esiste neppure I_ϑ.

Dunque, se l'insieme $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$ è un gruppo integrabile, dall'esistenza di I_ϑ segue quella di I_c.

Reciprocamente, se dall'esistenza di I_ϑ segue quella di I_c, si ha che H_σ è un gruppo integrabile, qualunque sia σ, e quindi che è anche tale $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$. Segue:

Considerata una funzione limitata $f(x)$, condizione necessaria e sufficiente perché dall'esistenza di uno dei due limiti I_c, I_ϑ segua quella dell'altro, è che $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$ sia un gruppo integrabile, per qualsiasi σ.

Possiamo mettere questo risultato sotto un'altra forma.

Sia D l'insieme dei punti di discontinuità di $f(x)$ in (a, b).

Supponiamo che l'insieme $D \cdot \overline{T}_{MN}$ sia di misura nulla: $m(D \cdot \overline{T}_{MN}) = 0$.

Poiché, per ogni σ, $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$ è contenuto in esso ed è chiuso, $H_\sigma \cdot \overline{T}_{MN}$ è un gruppo integrabile. Segue che, in questa ipotesi, se esiste I_ϑ esiste I_c.

Viceversa, se dall'esistenza di I_ϑ segue quella di I_c, si ha $m(D) = 0$ e quindi $m(D \cdot \overline{T}_{MN}) = 0$. Concludiamo che:

Considerata una funzione limitata $f(x)$, condizione necessaria e sufficiente affinché dall'esistenza di uno dei due limiti I_c, I_ϑ segua quella dell'altro è che sia:

$$m(D \cdot T_{MN}) = 0.$$