Le système de ces courbes est *strictement transitif* au sens de la mesure.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à suivre le raisonnement du N° précédent, en tenant compte du fait que:

1) si un ensemble formé d'un certain nombre des demi-circonférences décrites au-dessus de l'axe des x est mesurable *superficiellement*, sa partie située sur l'axe des x est mesurable *linéairement*; de plus, si le deuxième ensemble est de mesure *linéaire* nulle, le premier est de mesure *superficielle* nulle;

2) la condition nécessaire et suffisante pour que deux points x et y de l'intervalle 01 appartiennent à une même courbe du système considéré est que, soit $x+y$, soit $x-y$, soit de la forme $\frac{k}{2^n}$ (k entier, n naturel);

3) X étant un sous-ensemble mesurable de l'intervalle 01 qui avec x contient chaque point de la forme $x+\frac{k}{2^n}$ (situé entre 0 et 1), X est de mesure 0 ou 1 [1]).

[1]) Voir, par ex. A. Łomnicki, C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie, 1918, p. 845.

Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Soit K un ensemble d'éléments quelconques, et soit F une famille donnée de sous-ensembles de K, jouissant de deux propriétés suivantes: 1) toute somme d'un nombre fini d'ensembles de F appartient à F, et 2) tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de F appartient à F.

Posons $Q^1=F$, désignons par P^1 la famille de tous les ensembles complémentaires par rapport à l'ensemble K aux ensembles de la famille F, et définissons pour les nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ les familles d'ensembles P^α et Q^α par l'induction transfinie comme il suit. P^α sera la famille de tous les ensembles qui sont des sommes d'infinités dénombrables d'ensembles appartenant aux familles Q antérieurement définies, et Q^α la famille des ensembles qui sont des produits d'infinités dénombrables d'ensembles appartenant aux familles P antérieurement définies [1]).

D'autre part, posons $L^0=F$ et définissons pour les nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ les familles d'ensembles L^α par l'induction transfinie comme il suit: L^α est la famille de tous les ensembles qui sont limites (univoques) de suites infinies d'ensembles appartenant aux familles L^ξ (ξ variable), où $\xi<\alpha$ [2]).

Le but de cette Note est d'étudier les relations entre les familles P^α, Q^α et L^α. Nous démontrerons notamment ce

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 307.

[2]) Cf Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales, Fonctions, Classes de Baire*, p. 37; cf. aussi N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 53.

Théorème: *On a les formules:*

(1) $$L^{2n} = Q^{2n+1} \text{ pour } n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

(2) $$L^{2n-1} = P^{2n} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

et

(3) $$L^{\alpha} = P^{\alpha+1} Q^{\alpha+1} \text{ pour } \omega \leqslant \alpha < \Omega.$$

Démonstration. D'après la définition des familles L^0 et Q^1, la formule (1) est vraie pour $n = 0$.

Nous prouverons maintenant que la formule (2) est vraie pour $n = 1$.

Comme on sait, la formule

(4) $$E = \lim_{n=\infty} E_n$$

est équivalente à l'ensemble des formules

(5) $$E = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + E_4 + \ldots)\ldots$$

et

(6) $$E = E_1E_2E_3\ldots + E_2E_3E_4\ldots + E_3E_4E_5\ldots + \ldots$$

Soit E un ensemble de la famille L^1: d'après la définition de cette famille, il existe une suite infinie E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles de la famille F, telle qu'on a la formule (4), donc aussi la formule (6). D'après la propriété 2) de la famille F et d'après la définition des familles Q^1 et P^2, on conclut de la formule (6) que l'ensemble E appartient à la famille P^2. On a ainsi $L^1 \subset P^2$.

Or, soit E un ensemble de la famille P^2. D'après la définition de cette famille, il existe une suite infinie H_n $(= 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles de la famille $Q^1 = F$, telle que

(7) $$E = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$$

Posons:

(8) $$E_n = H_1 + H_2 + \ldots + H_n, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après la propriété 1) de la Famille F, les ensembles (8) appartiennent encore à la famille F. Or, de (7) et (8) résulte, comme on sait, la formule (4): d'après la définition de la classe L^1 nous en concluons que l'ensemble E appartient à la famille L^1. On a donc

$P^2 \subset L^1$ et, puisque plus haut nous avons obtenu l'inclusion inverse, on a $L^1 = P^2$ et la formule (2) est vraie pour $n = 1$.

