Sur les transformations biunivoques.

Par

Stefan Banach (Lwów).

Dans ce qui va suivre E désigne un ensemble quelconque, F une famille de transformations biunivoques dont les domaines et contre-domaines sont des sous-ensembles de E Nous supposons que l'ensemble E et la famille F ont la même puissance $\aleph > \aleph_0$. Soit ϑ le plus petit nombre ordinal appartenant à la puissance $\aleph$.

§ 1.

Lemme. *Il existe une suite* $\{H_\alpha\}$ $(1 \leqslant \alpha < \vartheta)$ *de sous-ensembles de* E *satisfaisant aux conditions suivantes*:

1) *Les ensembles* H_α *sont non vides et disjoints.*
2) $E = \sum\limits_{1 \leqslant \alpha < \vartheta} H_\alpha$.
3) *Pour tout* $\xi < \vartheta$ *l'ensemble* $\sum\limits_{\alpha \leqslant \xi} H_\alpha$ *est de puissance* $< \aleph$.
4) T *étant une transformation quelconque appartenant à* F *et* D *le domaine de* T, *il existe un nombre ordinal* $\xi < \vartheta$ *de sorte que*

$$T(D \cdot H_\alpha) \subset H_\alpha \quad \textit{pour} \quad \alpha > \xi \text{ [1]}.$$

Démonstration. Soient

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \vartheta)$$

$$(2) \qquad T_1, T_2, \ldots, T_\omega, T_{\omega+1}, \ldots, T_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \vartheta)$$

l'ensemble E resp. F bien ordonné suivant le type ordinal ϑ.

[1] $T(N)$ désigne l'image de l'ensemble N.

Nous allons définir par induction transfinie une suite partielle de (1):

$$(3) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_\omega, y_{\omega+1}, \ldots, y_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \vartheta)$$

de la manière suivante:

Soit $y_1 = x_1$. Pour $1 < \alpha < \vartheta$, soit y_α le premier élément de la suite (1) jouissant de la propriété suivante:

Quels que soient les nombres ordinaux $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ inférieurs à α et les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (k fini), l'expression $T_{\alpha_1}^{n_1}, T_{\alpha_2}^{n_2}, \ldots, T_{\alpha_k}^{n_k}(y_{\alpha_0})$ [1] représente un élément de E différent de y_α (à moins qu'elle n'en représente aucun).

L'élément y_α est ainsi défini pour tout $\alpha < \vartheta$. En effet, soit $\aleph'$ la puissance correspondante au nombre ordinal α. On a évidemment $\aleph' < \aleph$. Il est aisé de voir que l'ensemble des éléments x de la forme

$$(4) \qquad x = T_{\alpha_1}^{n_1}, T_{\alpha_2}^{n_2}, \ldots, T_{\alpha_k}^{n_k}(y_{\alpha_0})$$

est de puissance

$$\aleph_0 (\aleph'^2 + \aleph'^3 + \ldots) < \aleph.$$

Il existe donc bien des éléments de E différents de tous les éléments représentés par (4). Remarquons encore, que les éléments de la suite (3) ainsi définie sont tous différents. En effet, en vertu de l'identité $y_\alpha = T^0(y_\alpha)$, l'élément y_α est différent de tous les éléments qui le suivent.

Désignons par W_α $(1 < \alpha < \vartheta)$ l'ensemble des éléments x représentés par (4) (les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ et $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ayant toujours le même sens).

Posons

$$(5) \qquad H_1 = W_1, \quad H_\alpha = W_{\alpha+1} - W_\alpha \quad (1 < \alpha < \vartheta).$$

On a évidemment $W_{\alpha'} \subset W_\alpha$ pour $1 < \alpha' < \alpha < \vartheta$. Par conséquent les ensembles H_α sont disjoints. Ces ensembles sont de plus non vides. En effet, l'élément y_α n'est pas, par définition, contenu

[1] T^n est la n-ème itération de la transformation T pour $n > 0$ et la n-ème itération de la transformation inverse T^{-1} pour $n < 0$. T^0 est la transformation identique.

Il se peut évidemment qu'une itération n'existe pas, car le domaine et le contre-domaine peuvent être différents.

dans W_α, mais en vertu de $y_\alpha = T^0(y_\alpha)$ il est contenu dans $W_{\alpha+1}$, donc aussi dans H_α. Evidemment $y_1 \epsilon H_1$.

