deux suites doubles d'ensembles E_n^m et H_n^m telles que $E_n^m \in P^{\xi_{m,n}}$, $H_n^m \in Q^{\eta_{m,n}}$, où $\omega \leqslant \xi_{m,n} < \beta$, $\omega \leqslant \eta_{m,n} < \beta$, et qu'on a les formules (13), (14), (15), (16) et (17). Distinguons maintenant deux cas.

1) β est un nombre ordinal de première espèce, soit $\beta = \alpha + 1$. D'après $\omega \leqslant \xi_{m,n} < \beta$ et $\omega \leqslant \eta_{m,n} < \beta$ nous avons $\omega \leqslant \xi_{m,n} \leqslant \alpha$ et $\omega \leqslant \eta_{m,n} \leqslant \alpha$, donc $P^{\xi_{m,n}} \subset P^\alpha \subset P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$ et $Q^{\eta_{m,n}} \subset Q^\alpha \subset$ $\subset P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$, ce qui donne $E_n^m \in P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$ et $H_n^m \in P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$, pour m et n naturels, d'où résulte tout de suite que les ensembles (19) appartiennent encore (pour $n = 1, 2, \ldots$) à la famille $P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$, donc (la formule (3) étant, par l'hypothèse, vraie pour $\omega \leqslant \alpha < \beta$), à la famille L^α. Or, d'après notre lemme, de (13) — (17) résulte la formule (18). De (19), (18) et $\alpha < \beta$ résulte donc que $E \in L^\beta$.

2) β est un nombre ordinal de seconde espèce. Désignons par ζ_n le plus grand des nombres $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{n,n}, \eta_{1,n}, \eta_{2,n}, \ldots, \eta_{n,n}$: de $\xi_{m,n} < \beta$ et $\eta_{m,n} < \beta$ (pour m et n naturels) résulte que $\zeta_n < \beta$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Or, d'après la définition du nombre ζ_n nous avons $P^{\xi_{m,n}} \subset P^{\zeta_n} \subset P^{\zeta_n+1}Q^{\zeta_n+1}$ et $Q^{\eta_{m,n}} \subset Q^{\zeta_n} \subset P^{\zeta_n+1}Q^{\zeta_n+1}$, pour $m = 1, 2, \ldots, n$, d'où résulte, d'après (19), que $Q_n \in P^{\zeta_n+1}Q^{\zeta_n+1}$, donc, d'après $\zeta_n + 1 < \beta$ (puisque $\zeta_n < \beta$ et β est de seconde espèce), la formule (3) étant vraie pour $\omega \leqslant \alpha < \beta$: $Q_n \in L^{\zeta_n}$, ce qui prouve, d'après (19), (18) et $\zeta_n < \beta$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, que $E \in L^\beta$.

Nous avons ainsi démontré que

$$P^{\beta+1}Q^{\beta+1} \subset L^\beta,$$

ce qui donne, d'après (27), l'égalité $L^\beta = P^{\beta+1}Q^{\beta+1}$.

Notre théorème est ainsi démontré par l'induction transfinie.

Über den höheren Zusammenhang von Vereinigungsmengen und Durchschnitten.

Von

L. Vietoris (Innsbruck).

K. Borsuk hat in seiner Abhandlung „Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents" [1]) neben vielen anderen Ergebnissen folgenden Satz bewiesen:

(0, 1) *Der Durchschnitt einer absteigenden Folge von im Kleinen zusammenhängenden, henkellosen, kompakten Kontinuen ist ein henkelloses kompaktes Kontinuum.*

Eine zusammenhängende Menge M heißt dabei *henkellos* [2]) oder *unicohérent* [3]), wenn der Durchschnitt je zweier zusammenhängender in M abgeschlossener Mengen, deren Vereinigung M ist, zusammenhängend ist.

Borsuk zeigt zugleich an einen einfachen Beispiel, daß der Satz nicht richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung des Zusammenhangs im Kleinen wegläßt.

Im Folgenden sollen einige mit diesem Satz in enger Beziehung stehende Sätze abgeleitet werden.

1.

Hier verallgemeinern wir die folgenden bekannten Sätze auf höhere Dimensionen: „Der Durchschnitt einer absteigenden Folge

[1]) Fund. Math. XVII, (1931), S. 171—209, S. 208, 50.

[2]) Vgl. meine Abhandlung „Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche". Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 443—453, S. 445.

