2. Soit $E$ l'ensemble des points du segment $(0, 1)$ et $F$ la famille de toutes les transformations biunivoques et bicontinues dont les domaines et les contre-domaines sont des ensembles $G_\delta \subset E$. La classe des ensembles $G_\delta$ étant de la puissance du continu, $F$ l'est aussi.

Si $M \subset E$ et si $f(x)$ est une transformation quelconque biunivoque et bicontinue de l'ensemble $M$ en un sous-ensemble de $E$, il existe en vertu d'un théorème de M. Lavrentieff [1]) une transformation $T$ de $F$, dont le domaine contient l'ensemble $M$, telle que

$$T(x) = f(x) \quad (x \in M).$$

On voit donc que chaque sous-ensemble de l'intervalle $(0, 1)$ homéomorphe à $M$ est l'image de l'ensemble $M$ fournie par une transformation de $F$. Il résulte donc du théorème 1:

*L'intervalle* $(0, 1)$ *contient un ensemble qui est, ainsi que son complémentaire, de la puissance du continu et qui contient chaque ensemble homéomorphe à un quelconque de ses sous-ensembles, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.*

[1]) M. Lavrentieff, Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes, Fund. Math. 6 (1924) p. 149—160. C'est grâce à une remarque de M. Kuratowski que j'ai été conduit à employer ici le théorème de M. Lavrentieff.

---

# Sur un ensemble parfait qui a avec toute sa translation au plus un point commun.

Par

S. Ruziewicz (Lwów) et W. Sierpiński (Varsovie).

**Théorème I.** *Il existe un ensemble linéaire parfait $P$ (non vide) qui a avec toute sa translation au plus un point commun.*

Démonstration. M. J. von Neumann a construit un ensemble non dénombrable $E$ de nombres réels, tel que toute suite finie de nombres de $E$ est un système de nombres indépendants algébriquement, c'est-à-dire, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres de $E$, l'égalité $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, où $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un polynome en $t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aux coefficients rationnels, a lieu seulement dans le cas, où tous les coefficients sont nuls [1]). L'ensemble $E$ est l'ensemble de tous les nombres

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^{Enx}}}{2^{2^{n^2}}},$$

où $x$ est un nombre réel positif.

La fonction $f(x)$ est, comme on voit sans peine, croissante pour $x > 0$. En effet, si $0 < x < y$, on a $0 \leqslant Enx \leqslant Eny$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, donc

$$\frac{2^{2^{Enx}}}{2^{2^{n^2}}} \leqslant \frac{2^{2^{Eny}}}{2^{2^{n^2}}},$$

et d'autre part, d'après $x < y$, il existe un nombre naturel $k$, tel

[1]) *Math. Annalen.* Bd. 99, p. 134—141. C'est M. Tarski qui nous à suggeré l'idée d'utiliser l'ensemble de M. J. von Neumann au lieu de la base de M. Hamel qui nous conduisait aux résultats plus restreints et donnait des ensembles non effectivement définis. Une simplificatiou de notre démonstration est due à M. Lindenbaum.

que $y - x > 1/k$, d'où: $kx < ky - 1$ et $Ekx \leqslant Eky - 1 < Eky$, ce qui donne

$$\frac{2^{2^{Ekx}}}{2^{2^{k^3}}} < \frac{2^{2^{Eky}}}{2^{2^{k^3}}}.$$

On a donc $f(x) < f(y)$.

Il en résulte tout de suite que l'ensemble $E$ est de puissance du continu.

La fonction $f(x)$, en tant que croissante, est de classe $\leqslant 1$: l'ensemble de toutes les valeurs qu'elle prend pour $x > 0$ est donc un ensemble analytique.

L'ensemble $E$ est donc analytique et non dénombrable, donc il contient un sous-ensemble parfait $P$.

(Il est aisé aussi à démontrer sans faire appel à la théorie des ensembles analytiques que $E$ contient un sous-ensemble parfait. En effet, on voit sans peine que l'ensemble de valeurs que prend, pour $x > 0$, une fonction croissante d'une variable réelle est une différence de deux ensembles, dont un est fermé et l'autre est au plus dénombrable).

Soit $P(a)$ la translation de l'ensemble $P$ de longueur $a$ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres de la forme $x + a$, où $x \in P$) Nous prouverons que si $a \neq 0$, les ensembles $P$ et $P(a)$ ont au plus un point commun.