On a pour $1 \leqslant \alpha < \vartheta$

$$W_{\alpha+1} = \sum_{\xi \leqslant \alpha} H_\xi. \tag{6}$$

Cela résulte aisément par induction transfinie des équations (5) en vertu de l'égalité $W_\alpha = \sum\limits_{\xi<\alpha} W_\xi$, valable pour chaque nombre ordinal α limite.

Les ensembles W_α étant de puissance $< \aleph$, il en est de même en vertu de (6) aussi de H_α et de $\sum\limits_{\xi \leqslant \alpha} H_\xi$ $(\alpha < \vartheta)$.

Soit x un élément quelconque de E. Parmi les éléments qui suivent x dans la suite (1) il y a nécessairement un élément y_α de la suite (3). On a par définition de y_α et de W_α: $x \epsilon W_\alpha \subset W_{\alpha+1}$, donc en vertu de (6) $x \epsilon \sum\limits_{\xi<\vartheta} H_\xi$.

Supposons que $1 \leqslant \xi < \alpha < \vartheta$ et désignons par D_ξ le domaine de la transformation T_ξ. Nous allons prouver que $T_\xi(D_\xi H_\alpha) \subset H_\alpha$.

Soit x un élément de $D_\xi H_\alpha$. Alors $x \epsilon H_\alpha$, donc $x \epsilon W_{\alpha+1}$, mais x non ϵW_α.

Par conséquent $x = T_{\alpha_1}^{n_1}, T_{\alpha_2}^{n_2}, \ldots, T_{\alpha_k}^{n_k}(y_{\alpha_0})$, les nombres ordinaux $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ étant $< \alpha + 1$ et $n_1, n_2, \ldots, n_k$ désignant des entiers. On a

$$T_{\xi(x)} = T_\xi, T_{\alpha_1}^{n_1}, T_{\alpha_2}^{n_2}, \ldots, T_{\alpha_k}^{n_k}(y_{\alpha_0}).$$

Comme $\xi < \alpha$, on a $T_\xi(x) \subset W_{\alpha+1}$. Si l'on avait $T_\xi(x) \subset W_\alpha$, on pourrait écrire

$$T_\xi(x) = T_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{n}_1}, T_{\bar{\alpha}_2}^{\bar{n}_2}, \ldots, T_{\bar{\alpha}_r}^{\bar{n}_r}(y_{\bar{\alpha}_0})$$

d'où

$$x = T_\xi^{-1}, T_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{n}_1}, \ldots, T_{\bar{\alpha}_r}^{\bar{n}_r}(y_{\bar{\alpha}_0})$$

$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_r$ étant des nombres ordinaux $< \alpha$. Il en résulterait, en vertu de $\xi < \alpha$, que $x \epsilon W_\alpha$, ce qui est impossible.

L'élément $T_\xi(x)$ n'est donc pas contenu dans W_α et, comme $T_\xi(x) \subset W_{\alpha+1}$, il vient $T_\xi(x) \subset H_\alpha$. Cela étant vrai pour tout x de $D_\xi H_\alpha$, on a

$$T_\xi(D_\xi H_\alpha) \subset H_\alpha \quad (\xi < \alpha). \tag{7}$$

Les ensembles H_α satisfont donc à toutes les conditions de notre lemme.

Théorème 1. *Il existe un ensemble $G \subset E$ jouissant des propriétés suivantes:*

1) *Les ensembles G et $CG = E - G$ ont la puissance $\aleph$;*
2) *T étant une transformation quelconque appartenant à F et D son domaine, les ensembles*

$$T(DG) - G \quad \text{et} \quad T(D \cdot CG) - CG$$

sont de puissance $< \aleph$.

Démonstration. Nous décomposons l'ensemble des nombres ordinaux $< \vartheta$ en deux classes disjointes K_1 et K_2, chacune de puissance $\aleph$. Soit $G = \sum\limits_{\alpha \epsilon K_1} H_\alpha$, les ensembles H_α étant ceux du lemme précédent.

L'ensemble G et son complémentaire $CG = \sum\limits_{\alpha \epsilon K_2} H_\alpha$ ont évidemment la puissance $\aleph$. Pour une transformation quelconque $T = T_\xi$ on a d'après (7)

$$T_\xi(D_\xi H_\alpha) \subset H_\alpha \quad (\alpha > \xi).$$

L'ensemble $W_{\xi+1} = \sum\limits_{\alpha \leqslant \xi} H_\alpha$ (cf. (6)) est d'une puissance $< \aleph$. On démontre de même que $T(D_\xi \cdot CG) - CG$ est d'une puissance $< \aleph$.