[3]) Fund. Math. XIII, (1929), S. 307.

in sich kompakter nicht leerer Mengen ist nicht leer“. „Der Durchschnitt einer absteigenden Folge in sich kompakter zwischen zwei Punkten p, q zusammenhängender Mengen ist zwischen p und q zusammenhängend“. „Der Durchschnitt einer absteigenden Folge von kompakten Kontinuen ist ein kompaktes Kontinuum“.

Wir behaupten nun:

(1, 01) *Es sei* $A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq A_3 \supseteqq \ldots$ *eine absteigende Folge von in sich kompakten Mengen, von denen jede eine* 0*-fache Basis der* n*-dimensionalen Zyklose*[4]) *hat. Dann hat auch der Durchschnitt* A *der Folge eine* 0*-fache Basis der* n*-dimensionalen Zyklose.*

Wir haben hier also die Henkellosigkeit durch die 0-fache Basis der n-dimensionalen Zyklose ersetzt und die Voraussetzung des Zusammenhangs im Kleinen weggelassen.

Um (1, 01) zu beweisen, haben wir zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, derart daß jeder in A liegende n-dimensionale δ-Zykel in A ε-homolog 0 ist. Dazu nehmen wir zunächst m so groß, daß jeder in A_m liegende Punkt einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ von A hat. Wegen der Voraussetzung, daß A_m eine 0-fache Basis der n-dimensionalen Zyklose haben soll, gibt es ein positives $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$, sodaß jeder in A_m liegende δ-Zykel $\frac{\varepsilon}{3}$-homolog 0 in A_m ist. C sei ein δ-Zykel in A, also auch in A_m. Deshalb gibt es in A_m einen $\frac{\varepsilon}{3}$-Komplex K, dessen Rand C ist. $C = R(K)$. Zu jeder Ecke k von K gibt es einen Punkt k^* von A, für welchen der Abstand $\overline{kk^*} < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Wir wählen für jede Ecke k von K einen solchen Punkt k^* aus und bilden aus den Punkten k^* einen Komplex K^*, indem wir das Punkte-$(r+1)$-Tupel $(k_0^*, k_1^*, \ldots, k_r^*)$ dann und nur dann als Seite von K^* erklären, wenn $(k_0, k_1, \ldots, k_r)$ Seite von K ist[5]). Dabei wählen wir für die Ecken c von C als die Punkte c^* die Punkte c

[4]) Im Sinne meiner in Anlehnung an L. E. J. Brouwer gegebenen Definition Math. Ann. 97 (1927), S. 464.

[5]) Nach L. E. J. Brouwer Math. Ann. 72 (1912) S. 422—425, nennen wir diesen Vorgang eine $\frac{\varepsilon}{3}$-Abänderung von K.

selbst. K^* ist ein (im Allgemeinen singulärer Komplex) mit dem Rande C. K^* liegt in A und ist ein ε-Komplex. Also ist $C \sim_\varepsilon 0$ in A, was zu zeigen war.

(1, 1) $A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq A_3 \supseteqq \ldots$ *sei eine Folge von in sich kompakten Mengen, ihr Durchschnitt* A. *Eine in* A *liegende Fundamentalfolge von* n*-dimensionalen Zykeln ist dann und nur dann in* A *homolog* 0, *wenn sie in fast allen* A_l *homolog* 0 *ist.*

Das „nur dann“ in dieser Behauptung folgt unmittelbar daraus, daß $A \subseteqq A_l$ ist und jede Fundamentalfolge, welche in A homolog ist, erst recht in A_l homolog 0 ist. Nun zum Beweis des übrigen Teiles der Behauptung! Es sei also für $l = 1, 2, 3, \ldots$, C_l ein δ_l-Zykel in A, wo $\lim\limits_{l \to \infty} \delta_l = 0$ und die Folge $\{C_l\} \sim 0$ in fast allen A_l ist. Wir haben zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein L, sodaß für $l > L$ $C_l \sim_\varepsilon 0$ in A ist.

