Sur un problème topologique concernant les systèmes »strictement transitifs« [1].

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Dans des ouvrages récents sur l'hypothèse quasi-ergodique de la mécanique statistique M. G. D. Birkhoff [2]) considère la notion de système „strictement transitif" (strongly transitive), en appelant ainsi un système de courbes tel que chaque ensemble mesurable provenant de la réunion de certaines parmi elles est, soit lui-même de mesure 0, soit son complémentaire est de mesure 0.

Il est remarquable que dans la théorie des continus indécomposables on est conduit à considérer une notion parfaitement analogue à celle des systèmes strictement transitifs (ce seront des systèmes strictement transitifs „au sens de la catégorie" les systèmes de M. Birkhoff étant strictement transitifs „au sens de la mesure"). Plus encore, par une simple modification du continu indécomposable $\mathfrak{B}_0$, étudié dans la suite (on pourrait d'ailleurs se servir de nombreux autres exemples), on parvient à un système strictement transitif au sens de la mesure. Ceci est d'autant plus remarquable que les continus indécomposables n'ont été inventés que pour construire des exemples le plus singuliers [3]); cependant, on retrouve dans leur structure une régularité rappelant les courbes définies par un mouvement d'un système mécanique [4]).

[1]) Partiellement présenté à la Soc. Pol. de Math. le 12. II. 32 à Lwów et au II-ème Congrès des math. Roumains à Turnu-Severin le 6. V. 32.

[2]) Proc. Nat. Acad. of Sciences 17 (Dec. 1931), pp. 650 et 656.

[3]) Notamment, par M. Brouwer pour mettre en défaut une hypothèse de M. Schönflies, v. Math. Ann. 68, 1910. Cf. aussi A. Denjoy C. R. Paris, t. 151 (1910) et K. Yoneyama, Tohoku Math. Journ. 1917, p. 60.

[4]) La transitivité stricte d'un système correspond à une certaine homogénéité des sous-systèmes: comme l'a remarqué M. Lusin, un ensemble mesurable ne peut être homogène au point de vue de la mesure que lorsque, soit cet ensemble, soit son complémentaire est de mesure 0 (puisque un ensemble de mesure positive contient un point de densité). Des remarques analogues s'appliquent à la transitivité stricte au sens de la catégorie.

1. *Une propriété de l'ensemble parfait non-dense de Cantor.* Soit C l'ensemble de Cantor (composé des nombres de l'intervalle 01 qui peuvent être développés dans le système de numération tryadique sans l'emploi du chiffre 1). Soit X un sous-ensemble de C jouissant de la propriété suivante:

(°) *si x et y appartiennent à C et si la différence $x-y$ est de la forme $\frac{k}{3^n}$ (k entier, n naturel), la condition $x \in X$ entraîne $y \in X$.*

Dans ces hypothèses, *si X est en un point de I-re catégorie relativement à C* [1]), *X est tout entier de I-re catégorie (rel. à C).*

En effet, il existe par hypothèse un intervalle ouvert $I = \left(\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right)$ tel que $IC \neq 0$ et IX est de I-re catégorie (toujours relativement à C). Or, J étant un intervalle arbitraire de la forme $\left(\frac{j-1}{3^n}, \frac{j}{3^n}\right)$ tel que $JC \neq 0$, une translation $\left(\text{égale à } \frac{j-i}{3^n}\right)$ transforme CI en CJ; en même temps, XI se transforme (d'après (°)) en XJ, qui est, par conséquent, de I-re catégorie. Ainsi, X est en chaque point de I-re catégorie; donc X est un ensemble de I-re catégorie, c. q. f. d.

On en conclut que la famille d'ensembles satisfaisant à la condition (°) est *strictement transitive au sens de la catégorie*, en entendant par cela que chaque ensemble jouissant de la propriété de Baire (rel. à C) [2]) et provenant de la réunion de certains parmi ces ensembles est, soit lui-même de I-re catégorie, soit son complémentaire en est un.

Car la somme d'ensembles ayant la propriété (°) en jouit également.

2. *Continu indécomposable $\mathfrak{B}_0$.* On appelle indécomposable tout continu qui ne se laisse pas décomposer en deux continus différents de lui. L'exemple le plus simple de continu indécomposable s'obtient de la façon suivante.

[1]) Ensemble de I-re catégorie = somme d'une série d'ensembles non-denses. X est de I-re cat. au point p, s'il existe un entourage E de p tel que EX est de I-re cat.

[2]) = ensemble tel que, dans chaque ensemble ouvert, il existe un point où, soit cet ensemble, soit son complémentaire, est de I-re catégorie.

On décrit du point $1/2$ comme centre par chaque point de l'ensemble C de Cantor une demi-circonférence au-dessus de l'axe des x. Soit D_0 la somme de toutes ces demi-circonférences. Soit $D_n (n \geqslant 1)$ la somme des demi-circonférences décrites du point $\frac{5}{2\cdot 3^n}$ au-dessous de l'axe des x par tous les points de l'ensemble C contenus dans l'intervalle $\left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right)$. On pose $\mathscr{B}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n$ [1]).