Remarque 1. Soit E l'ensemble des points d'un segment. En admettant l'hypothèse du continu, on peut affirmer l'existence d'un ensemble G satisfaisant aux conditions du théorème 1 et non mesurable.

Il suffit de montrer que l'on peut choisir la classe K_1 de manière que l'ensemble $\sum\limits_{\alpha \epsilon K_1} H_\alpha$ soit non mesurable.

En effet, dans le cas contraire on pourrait attribuer à chaque ensemble K des nombres ordinaux $< \vartheta$ un nombre réel mK (égal à la mesure de l'ensemble $\sum\limits_{\alpha \epsilon K} H_\alpha$) de sorte que

1) $mK \geqslant 0$,

2) pour toute suite dénombrable $\{K_n\}$ d'ensembles disjoints de nombres ordinaux $< \vartheta$ on a

$$\Sigma\, m K_n = m\, \Sigma K_n,$$

3) pour l'ensemble K_0 de tous les nombres ordinaux $\dot{<}\vartheta$ on a $mK_0 > 0$.

Or, il résulte d'un théorème démontré par M. Kuratowski et moi [1]) que cela est impossible.

Il existe donc un ensemble K de nombres ordinaux pour lequel l'ensemble linéaire $G = \sum_{\alpha \in K} H_\alpha$ est non mesurable. Il est aisé de vérifier que cet ensemble satisfait aux conditions du théorème 1. En particulier, l'ensemble CG est, lui aussi, non mesurable et, par conséquent, de la puissance du continu (toujours en admettant l'hypothèse du continu).

Remarque 2. Si l'on suppose dans le théorème 1 que toutes les transformations de la famille F transforme l'ensemble E en lui-même, alors l'ensemble G jouit de la propriété suivante:

les ensembles $T(G) - G$ et $G - T(G)$ sont de puissance $< \aleph$ pour tout $T \in F$.

Cela résulte du théorème 1 en vertu des égalités $D = E$ (d'où $DG = G$) et $T(G) + T(CG) = E$.

Théorème 2 [2]). *Les ensembles E et F ayant le même sens qu'auparavant, il existe un sous-ensemble M de E de puissance $\aleph$ satisfaisant à la condition suivante:*

Si T_1 et T_2 sont deux transformations de F définies dans D_1 resp. D_2, si de plus $M = R + S$ est une décomposition quelconque de l'ensemble M en deux ensembles disjoints, alors l'ensemble $T_1(D_1 R) \cdot T_2(D_2 S)$ est d'une puissance $< \aleph$.

Démonstration. Soit M un ensemble quelconque ayant avec chaque ensemble H_α de notre lemme un point commun et un seul. Il existe, en vertu du même lemme, un nombre ordinal ξ pour lequel

(1) $$T_1(D_1 H_\alpha) \subset H_\alpha \quad \text{et} \quad T_2(D_2 H_\alpha) \subset H_\alpha \quad (\alpha > \xi)$$

Posons

$$R' = R - \sum_{\alpha \leqslant \xi} H_\alpha, \quad S' = S - \sum_{\alpha \leqslant \xi} H_\alpha.$$

[1]) Voir S. Banach et C. Kuratowski, Sur une généralisation du problème de la mesure, Fund. Math. 14 (1929) p. 127—131.

[2]) Ce théorème est une généralisation d'un lemme de M. Sierpiński, publié dans ce volume. Voir: *Sur un problème concernant les types de dimensions.*

On a alors $T_1(D_1 R') \cdot T_2(D_2 S') = 0$.

En effet, supposons que ce produit contienne un point Z. Alors pour un certain $x \in D_1 R'$ et un certain $y \in D_2 S'$ on a $T_1(x) = T_2(y) = Z$. Il en résulte par définition de R' et S' qu'il existe un $\alpha > \xi$ tel que $x \in H_\alpha$, $y \in H_\alpha$ et $Z \in H_\alpha$. Mais cela est impossible, l'ensemble M n'ayant avec chaque H_α qu'un seul point commun.

L'ensemble $\sum_{\alpha \leqslant \xi} H_\alpha$ étant de puissance $< \aleph$, notre théorème est démontré.

§ 2.