Angenommen, dies wäre nicht richtig, d. h. es gäbe ein $\varepsilon > 0$ und unendlich viele C_{l_1}, C_{l_2}, $C_{l_3}, \ldots$, die sämtlich in A nicht $\sim_\varepsilon 0$ sind. m sei so groß, daß $\{C_l\} \sim 0$ in A_m ist und jeder in A_m liegende Punkt einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ von A hat. Weil die Folge $\{C_{l_i}\} \sim 0$ in A_m ist, gibt es ein L, sodaß für $l_i > L$ $C_{l_i} \sim_{\frac{\varepsilon}{3}} 0$ in A_m ist. Es sei nun $l_i > L$; es gibt also einen $\frac{\varepsilon}{3}$-Komplex K_{l_i} in A_m, dessen Rand C_{l_i} ist. K_{l_i} kann durch eine $\frac{\varepsilon}{3}$-Abänderung in einen Komplex $K_{l_i}^*$ übergeführt werden, der in A liegt und dessen Rand C_{l_i} ist. Daher ist $C_{l_i} \sim_\varepsilon 0$ in A entgegen der Voraussetzung über die C_{l_i}.

(1, 2) $A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq A_3 \supseteqq \ldots$ *sei eine Folge von in sich kompakten Mengen. Jede habe die leere Gruppe*[6]) *als* n*-te Homologiegruppe. Dann hat auch* A *die leere Gruppe als* n*-te Homologiegruppe.*

Denn jede in A liegende Fundamentalfolge von n-dimensionalen Zykeln liegt auch in allen A_l, ist dort laut Voraussetzung homolog 0, also nach (1, 1) auch in A homolog 0.

Dieser Satz gestattet noch eine Verallgemeinerung.

$A \subseteqq B$ seien zwei in sich kompakte Mengen. Dann heiße A mit B *in der* n*-ten Dimension homothetisch*, wenn a) jede in A

[6]) d. h. die Gruppe, deren einziges Element das neutrale ist.

egende Fundamentalfolge von n-dimensionalen Zykeln $C_1, C_2, C_3, \ldots$ in B (dann und) nur dann homolog 0 ist, wenn sie schon in A homolog 0 ist, und wenn es b) zu jeder in B liegenden Fundamentalfolge $\mathfrak{Z}$ von n-dimensionalen Zykeln eine mit $\mathfrak{Z}$ in B homologe in A liegende Fundamentalfolge gibt.

Sind A und B in der n-ten Dimension homothetisch, dann sind ihre n-ten Homologiegruppen, wie leicht zu sehen, einstufig isomorph. Natürlich reicht aber diese Isomorphie nicht aus, damit A mit B homothetisch ist, auch wenn $A \subseteqq B$ ist.

Beispiele: B sei eine Kreisscheibe, A ein in ihr liegender Kreisring. A ist mit B nicht homothetisch, weil zwar b), nicht aber a) erfüllt ist.

B sei ein Kreisring, A eine in ihm liegende Kreisscheibe. Sie sind nicht homothetisch, weil zwar a) nicht aber b) erfüllt ist.

B sei ein Kreisring, A ein in ihm liegender Kreisring, von dessen Randkreisen jeder in B homolog 0 ist. Weder a) noch b) sind erfüllt. Trotzdem sind die eindimensionalen Homologiegruppen von A und B einstufig isomorph.

In der ersten, nicht aber in der 0-ten Dimension homothetisch sind die beiden folgenden Mengen: B sei die Menge aller komplexen Zahlen z, für welche $|z| \leqq 8$, $|z-4| \geqq 1$, $|z+4| \geqq 1$ ist, A die Menge aller komplexen Zahlen z, für welche $2 \leqq |z-4| \leqq 3$ oder $2 \leqq |z+4| \leqq 3$ ist.

Fast unmittelbar einleuchtend ist, daß jede Menge mit sich selbst homothetisch ist und daß für $A \subseteqq B \subseteqq C$ A mit C homothetisch ist, sobald A mit B und B mit C homothetisch ist.

Nun gilt die folgende Verallgemeinerung von (1, 2):

(1, 21) $A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq A_3 \supseteqq \ldots$ *sei eine Folge von in sich kompakten Mengen, die unter einander in der n-ten Dimension homothetisch sind. Dann ist ihr Durchschnitt A mit jeder von ihnen homothetisch in der n-ten Dimension.*

Beweis:

a) Jede in A liegende Fundamentalfolge, von n-dimensionalen Zykeln ist entweder in allen oder in keinem A homolog 0. Aus (1, 1) folgt dann, daß sie in A dasselbe Homologieverhalten hat, wie in den A_i.