Soit maintenant k un nombre naturel, et supposons que la formule (1) et vraie pour $n = k - 1$ et que la formule (2) est vraie pour $n = k$.

Soit E un ensemble de la famille L^{2k}. D'après la définition de la famille L^{2k}, on a donc la formule (4), où E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille $L^0 + L^1 + \ldots + L^{2k-1}$. Or, de la définition des familles L^n résulte tout de suite que $L^0 + L^1 + \ldots + L^{2k-1} = L^{2k-1}$ et, la formule (2) étant, par l'hypothèse, vraie pour $n = k - 1$, on a $L^{2k-1} = P^{2k}$. Les ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartiennent donc à la famille P^{2k}. Or, d'après (4), on a la formule (5). De la définition de la famille P^{2k} résulte tout de suite qu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille P^{2k} est encore un ensemble de la famille P^{2k}. Les facteurs du produit infini (5) appartiennent donc tous à la famille P^{2k} et par suite, d'après (5) et d'après la définition de la famille Q^{2k+1}, on a $E \in Q^{2k+1}$. Nous avons ainsi $L^{2k} \subset Q^{2k+1}$.

Soit maintenant E un ensemble de la famille Q^{2k+1}. D'après la définition de cette famille on a donc la formule

(9) $$E = H_1H_2H_3\ldots,$$

où H_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille $P^1 + P^2 + \ldots + P^{2k}$. Or, il résulte tout de suite de la définition des familles P^{α}, qu'on a toujours $P^{\alpha} \subset P^{\beta}$, pour $\alpha < \beta$. On a donc $P^1 + P^2 + \ldots + P^{2k} = P^{2k}$ et $H_n \in P^{2k}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Posons

(10) $$E_n = H_1H_2\ldots H_n.$$

De la propriété 1) de la famille F et de la définition des familles P^{α} et Q^{α} résulte sans peine par l'induction transfinie qu'une somme d'un nombre fini d'ensembles de la famille Q^{α} appartient à Q^{α}, et qu'un produit d'un nombre fini d'ensembles de P^{α} appartient à P^{α} (pour $\alpha < \Omega$). On a donc, d'après $H_n \in P^{2k}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et d'après la formule (10): $E_n \in P^{2k}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. La formule (2) étant, par l'hypothèse, vraie pour $n = k$, on a donc

(11) $$E_n \in L^{2k-1}, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Or, de (9) et (10) résulte, comme on sait, la formule (4): d'après (11) et d'après la définition des familles L^{α}, on conclut donc que $E \in L^{2k}$.

Nous avons ainsi démontré que $Q^{2k+1} \subset L^{2k}$ et, puisque plus haut nous avons démontré l'inclusion inverse, on a $L^{2k} = Q^{2k+1}$, ce qui prouve que la formule (1) est encore vraie pour $n = k$.

Soit maintenant E un ensemble de la famille L^{2k+1}. On a donc la formule (4), où $E_n \in L^0 + L^1 + \ldots + L^{2k} = L^{2k}$, donc, la formule (1) étant vraie pour $n = k$, $E_n \in Q^{2k+1}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Or, d'après (4), on a la formule (6). De la définition de la famille Q^α résulte tout de suite qu'un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Q^α appartient à Q^α. Les termes de la série infinie (6) appartiennent donc à la famille Q^{2k+1} et parsuite, d'après (6) et d'après la définition de la famille P^{2k+1}, on a $E \in P^{2k+2}$. Nous avons ainsi $L^{2k+1} \subset P^{2k+2}$.

Soit maintenant E un ensemble de la famille P^{2k+2}. D'après la définition de cette famille on a donc la formule (7), où H_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des ensembles de la famille $Q^1 + Q^2 + \ldots + Q^{2k+1} = Q^{2k+1}$. Définissons les ensembles E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) par la formule (8). Une somme d'un nombre fini d'ensembles de la famille Q^{2k+1} appartenant à Q^{2k+1}, on a donc $E_n \in Q^{2k+1}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc, la formule (1) étant vraie pour $n = k$:

(12) $$E_n \in L^{2k}, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Or, de (7) et (8) résulte la formule (4): d'après (12) et d'après la définition des familles E^α, on conclut donc que $E \in L^{2k+1}$.