Admettons, en effet, que $x$ et $y \neq x$ sont points de l'ensemble $P \cdot P(a)$. De $x \in P(a)$ et $y \in P(a)$ résulte qu'il existe deux points $x_1$ et $y_1$ de $P$, tels que

$$x = x_1 + a \quad \text{et} \quad y = y_1 + a, \tag{1}$$

ce qui donne

$$x - x_1 - y + y_1 = 0. \tag{2}$$

D'après la propriété de l'ensemble $E \supset P$, la relation (2) entre quatre nombres $x$, $x_1$, $y$ et $y_1$ de $E$ entraîne $x = x_1$, ou bien $x = y$, Or, si $x = x_1$, l'égalité (1) donne $a = 0$ contrairement à l'hypothèse, et d'autre part on a, par hypothèse $x \neq y$. L'hypothèse que l'ensemble $P \cdot P(a)$ contient plus qu'un point implique donc une contradiction et notre théorème est démontré [1]).

[1]) M. Waraszkiewicz remarque qu'au lieu de l'ensemble $E$ de M. J. von Neumann on peut prendre l'ensemble $H$ de tous les nombres

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{E 10^n x}},$$

où $x$ est un nombre irrationnel, tel que $1 < x < 2$. La démonstration que la relation (2) entre quatre nombre $x$, $x_1$, $y$ et $y_1$ de $H$ entraîne $x = x_1$, ou bien $x = y$, n'offre pas de difficulté. Or, l'ensemble $H$, en tant qu'une image continue de l'ensemble de tous les nombres irrationnels d'un intervalle, est analytique et, comme non dénombrable, contient un sous-ensemble parfait.



Soit maintenant $P$ un ensemble parfait satifaisant aux conditions du théorème I et soient $M$ et $N$ deux sous-ensembles disjoints de $P$. On voit sans peine que toute translation de $M$ a avec toute translation de $N$ au plus un point commun. En particulier, si $M$ et $N$ sont parfaits, on obtient ce

**Corollaire.** *Il existe deux ensembles linéaires parfaits* (*non vides*) *tels que toute translation de l'un d'eux a avec toute translation de l'autre au plus un point commun.*

Voici encore une démonstration de cette proposition.

M. Souslin a défini un corps $S$ de nombres réels n'en contenant pas la totalité, mais contenant un sous-ensemble parfait $P$ [2]).

Soit $\xi$ un nombre réel non nul n'appartenant pas à $S$. On voit sans peine qu'un tel nombre $\xi$ existe, puisque, si le corps $S$ contenait tout nombre réel non nul, il contiendrait aussi le nombre $1 + (-1) = 0$, donc tous les nombres réels, contrairement à l'hypothèse.

Soit $Q$ l'ensemble de tous les nombres de la forme $\xi x$, où $x \in P$: ce sera évidemment un ensemble parfait (semblable au sens géomètrique à $P$).

Soit $P(a)$ une translation de l'ensemble $P$ de longueur $a$ et soit $Q(b)$ une translation de l'ensemble $Q$ de longueur $b$, et admettons que les ensembles $P(a)$ et $Q(b)$ ont deux points distincts communs: $x$ et $y$. On a donc

$$x \in P(a)\,Q(b) \quad \text{et} \quad y \in P(a)\,Q(b)$$

donc

$$x = p + a = q + b, \quad y = p' + a = q' + b, \tag{3}$$

où

$$p \in P, \quad q \in Q, \quad p' \in P \quad \text{et} \quad q' \in Q.$$

De (3) résulte tout de suite

$$p - q - p' + q' = 0. \tag{4}$$

De $q \in Q$, $q' \in Q$ et de la définition de l'ensemble $Q$ résulte qu'il existe deux nombres $r$ et $r'$ de l'ensemble $P$, tels que $q = \xi r$ et $q' = \xi r'$, d'où, d'après (4):

$$p - \xi r - p' + \xi r' = 0. \tag{5}$$

Il ne peut être ici $r = r'$, puisqu'on aurrait alors $q = q'$ et, d'après (3), $x = y$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $r \neq r'$ et $r - r' \neq 0$, et la for-

[2]) *Fund. Math.*, t. IV, p. 311.

mule (5) donne

$$\xi = \frac{p - p'}{r - r'}. \tag{6}$$

Les nombres $p$, $p'$, $r$ et $r'$ appartenant à $P$, donc, à plus forte raison, au corps $S$, la formule (6) prouve que $\xi$ est un nombre du corps $S$, ce qui implique une contradiction.

Nous avons ainsi démontré que les ensembles $P(a)$ et $Q(a)$ ont au plus un plus un point commun. Notre proposition est ainsi démontrée.