b) Es sei $\mathfrak{Z}_1 = \{Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, \ldots\}$ eine in A_1 liegende Fundamentalfolge von n-dimensionalen Zykeln. Es gibt dazu laut Voraussetzung für jedes i eine in A_i liegende Fundamentalfolge $\mathfrak{Z}_i = \{Z_{i1}, Z_{i2}, Z_{i3}, \ldots\}$, welche mit $\mathfrak{Z}_1$ in A_1 homolog ist. Es gibt ferner eine gegen 0 konvergente Folge positiver Zahlen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, derart daß jeder in A_i liegende Punkt einen Abstand $< \eta_i$ von A hat. Es läßt sich also jeder der Zykel Z_{ik} durch eine η_i-Abänderung in einen in A liegenden Zykel Z_{ik}^* überführen. Nun bestimmen wir für jedes i ein k_i so groß, daß $Z_{i,k_i} \sim \eta_i Z_{1,k_i}$ ist. Das geht, weil wegen $\mathfrak{Z}_i \sim \mathfrak{Z}_1$ in A_1 für jedes i $Z_{ik} \sim_{\varepsilon_{ik}} Z_{1k}$ ist mit $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_{ik} = 0$. Nun ist $Z_{i,k_i}^* \sim_{\eta_i} Z_{i,k_i}$ in A_1, also $Z_{i,k_i}^* \sim_{\eta_i} Z_{1,k_i}$ in A mit $\lim \eta_i = 0$. Weil $\mathfrak{Z}_1$ eine Fundamentalfolge ist, ist also auch $\mathfrak{Z}^* = \{Z_{1,k_1}^*, Z_{2,k_2}^*, \ldots\}$ eine Fundamentalfolge und zwar eine mit $\mathfrak{Z}_1$ in A_1 homologe. Da sie in A liegt, ist damit unser Beweis fertig.

Die Sätze (1, 1), (1, 2), (1, 21) bleiben wörtlich richtig, wenn man die Homologien nach einem Modul p, insbesondere dem Modul 2, nimmt oder wenn man unseren Begriff der Fundamentalfolge in der von S. Lefschetz[7]) angegebenen Weise abändert, vorausgesetzt, daß man in der Definition des Begriffes „homothetisch" dieselbe Bedeutung für „homolog" einsetzt, wie in (1, 21).

2.

Läßt man in den bewiesenen Sätzen die Voraussetzung der „Kompaktheit in sich" weg, dann werden sie, wie sehr einfache Beispiele zeigen, falsch. Auch sind für nicht in sich kompakte Mengen die Vielfachheit der Basis der Zyklose und die mit Hilfe der Fundamentalfolgen definierten Homologien keine topologischen Invarianten.

Verwendet man zur Definition der Homologien in einer Menge M „*Elemente*", d. s. stetige Bilder von geometrischen Simplexen, und aus Elementen aufgebaute Komplexe[8]), dann erhält man unter allen Umständen topologisch invariante Homologiegruppen. Allerdings scheinen sie für Mengen, welche nicht „locally connected" im Sinne J. W. Alexanders[9]) sind wenig Interesse zu verdienen.

Für die so definierten Homologieen gelten zu den in 1 behandelten Sätzen duale Sätze.

[7]) Annals of Math. 29 (1928), S. 232—254, und *Topology* (1930) S. 330 ff

[8]) Siehe etwa Lefschetz, Topology, S. 72 ff.

[9]) Vgl. Lefschetz, Topology, S. 90, 91.

Wieder erinnern wir der Vollständigkeit halber zunächst an zwei bekannte Sätze, welche in der Richtung der zu beweisenden liegen: „Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen". „Die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Gebieten ist ein Gebiet".

(2, 02) *Sind die Mengen* $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ *offen und ist die in sich kompakte Menge* A *Teil der Vereinigung aller* M, *dann gibt es ein* r, *sodaß* $A \subseteq M_r$ *ist.*

Denn die Mengen $A - M_i$ bilden eine absteigende Folge von in sich kompakten Mengen. Ihr Durchschnitt ist wegen $A \subseteq \Sigma M_i$ leer. Also gibt es ein r, sodaß $A - AM_r$ leer, d. h. $A \subseteq M_r$ ist.

(2, 1) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ *sei eine Folge von offenen Mengen. Ein in ihrer Vereinigung* M *liegender Zykel* C *ist dann und nur dann in* M *homolog* 0, *wenn er in fast allen* M_i *homolog* 0 *ist.*

Wegen $M_i \subseteq M$ bedarf das „dann" in dieser Behauptung keines Beweises. Nun sei $C \sim 0$ in M. Dann gibt es einen in M liegenden Komplex K, dessen Rand C ist. K ist in sich kompakt, liegt also nach (2, 02) in fast allen M. D. h. $C \sim 0$ in fast allen M.