Nous avons ainsi démontré que $P^{2k+2} \subset L^{2k+1}$ et, puisque plus haut nous avons démontré l'inclusion inverse, on a $L^{2k+1} = P^{2k+2}$. La formule (2) est donc vraie pour $n = k + 1$.

Nous avons ainsi démontré que si la formule (1) et vraie pour $n = k - 1$ et la formule (2) pour $n = k$, la formule (1) est encore vraie pour $n = k$ et la formule (2) pour $n = k + 1$. La formule (1) étant, comme nous savons, vraie pour $n = 0$ et la formule (2) pour $n = 1$, il en résulte, par l'induction, que les formules (1) et (2) sont vraies pour tous les nombres naturels n.

Nous allons maintenant démontrer la formule (3). A ce but nous démontrerons d'abord ce

Lemme[1]). *Si E, E_n^m et H_n^m ($m, n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des ensembles quelconques, tels que*

[1]) Cf. ma Note du 22 juin 1931 dans les C. R., t. 192, p. 1626.

(13) $$E_n^m \supset E_{n+1}^m \text{ pour } m \text{ et } n \text{ naturels},$$

(14) $$H_n^m \subset H_{n+1}^m \text{ pour } m \text{ et } n \text{ naturels},$$

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^m \supset \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{m+1}, \text{ pour } m = 1, 2, 3, \ldots,$$

(16) $$E = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} E_n^m,$$

et

(17) $$E = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^m,$$

on a

(18) $$\lim_{n=\infty} (E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \ldots + E_n^n H_n^n) = E.$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons

(19) $$Q_n = E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \ldots E_n^n H_n^n.$$

Pour démontrer la formule (18), il suffit évidemment de prouver que: 1° si $p \in E$, on a pour les indices n suffisamment grands $p \in Q_n$, et 2°: si p non $\in E$, on a pour les indices n suffisamment grands p non $\in Q_n$,

1°. Soit $p \in E$. D'après (16), il existe un indice q, tel que

(20) $$p \in E_n^q, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Or, d'après (17), il existe pour tout nombre naturel m un indice k_m, tel que
$$p \in H_{k_m}^m, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$
donc, d'après (14):

(21) $$p \in H_n^m, \quad \text{pour} \quad n \geqslant k_m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

D'après (20) et (21), on a
$$p \in E_n^q H_n^q \quad \text{pour} \quad n \geqslant k_q,$$
donc, d'après (19):
$$p \in Q_n, \quad \text{pour} \quad n \geqslant q + k_q.$$

2°. Soit p non $\in E$. D'après (17) et (15) il existe donc un indice q, tel que

(22) $\qquad p \text{ non} \in H_n^m, \quad \text{pour} \quad m \geqslant q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$

Or, d'après (16) il existe pour tout m naturel un indice k_m, tel que

$$p \text{ non} \in E_{k_m}^m, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

donc, d'après (13):

(23) $\qquad p \text{ non} \in E_n^m \quad \text{pour} \quad n \geqslant k_m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$

Soit r un indice $> k_1, k_2, \ldots, k_q$: d'après (23) nous aurons donc

$$p \text{ non} \in E_n^m \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, q; \quad n \geqslant r,$$

donc, d'après (22)

$$p \text{ non} \in E_n^m H_n^m, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n \geqslant r$$

ce qui donne, d'après (18):

$$p \text{ non} \in Q_n \quad \text{pour} \quad n \geqslant r.$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Nous allons maintenant à démontrer la formule (3) pour $\alpha = \omega$.

Soit E un ensemble de la classe L^ω. Il existe donc une suite infinie E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que E_n et un ensemble appartenant à la famille L^{k_n}, où k_n est un nombre naturel, et qu'on a la formule (4), donc aussi les formules (5) et (6). Or, il résulte tout de suite de la définition des familles P^α et Q^α que $P^\alpha \subset Q^{\alpha+1}$ et $Q^\alpha \subset P^{\alpha+1}$ (pour $\alpha < \Omega$): d'après (1) et (2) on a donc $L^{2n} = Q^{2n+1}$ et $L^{2n} \subset P^{2n+2}$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, et $L^{2n-1} = P^{2n}$ et $L^{2n-1} \subset Q^{2n+1}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. D'après la définition des familles P^ω et Q^ω il résulte donc que les facteurs du produit (5) sont des ensembles de la famille P^ω et que les termes de la somme (6) sont des ensembles de la famille Q^ω. D'après (5) E appartient donc à la famille $Q^{\omega+1}$ et, d'après (6) — à la famille $P^{\omega+1}$. On a ainsi

