Sur les translations des ensembles linéaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, M. Banach a démontré récemment qu'il existe sur la circonférence un ensemble non mesurable qui est transformé par chaque rotation en lui même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points [1]).

Dans le même ordre d'idées je démontrerai dans cette Note deux théorèmes: un en admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, et l'autre sans admettre cette hypothèse.

1. Théorème I. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire non dénombrable N de mesure nulle (resp. de 1^{re} catégorie) qui est transformé par chaque translation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.*

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et soit

$$x_1 = 0,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1}, \ldots,\ x_\xi, \ldots \quad (\xi < \Omega) \tag{1}$$

une suite transfinie du type Ω formée de tous les nombres réels.

Soit H un ensemble linéaire de première catégorie (resp. de mesure nulle) ne contenant pas le nombre 0, dont le complémentaire est de mesure nulle (resp. de première catégorie). Nous désignerons par $H(a)$ la translation de l'ensemble H de longueur a (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres $x + a$, où $x \in H$).

[1]) *Fund. Math.* t. XIX, p. 15. La connaissance du travail de M. Banach n'est pas nécessaire pour comprendre la présente Note.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal > 1 et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini les nombres p_ξ, où $\xi < \alpha$. Désignons par H_α le somme de tous les ensembles

$$H(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \ldots - x_{\xi_n}),$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $< \alpha$. D'après $\alpha < \Omega$ l'ensemble de telles suites est évidemment au plus dénombrable.

Les ensembles $H(a)$ étant, pour a réels, de première catégorie (resp. de mesure nulle), il en résulte que H_α, en tant qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensemble de 1^{re} catégorie (resp. de mesure nulle) est un ensemble de 1^{re} catégorie (resp. de mesure nulle).

Désignons par P_α l'ensemble de tous les points p_ξ, où $\xi < \alpha$: d'après $\alpha < \Omega$, l'ensemble P_α est au plus dénombrable. L'ensemble $S_\alpha = H_\alpha + P_\alpha$ est donc de 1^{re} catégorie (resp. de mesure nulle) et il existe des nombres réels qui n'appartiennent pas à S_α: nous désignerons par p_α le premier terme de la suite (1) qui n'appartient pas à S_α.

La suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie et il est évident que tous leur termes sont distincts.

Désignons maintenant par N l'ensemble formé du nombre p_1 et de tous les nombres de la forme

$$p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n}, \tag{2}$$

où α est un nombre ordinal quelconque > 1 et $< \Omega$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $< \alpha$.

Je dis que l'ensemble N satisfait aux conditions de notre théorème.

D'après $x_1 = 0$, l'ensemble N contient évidemment tous les points p_α, où $\alpha < \Omega$, et parsuite est non dénombrable. Je dis que

$$NH = 0. \tag{3}$$

En effet, soit p un point de l'ensemble NH.

Il ne peut être ici $p=p_1$, puisque $p_1=0$ non $\epsilon\, H$. De $p\,\epsilon\, N$ résulte donc que p est de la forme (2), où α est un nombre ordinal >1 et $<\Omega$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $<\Omega$.

D'après $p\,\epsilon\, H$, p étant de la forme (2), on trouve tout de suite

$$p_\alpha \,\epsilon\, H(-x_{\xi_1}-x_{\xi_2}-\ldots-x_{\xi_n}),$$

donc, d'après la définition de l'ensemble H_α:

$$p_\alpha \,\epsilon\, H_\alpha \subset S_\alpha,$$

contrairement à la définition du nombre p_α. La formule (3) est ainsi établie.

D'après (3) on a $N\subset CH$, ce qui prouve que l'ensemble N est de mesure nulle (resp. de 1^re^ catégorie).

Soit maintenant a un nombre réel donné quelconque. C'est donc un terme de la suite (1), soit $a=x_\lambda$, où λ est un nombre ordinal $<\Omega$. Soit p un point quelconque de l'ensemble $N(a)-N$. D'après $p\,\epsilon\, N(a)$ et d'après la définition de l'ensemble N, on a

$$(4) \qquad p=p_\alpha+x_{\xi_1}+x_{\xi_2}+\ldots+x_{\xi_n}+x_\lambda,$$

où α est un nombre ordinal $<\Omega$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $<\alpha$. S'il était $\lambda<\alpha$, le poit p appartiendrait évidemment à l'ensemble N (d'après la définition de N). D'après $p\,\epsilon\, N(a)-N$ on a donc $\alpha\leqslant\lambda$.