Daraus folgt unmittelbar:

(2, 2) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ *sei eine Folge von offenen Mengen. In jeder sei die* n*-dimensionale Homologiegruppe leer. Dann ist auch die* n*-dimensionale Homologiegruppe der Vereinigung der* M_i *leer.*

Auch hier sollen zwei Mengen $A \subseteq B$ *in der* n*-ten Dimension homothetisch* heißen, wenn a) jeder in A liegende n-dimensionale Zykel (dann und) nur dann in B homolog 0 ist, wenn er in A homolog 0 ist, und wenn es b) zu jedem in B liegenden n-dimensionalen Zykel C einen mit C in B homologen in A liegenden n-dimensionalen Zykel gibt.

(2, 21) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ *seien lauter offene unter einander in der* n*-ten Dimension homothetische Mengen. Dann ist die Vereinigung der* M_i *mit jedem* M_i *homothetisch in der* n*-ten Dimension.*

Beweis:

a) C sei ein in M_1 liegender Zykel, der in M_1 nicht homolog 0 ist. Er liegt wegen $M_1 \subseteq M_i$ in allen M_i und ist laut Voraussetzung in keinem M_i homolog 0. Zufolge (2, 1) ist C nicht homolog 0 in ΣM_i.

b) C sei ein in $M = \Sigma M_i$ liegender n-dimensionaler Zykel. Er liegt nach (2, 02) schon in einem M_r. Weil M_r mit M_1 homothetisch ist, gibt es in M_1 einen Zykel C_1, der mit C in M_r homolog ist. Er liegt wegen $M_1 \subseteq M_i$ in allen M_i und ist mit C in allen M_i homolog.

3.

Der sehr interessante Beweis, den K. Borsuk l. c. von dem eingangs erwähnten Satz gibt, verwendet Hilfsmittel, welche über die im Satz selbst auftretenden Begriffe weit hinausgehen. Es erscheint daher nicht überflüssig, auch einen Beweis zu geben, der mit möglichst geringen begrifflichem Aufwand auskommt.

Dazu zeigen wir:

(3, 1) *Sind* A *und* B *Kontinua eines zusammenhängenden, im Kleinen zusammenhängenden metrischen Raumes* K, *dann gibt es zwei Kontinua* P *und* Q *in* K, *sodaß* $P + Q = K$, $A \subseteq P$, $B \subseteq Q$, $PQ(A + B) = AB$ *ist.*

Beweis: Zunächst gibt es zwei abgeschlossene Mengen M und N, sodaß $M + N = K$, $A \subseteq M$, $B \subseteq N$, $MN(A + B) = AB$ ist[10]. Man nehme etwa M als die Menge aller Punkte x, für welche $d(xA) \leqq d(xB)$ ist, N als die Menge aller x, für welche $d(xB) \leqq d(xA)$ ist. Die B enthaltende Komponente von N möge N_0 heißen; ferner setzen wir $M_0 = M + (N - N_0)$. Ist nun x ein Punkt, in dessen beliebig kleinen Umgebungen Punkte unendlich vieler Komponenten von N liegen, und U zufolge des Zusammenhangs im Kleinen von K eine zusammenhängende Umgebung von x, dann enthält U auch Punkte von $K - N \subseteq M$; d. h. dann ist x Häufungspunkt von M. Daraus schließen wir, daß M_0 abgeschlossen ist. Denn M_0 ist Vereinigung von M mit allen Komponenten außer N_0 von N. Alle diese Komponenten sind abgeschlossen und jeder Punkt, in dessen beliebig kleinen Umgebungen Punkte unendlich vieler von ihnen liegen, ist Punkt von M. Wenn M zusammenhängend ist, dann ist auch M_0 zusammenhängend, weil jede Komponente C von

[10]) Diese Behauptung ist äquivalent dem in der Dimensionstheorie oft verwendeten „allgemeinen Trennungssatz". Vgl. etwa P. Urysohn, Fund. Math. 8 (1926), S. 257–259; W. Hurewicz, Math. Ann. 98 (1927), S. 67, und Menger, Dimensionstheorie S. 31.