M. Banach a démontré récemment [1]) (a l'aide de l'axiome du choix) qu'il existe deux ensembles linéaires $M$ et $N$ de puissance du continu, complémentaires l'un de l'autre et tels que toute translation de $M$ a avec toute translation de $N$ moins que $2^{\aleph_0}$ (donc, si l'on admet l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ — un ensemble au plus dénombrable) de points communs.

Or, il est à remarquer qu'*il n'existe pas deux ensembles linéaires $M$ et $N$ complémentaires l'un de l'autre, chacun contenant plus qu'un point et tels que toute translation de $M$ a avec toute translation de $N$ au plus un point en commun.*

En effet, supposons que $M$ et $N$ sont deux tels ensembles, et soient $a$ et $b$ deux points distincts de $M$, et $c$ et $d$ deux points distincts de $N$.

Si $d + a - c \,\epsilon\, M$, on a $d \,\epsilon\, M(c - a)$ et, d'après $a \,\epsilon\, M$, $c \,\epsilon\, M(c - a)$. D'autre part, d'après $c \,\epsilon\, N$ et $d \,\epsilon\, N$, on a $d \,\epsilon\, N(0)$ et $c \,\epsilon\, N(0)$. Les ensembles $M(c - a)$ et $N(0)$ aurait donc deux points distincts communs, $d$ et $c$, ce qui est impossible.

On a donc $d + a - c \,\bar{\epsilon}\, M$, donc $d + a - c \,\epsilon\, N$.

Si $b + d - c \,\epsilon\, M$, on a $d \,\epsilon\, M(c - b)$, et, d'après $b \,\epsilon\, M$, $c \,\epsilon\, M(c - b)$, et les ensembles $M(c - b)$ et $N(0)$ auraient deux points distincts, $c$ et $d$, en commun, ce qui est impossible.

On a donc $b + d - c \,\bar{\epsilon}\, M$, donc $b + d - c \,\epsilon\, N$.

Nous avons ainsi $d + a - c \,\epsilon\, N$ et $b + d - c \,\epsilon\, N$, d'où: $a \,\epsilon\, N(c - d)$ et $b \,\epsilon\, N(c - d)$. D'autre part, d'après $a \,\epsilon\, M$ et $b \,\epsilon\, M$, on a $a \,\epsilon\, M(0)$ et $b \,\epsilon\, M(0)$. Les ensembles $M(0)$ et $N(c - d)$ aurait donc deux points distincts, $a$ et $b$, en commun, ce qui est impossible.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Revenons à notre théorème I. Dans tout ensemble parfait il existe, comme on sait, une famille de puissance du continu de sous-

[1]) ce volume, p. 13.



ensembles parfaits disjoints [1]). Soit $F$ une telle famille de sous-ensembles de l'ensemble $P$ satisfaisant aux conditions du théorème I. On voit sans peine que si $M$ et $N$ sont deux ensembles quelconques de la famille $F$, toute translation de $M$ a avec toute translation de $N$ au plus un point commun. On a ainsi ce

**Théorème II.** *Il existe une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires parfaits, tels que, pour deux quelconques d'entre eux, toute translation de l'un a avec toute translation de l'autre au plus un point commun.*

Deux ensembles infinis sont dits *presque disjoints* si l'ensemble de leurs points communs a une puissance inférieure à celle de chacun de ces ensembles [2]) On voit sans peine que si $G$ et $H$ sont deux sous-ensembles presque disjoints de l'ensemble $P$ satisfaisant aux conditions du théorème I, toute translation de $G$ et toute translation de $H$ sont des ensembles presque disjoints Or, W. Sierpiński a démontré [3]) (en utilisant le théorème de M. Zermelo) que tout ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ peut être décomposé en une classe de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles presque disjoints. En décomposant aussi l'ensemble $P$, on obtient, comme on voit sans peine, *une famille $F$ de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires infinis, tels que pour deux ensembles quelconques de la famille $F$ toute translation de l'un et toute translation de l'autre sont des ensembles presque disjoints.*

Il en résulte sans peine que

*Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une famille $F$ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$, tels que, pour deux ensembles quelconques de la famille $F$, toute translation de l'un a avec toute translation de l'autre un ensemble au plus dénombrable de points communs.*

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. VIII, p. 195.

[2]) Cf. *Fund. Math.*, t. XII, p. 188.

[3]) *Monatshefte für Math. u. Phys.* XXXV. (1928), p. 239.