Donc, si $p\,\epsilon\, N(a)-N$, p est de la forme (4), où α est un nombre ordinal $\leqslant\lambda$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $<\alpha$. L'ensemble de tous tels nombres (4) est (pour tout $\lambda<\Omega$ donné) évidemment au plus dénombrable.

Notre théorème I est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on peut démontrer que si N est un ensemble linéaire mesurable qui est transformé par chaque translation en lui même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance $<2^{\aleph_0}$, alors ou bien N ou bien le complémentaire de N est de mesure nulle. (Cela résulte sans peine de la propriété d'un ensemble de mesure positive de contenir des points de densité).

2. Théorème II. *Il existe un ensemble linéaire non mesurable, N, de puissance du continu qui est transformé par chaque translation en lui même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.*

Démonstration. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et soit

$$(5) \qquad x_1=0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1},\ldots,\ x_\xi,\ldots \quad (\xi<\Omega)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels.

La famille de tous les ensembles linéaires parfaits étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ,

$$(6) \qquad P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots,\ P_\omega,\ P_{\omega+1},\ldots,\ P_\xi,\ldots \quad (\xi<\varphi)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie deux suites du type φ, $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$, comme il suit.

Soit p_1 le premier terme de la suite (5) qui appartient à P_1 et soit q_1 le premier terme de la suite (5) qui appartient à P_1 et tel que $q_1\neq p_1$.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné >1 et $<\varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tout les nombres p_ξ et q_ξ, où $\xi<\alpha$.

Désignons par S_α l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$q_\xi-x_{\xi_1}-x_{\xi_2}-\ldots-x_{\xi_n},$$

où $\xi, \xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. L'ensemble S_α est évidemment de puissance $\leqslant\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^3+\ldots$, donc, d'après $\alpha<\varphi$ (ce qui donne $\bar{\alpha}<2^{\aleph_0}$), de puissance $<2^{\aleph_0}$. L'ensemble P_α, en tant que parfait, étant de puissance du continu, l'ensemble $P_\alpha-S_\alpha$ est donc non vide. Nous définirons p_α comme le premier terme de la suite (5) qui appartient à $P_\alpha-S_\alpha$.

Or, désignons par T_α l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$p_\xi+x_{\xi_1}+x_{\xi_2}+\ldots+x_{\xi_n},$$

où $\xi\leqslant\alpha$ et où $\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. D'après $\alpha<\varphi$ on voit sans peine que $\overline{\overline{T}}<2^{\aleph_0}$, d'où résulte que $P_\alpha-T_\alpha\neq0$. Nous définirons q_α comme le premier terme de la suite (5) qui appartient à $P_\alpha-T_\alpha$.

Les suites transfinies $\{p_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ et $\{q_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Désignons maintenant par N l'ensemble de tous les nombres

$$p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n},$$

où α est un nombre ordinal $<\varphi$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$.

Désignons par Q l'ensemble de tous les points q_α, où $\alpha<\varphi$. Je dis que

$$NQ = 0. \tag{7}$$

En effet, admettons que $p \in NQ$. De $p \in N$ et de la définition de l'ensemble N résulte qu'il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$ et une suite finie de nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tous $<\alpha$, tels que

$$p = p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n}. \tag{8}$$

Or, de $p \in Q$ et de la définition de l'ensemble Q résulte qu'il existe un nombre ordinal $\alpha<\varphi$, tel que

$$p = q_\beta. \tag{9}$$

De la définition du nombre q_β résulte que q_β non $\in T_\beta$. Or, si $\alpha \leqslant \beta$, on a, d'après la définition de l'ensemble T_β et d'après (8): $p \in T_\beta$. Donc, si $\alpha \leqslant \beta$, on a $p \neq q_\beta$, contrairement à (9).

Or, d'après la définition de p_α, on a p_α non $\in S_\alpha$, et, si $\alpha > \beta$, on a, d'après la définition de l'ensemble S_α: $q_\beta - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \ldots - x_{\xi_n} \in S_\alpha$. Donc, si $\alpha > \beta$, on a $p_\alpha \neq q_\beta - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \ldots - x_{\xi_n}$, contrairement à (8) et (9).

L'hypothèse que $p \in NQ$ implique donc toutjours une contradiction. On a donc la formule (7).