$N-N_0$ mit M Punkte gemein hat. Angenommen $MC \neq 0$. Dann ist $M+N_0+[(N-N_0)-C]=K-C$. Einerseits kann nun $K-C$ wegen des Zusammenhangs von K nicht abgeschlossen sein, andererseits zeigt man ganz wie oben von M_0, daß $M+N_0+$ $+[(N-N_0)-C]$ abgeschlossen sein müßte. Wenn also M zusammenhängend ist, dann können wir schon $P=M_0$, $Q=N_0$ setzen und es ist $PQ \subseteqq MN$. Ist M nicht zusammenhängend, dann führt nochmalige Anwendung des M_0, N_0 liefernden Verfahrens, indem man A mit B vertauscht und für M und N die Mengen N_0 und M_0 setzt, zu den behaupteten Mengen P und Q. Wieder ist $PQ \subset MN$.

Dieser Beweis zeigt über (3, 1) hinaus noch:

(3, 2) *Sind A und B Kontinua eines zusammenhängenden, im Kleinen zusammenhängenden metrischen Raumes K und sind M und N abgeschlossene Mengen, für welche $M+N=K$, $A \subseteqq M$, $B \subseteqq N$, $MN(A+B)=AB$ gilt, dann gibt es zwei Kontinua P und Q, sodaß $P+Q=K$, $A \subseteqq P$, $B \subseteqq Q$ und $PQ \subseteqq MN$ ist.*

Nun zum Beweis von (0, 1). $K_1 \supseteqq K_2 \supseteqq K_3 \supseteqq \ldots$ seien in sich kompakte henkellose im Kleinen zusammenhängende Kontinua. A und B seien Kontinua, deren Vereinigung der Durchschnitt K der K_n ist. Wir haben zu zeigen, daß AB ein Kontinuum ist.

Zunächst gibt es in K_1, das wir als Raum ansehen, zwei abgeschlossene Mengen M und N, für welche $M+N=K_1$, $A \subseteqq M$, $B \subseteqq N$, $MN(A+B)=AB$ ist. Nun gibt es in jedem K_n gemäß (3, 2) zwei Kontinua P_n und Q_n, sodaß $P_n+Q_n=K_n$, $A \subseteqq P_n$, $B \subseteqq Q_n$, $P_nQ_n \subseteqq MN$ gilt. Weil K_n henkellos ist und P_n, Q_n Kontinua sind, ist P_nQ_n ein Kontinuum. Ferner ist $\overline{\mathrm{Lim}}\inf\,(P_nQ_n) \supseteqq AB \neq 0$, also $D=\overline{\mathrm{Lim}}\sup\,(P_nQ_n)$ ein Kontinuum [11]). Es gilt $AB \subseteqq D \subseteqq$ $\subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}\, K_n = K = A+B$, $D \subseteqq MN$. Wegen $MN(A+B)=AB$ ist also $AB=D$, d. h. AB ein Kontinuum.

Man kann nun ähnlich wie die Henkellosigkeit definieren [12]):

Die in der $(n-1)$-ten Dimension einfache Menge M heißt *in der n-ten Dimension einfach*, wenn der Durchschnitt je zweier in ihr abgeschlossener in der $(n-1)$-ten Dimension einfacher Mengen A und B, deren Vereinigung M ist, in der $(n-1)$-ten Dimension einfach ist. *In der (-1)-ten Dimension einfach* heiße jede nicht leere Menge.

Dann sind die in der 0-ten Dimension einfachen Mengen gerade die zusammenhängenden Mengen, die in der 1-ten Dimension einfachen Mengen sind gerade die henkellosen Mengen.

Beim Punkt p lokal einfach in der n-ten Dimension nennen wir eine Menge M, wenn es in jeder Umgebung U von p eine in der n-ten Dimension einfache Umgebung von p gibt.

Es erhebt sich nun die Frage, in wie weit zu den in 1 und 2 bewiesenen Sätzen ähnliche Sätze über diese Begriffe gelten, z. B. in welchen Räumen etwa die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von offenen, zusammenhängenden, im Kleinen zusammenhängenden, henkellosen Mengen wieder henkellos ist.

Auch die zur Henkelzahl analogen Begriffe für die höheren Dimensionen liegen auf der Hand. Lediglich Homologiegruppen und damit vor allem Torsionszahlen scheinen sich auf diesem Wege nicht zu ergeben. Damit fallen auch die homothetische Beziehung und die von ihr handelnden Sätze (1, 21) und (2, 21) weg.

Innsbruck, 12 April 1932.

---

11) Hausdorff, Mengenlehre 1914, S. 236, 302.

12) Vgl. B. Knaster, Congrès Math. des Pays Slav. Warszawa 1929. S. 288.