(24) $$L^\omega \subset P^{\omega+1} Q^{\omega+1}.$$

Soit maintenant E un ensemble, tel que $E \in P^{\omega+1} Q^{\omega+1}$. Il en résulte tout de suite, d'après la définition des familles P^α et Q^α, qu'il existe deux suites doubles d'ensembles, E_n^m et H_n^m $(m = 1, 2, \ldots;$ $n = 1, 2, \ldots)$, telles que

(25) $\qquad E_n^m \in P^1 + P^2 + P^3 + \ldots, \quad \text{pour } m \text{ et } n \text{ naturels},$

et

(26) $\qquad H_n^m \in Q^1 + Q^2 + Q^3 + \ldots, \quad \text{pour } m \text{ et } n \text{ naturels},$

et qu'on a les formules (16) et (17).

De la définition des familles P^α et Q^α résulte sans peine (par l'induction transfinie) qu'un produit d'un nombre fini d'ensembles de P^α est un ensemble de P^α et qu'une somme d'un nombre fini d'ensembles de Q^α est un ensemble de Q^α (pour $\alpha < \Omega$). Il en résulte, comme on voit sans peine, que nous pouvons supposer que les ensembles E_n^m et H_n^m satisfont aux inclusions (13), (14) et (15).

On a donc les formules (13) — (17) qui donnent, d'après notre lemme, la formule (18).

Or, d'après (25), (26), (19) et les propriétés des ensembles P^α et Q^α, on conclut sans peine que

$$Q_n \in P^2 + P^4 + P^6 + \ldots, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (2): $Q_n \in L^1 + L^3 + L^5 + \ldots$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, d'où résulte, d'après (19) et (18), que $E \in L^\omega$. On a donc $P^{\omega+1} Q^{\omega+1} \subset L^\omega$, et la formule (24) donne

$$L^\omega = P^{\omega+1} Q^{\omega+1},$$

ce qui prouve que la formule (3) est vraie pour $\alpha = \omega$.

Soit maintenant β un nombre ordinal $> \omega$ et $< \Omega$ et supposons que la formule (3) est vraie pour $\omega \leqslant \alpha < \beta$.

Soit E un ensemble de la famille L^β. On a donc la formule (4), où $E_n \in L^{\alpha_n}$ et $\alpha_n < \beta$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et, d'après $\beta > \omega$ (et $L_n \subset L^\omega$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) nous pouvons supposer que $\alpha_n \geqslant \omega$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. La formule (3) étant, par l'hypothèse, vraie pour $\omega \leqslant \alpha < \beta$, nous avons donc $L^{\alpha_n} = P^{\alpha_n+1} Q^{\alpha_n+1}$, donc $E_n \in P^{\alpha_n+1}$ et $E_n \in Q^{\alpha_n+1}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Or, de (4) résultent, comme nous savons, les formules (5) et (6).

D'après $\alpha_n < \beta$, nous avons $\alpha_n + 1 \leqslant \beta$, donc, d'après $E_n \in P^{\alpha_n+1}$, $E_n \in P^\beta$ et, d'après $E_n \in Q^{\alpha_n+1}$, $E_n \in Q^\beta$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Les facteurs du produit (5) sont donc des ensembles de la famille P^β et les termes de la série (6) sont des ensembles de la famille Q^β. Il en résulte, d'après (5) et (6), que $E \in P^{\beta+1} Q^{\beta+1}$. Nous avons ainsi démontré que

(27) $$L^\beta \subset P^{\beta+1} Q^{\beta+1}.$$

Soit maintenant E un ensemble, tel que $E \in P^{\beta+1} Q^{\beta+1}$. Tout à fait comme plus haut pour $\beta = \omega$, nous concluons qu'il existe deux suites doubles d'ensembles E_n^m et H_n^m telles que $E_n^m \epsilon P^{\xi_{m,n}}$, $H_n^m \epsilon Q^{\eta_{m,n}}$, où $\omega \leqslant \xi_{m,n} < \beta$, $\omega \leqslant \eta_{m,n} < \beta$, et qu'on a les formules (13), (14), (15), (16) et (17). Distinguons maintenant deux cas.