De la définition de l'ensemble N résulte que $p_\alpha \in N$ pour $\alpha<\varphi$. D'après $p_\alpha \in P_\alpha$ et $q_\alpha \in P_\alpha$ pour $\alpha<\varphi$, on a donc $P_\alpha N \neq 0$ et $P_\alpha Q \neq 0$ pour $\alpha < \varphi$. Chacun des ensembles N et Q a donc au moins un point commun avec tout ensemble parfait. Les ensembles N et Q étant, d'après (7), disjoints, il en résulte qu'ils sont de puissance du continu, non mesurables et de deuxième catégorre dans tout intervalle.

Soit maintenant a un nombre réel donné quelconque. D'après la propriété de la suite (5) on a donc $a = x_\lambda$, où λ est un nombre ordinal $<\varphi$. Soit p un point de l'ensemble $N(a) - N$. D'après $p \in N(a)$ et d'après la définition de l'ensemble N, on a

$$p = q_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n} + x_\lambda, \tag{10}$$

où α est un nombre ordinal $<\varphi$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $<\alpha$.

S'il était $\lambda < \alpha$, le point (10) appartiendrait évidemment à l'ensemble N (d'après la définition de N). D'après $p \in N(a) - N$ on a donc $\alpha \geqslant \lambda$.

Donc, si $p \in N(a) - N$, p est de la forme (10), où α est un nombre ordinal $\leqslant \lambda$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $<\alpha$.

L'ensemble de tous tels nombres p est (pour tout λ donné $<\varphi$) évidemment de puissance $\leqslant \aleph_0 + \overline{\lambda}$, donc, d'après $\lambda < \varphi$, de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Le théorème II est ainsi démontré.

Voici une application du théorème II.

Nous dirons qu'un nombre réel a est une *presque période* de la fonction d'une variable réelle $f(x)$, si l'égalité

$$f(x+a) = f(x)$$

a lieu pour tous les x réels sauf pour les x formant un ensemble de puissance inférieure à celle du continu.

Désignons par $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble N satisfaisant aux conditions du théorème II. On voit sans peine que tout nombre réel a est une presque période de cette fonction $f(x)$. Donc:

Il existe une fonction non mesurable d'une variable réelle, telle que tout nombre réel est sa presque période.

Soit maintenant $f(x)$ la fonction dont nous venons de parler et soit $h_1, h_2, h_3, \ldots$, une suite infinie donnée quelconque de nombres réels. La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de puissances inférieares à celle du continu étant, d'après un théorème connu de J. König, de puissance $< 2^{\aleph_0}$, on conclut sans peine que les égalités

$$f(x+h_n) = f(x), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ont lieu pour tous les nombres réels x sauf les x formant un ensembles de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Par conséquent:

Il existe une fonction non mesurable d'une variable réelle $f(x)$, telle que, quelle que soit la suite infinie $h_1, h_2, h_3, \ldots,$ de nombres réels non nuls tendant vers 0, l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = 0$$

a lieu pour tous les nombres réels x, sauf les x formant un ensemble de puissance inférieure à celle du continu.

Sul confronto di alcune definizioni di integrale definito [1]).

Di

Giovanni Dantoni (Pisa).

E' noto che la definizione di integrale definito di Mengoli-Cauchy, per una funzione $f(x)$ data in (a, b) consiste nel considerare la somma:

$$(1) \qquad \sum_{r=0}^{m-1} (x_{r+1} - x_r) f\{x_r + \vartheta_r (x_{r+1} - x_r)\},$$

corrispondente ad una divisione qualsiasi di (a, b) in parti mediante i punti: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ e ad una scelta del tutto arbitraria di ϑ_r, purché soddisfacente alle limitazioni $0 \leqslant \vartheta_r \leqslant 1$, e nel chiamare integrale definito della $f(x)$, in (a, b), il limite determinato e finito di tale somma al tendere allo zero di tutte le differenze $x_{r+1} - x_r$, ammesso, ben s'intende, che tale limite esista. Consideriamo una qualsiasi funzione $\vartheta(u, v)$ soddisfacente sempre alla doppia limitazione $0 \leqslant \vartheta(u, v) \leqslant 1$ e definita per ogni coppia u, v tale che $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$, e construiamo con tale funzione la somma:

$$(2) \qquad \sum_{r=0}^{m-1} (x_{r+1} - x_r) f\{x_r + \vartheta(x_r, x_{r+1}) [x_{r+1} - x_r]\}$$

in corrispondenza ad ogni suddivisione di (a, b) in parti mediante i punti $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$.

Supponendo che la funzione $f(x)$ sia limitata e che al tendere comunque a zero di tutte le differenze $x_{r+1} - x_r$ la somma (2) tenda

[1]) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.