1. Soient E l'ensemble des points d'une circonférence de rayon 1 et F la famille de toutes les rotations de cette circonférence autour de son centre. En admettant l'hypothèse du continu on conclut à l'aide du théorème 1 et des remarques 1 et 2 que:

Il existe sur la circonférence un ensemble G non mesurable qui est transformé par chaque rotation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Par conséquent,

il existe une fonction $\varphi(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ non mesurable remplissant la condition suivante: quelle que soit la suite $\{\varepsilon_n\}$ tendant vers zero, on a

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x + \varepsilon_n) = \varphi(x)$$

abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable [1]).

Désignons par x l'arc de la circonférence compté à partir d'un point fixe dans le sens positif et posons $\varphi(x) = 1$ ou $\varphi(x) = 0$ suivant que le point correspondant appartienne ou non à l'ensemble G. Il est aisé de vérifier que cette fonction a la propriété demandée.

La question, si une fonction de ce genre existe, a été posée par M. Auerbach [2]).

[1]) D'après une remarque de M. Sierpiński, on peut démontrer sans admettre l'hypothèse du continu le théorème qu'on obtient du théorème du texte en y remplaçant les mots „au plus dénombrable" par les mots: „de puissance inférieure à celle du continu". Voir ce volume, p. 24 ss,

[2]) Quant aux fonctions mesurables voir H. Auerbach, Sur la relation $\lim_{h_n \to 0} f(x + h_n) = f(x)$. Fund. Math. 11 (1928), p. 193—197.

2. Soit E l'ensemble des points du segment $(0, 1)$ et F la famille de toutes les transformations biunivoques et bicontinues dont les domaines et les contre-domaines sont des ensembles $G_\delta \subset E$. La classe des ensembles G_δ étant de la puissance du continu, F l'est aussi.

Si $M \subset E$ et si $f(x)$ est une transformation quelconque biunivoque et bicontinue de l'ensemble M en un sous-ensemble de E, il existe en vertu d'un théorème de M. Lavrentieff [1]) une transformation T de F, dont le domaine contient l'ensemble M, telle que

$$T(x) = f(x) \quad (x \in M).$$

On voit donc que chaque sous-ensemble de l'intervalle $(0, 1)$ homéomorphe à M est l'image de l'ensemble M fournie par une transformation de F. Il résulte donc du théorème 1:

L'intervalle $(0, 1)$ *contient un ensemble qui est, ainsi que son complémentaire, de la puissance du continu et qui contient chaque ensemble homéomorphe à un quelconque de ses sous-ensembles, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.*

[1]) M. Lavrentieff, Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes, Fund. Math. 6 (1924) p. 149—160. C'est grâce à une remarque de M. Kuratowski que j'ai été conduit à employer ici le théorème de M. Lavrentieff.

Sur un ensemble parfait qui a avec toute sa translation au plus un point commun.

Par

S. Ruziewicz (Lwów) et W. Sierpiński (Varsovie).

Théorème I. *Il existe un ensemble linéaire parfait P (non vide) qui a avec toute sa translation au plus un point commun.*

Démonstration. M. J. von Neumann a construit un ensemble non dénombrable E de nombres réels, tel que toute suite finie de nombres de E est un système de nombres indépendants algébriquement, c'est-à-dire, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres de E, l'égalité $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, où $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un polynome en t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aux coefficients rationnels, a lieu seulement dans le cas, où tous les coefficients sont nuls [1]). L'ensemble E est l'ensemble de tous les nombres

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^{Enx}}}{2^{2^{n^2}}},$$

où x est un nombre réel positif.

La fonction $f(x)$ est, comme on voit sans peine, croissante pour $x > 0$. En effet, si $0 < x < y$, on a $0 \leqslant Enx \leqslant Eny$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, donc

$$\frac{2^{2^{Enx}}}{2^{2^{n^2}}} \leqslant \frac{2^{2^{Eny}}}{2^{2^{n^2}}},$$

et d'autre part, d'après $x < y$, il existe un nombre naturel k, tel

[1]) *Math. Annalen.* Bd. 99, p. 134—141. C'est M. Tarski qui nous à suggeré l'idée d'utiliser l'ensemble de M. J. von Neumann au lieu de la base de M. Hamel qui nous conduisait aux résultats plus restreints et donnait des ensembles non effectivement définis. Une simplification de notre démonstration est due à M. Lindenbaum.