1) β est un nombre ordinal de première espèce, soit $\beta = \alpha + 1$. D'après $\omega \leqslant \xi_{m,n} < \beta$ et $\omega \leqslant \eta_{m,n} < \beta$ nous avons $\omega \leqslant \xi_{m,n} \leqslant \alpha$ et $\omega \leqslant \eta_{m,n} \leqslant \alpha$, donc $P^{\xi_{m,n}} \subset P^\alpha \subset P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$ et $Q^{\eta_{m,n}} \subset Q^\alpha \subset \subset P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$, ce qui donne $E_n^m \epsilon P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$ et $H_n^m \epsilon P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$, pour m et n naturels, d'où résulte tout de suite que les ensembles (19) appartiennent encore (pour $n = 1, 2, \ldots$) à la famille $P^{\alpha+1}Q^{\alpha+1}$, donc (la formule (3) étant, par l'hypothèse, vraie pour $\omega \leqslant \alpha < \beta$), à la famille L^α. Or, d'après notre lemme, de (13)—(17) résulte la formule (18). De (19), (18) et $\alpha < \beta$ résulte donc que $E \epsilon L^\beta$.

2) β est un nombre ordinal de seconde espèce. Désignons par ζ_n le plus grand des nombres $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{n,n}, \eta_{1,n}, \eta_{2,n}, \ldots, \eta_{n,n}$: de $\xi_{m,n} < \beta$ et $\eta_{m,n} < \beta$ (pour m et n naturels) résulte que $\zeta_n < \beta$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Or, d'après la définition du nombre ζ_n nous avons $P^{\xi_{m,n}} \subset P^{\zeta_n} \subset P^{\zeta_n+1}Q^{\zeta_n+1}$ et $Q^{\eta_{m,n}} \subset Q^{\zeta_n} \subset P^{\zeta_n+1}Q^{\zeta_n+1}$, pour $m = 1, 2, \ldots, n$, d'où résulte, d'après (19), que $Q_n \epsilon P^{\zeta_n+1}Q^{\zeta_n+1}$, donc, d'après $\zeta_n + 1 < \beta$ (puisque $\zeta_n < \beta$ et β est de seconde espèce), la formule (3) étant vraie pour $\omega \leqslant \alpha < \beta$: $Q_n \epsilon L^{\zeta_n}$, ce qui prouve, d'après (19), (18) et $\zeta_n < \beta$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, que $E \epsilon L^\beta$.

Nous avons ainsi démontré que

$$P^{\beta+1}Q^{\beta+1} \subset L^\beta,$$

ce qui donne, d'après (27), l'égalité $L^\beta = P^{\beta+1}Q^{\beta+1}$.

Notre théorème est ainsi démontré par l'induction transfinie.

Über den höheren Zusammenhang von Vereinigungsmengen und Durchschnitten.

Von

L. Vietoris (Innsbruck).

K. Borsuk hat in seiner Abhandlung „Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents“ [1]) neben vielen anderen Ergebnissen folgenden Satz bewiesen:

(0, 1) *Der Durchschnitt einer absteigenden Folge von im Kleinen zusammenhängenden, henkellosen, kompakten Kontinuen ist ein henkelloses kompaktes Kontinuum.*

Eine zusammenhängende Menge M heißt dabei *henkellos* [2]) oder *unicohérent* [3]), wenn der Durchschnitt je zweier zusammenhängender in M abgeschlossener Mengen, deren Vereinigung M ist, zusammenhängend ist.

Borsuk zeigt zugleich an einen einfachen Beispiel, daß der Satz nicht richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung des Zusammenhangs im Kleinen wegläßt.

Im Folgenden sollen einige mit diesem Satz in enger Beziehung stehende Sätze abgeleitet werden.

1.

Hier verallgemeinern wir die folgenden bekannten Sätze auf höhere Dimensionen: „Der Durchschnitt einer absteigenden Folge

[1]) Fund. Math. XVII, (1931), S. 171—209, S. 208, 50.

[2]) Vgl. meine Abhandlung „Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche“. Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 443—453, S. 445.

[3]) Fund. Math. XIII, (1929), S. 307.