On appelle *composant* du point p d'un continu indécomposable K l'ensemble de tous les points qui se laissent unir à p par un vrai sous-continu de K. (Le composant du point 0 du continu $\mathscr{B}_0$ se compose d'une suite infinie de demi circonférences. Sur la fig. 1 on voit, outre ce composant, aussi le composant du point $1/4$, formé d'une suite doublement infinie de demi-circonférences).

Nous allons démontrer à présent que *le système des composants du continu $\mathscr{B}_0$ est strictement transitif au sens de la catégorie*, c. à d. que S étant un ensemble à propriété de Baire (rel. à $\mathscr{B}_0$) et formé par la réunion d'un certain nombre de composants, soit S, soit $\mathscr{B}_0 - S$ est de I-re catégorie (rel. à $\mathscr{B}_0$).

Démonstration. Désignons par G_0 la partie de l'ensemble C située dans l'intervalle $(0, 1/3)$ et, en général, par G_n celle située dans l'intervalle $\left(\frac{2}{3^n}, \frac{7}{3^{n+1}}\right)$. On voit aussitôt que l'ensemble D_n est homéomorphe au produit combinatoire de G_n par un intervalle (c. à d. à l'ensemble qui s'obtient en élévant de chaque point de G_n un segment vertical de même longueur). Dans cette homéomorphie l'ensemble $S \cdot D_n$ vient correspondre au produit de $S \cdot G_n$ par l'intervalle. Or, $S \cdot D_0$ jouissant de la propriété de Baire (rel. à D_0), il en résulte que $S \cdot G_0$ en jouit également (rel. à G_0, donc à C) [2]). L'ensemble $SC - G_0$ lui étant symétrique (rel. au point $\frac{1}{2}$), il en résulte aussitôt que SC jouit de la propriété de Baire rel. à C.

D'autre part, on prouve facilement que, pour que deux points x et y de C appartiennent à un même composant de $\mathscr{B}_0$, il faut et il suffit que, soit $x + y$, soit $x - y$, soit de la forme $\frac{k}{3^n}$ Donc, d'après la propriété du continu C, établie au N1, soit SC, soit $C - S$, est de I-re cat. rel. à C. Si c'est le premier cas qui a lieu, chacun des ensembles $S \cdot G_n$ est de I-re cat. rel. à G_n, donc [1]) $S \cdot D_n$ est de I-re cat. dans D_n, donc dans $\mathscr{B}_0$. Ainsi, dans ce cas S est de I-re cat. dans $\mathscr{B}_0$; dans le cas contraire, un raisonnement analogue prouve que $\mathscr{B}_0 - S$ est de I-re cat.

La transitivité stricte (au sens de catégorie) du système des composants du continu $\mathscr{B}_0$ est ainsi établie. Le problème, si cette propriété appartient à *chaque* continu indécomposable reste ouvert.

[1]) Cette définition est due à M. Knaster. Elle a l'avantage d'avoir des propriétés numériques bien simples, qui interviennent dans nos raisonnements. V. ma note de Fund. Math. 3, p. 209, ainsi que la note de M. Knaster et moi de Fund. Math. 5, p. 40, où l'on trouvera une démonstration du fait que $\mathscr{B}_0$ est indécomposable.

[2]) D'après un théorème général sur les produits combinatoires. V. la note de M. Ulam et moi, ce volume, p. 251 cor. 2.

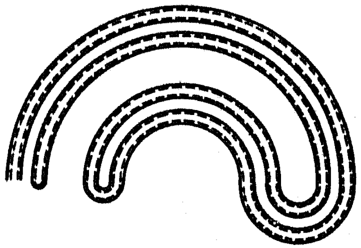

Fig. 1.

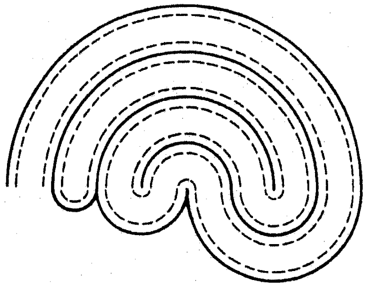

Fig. 2.

3. *Système strictement transitif au sens de la mesure.*

La construction est tout à fait analogue à celle de $\mathscr{B}_0$. On décrit du point $1/2$ comme centre une demi-circonférence par chaque point de l'intervalle 01 au-dessus de l'axe des x. On décrit du point $\frac{3}{2^{n+1}}$ une demi-circonférence par chaque point de l'intervalle $(2^{-n}, 2^{-n+1})$ au-dessous de l'axe des x.

Considérons les courbes (non-fermées) formées par des suites infinie (si possible: doublement infinies) de ces demi-circonférences. (On voit sur la fig. 2 deux courbes de ce genre: une qui sort du point 0 et l'autre, doublement infinie, qui passe par le point $1/3$) [2]).

[1]) Ibid. N 3, cor. 2.

[2]) L'ensemble constitué par toutes ces courbes, sauf la courbe du point 0, est homéomorphe au continu $\mathscr{B}_0$ diminué du composant du point 0.

Le système de ces courbes est *strictement transitif* au sens de la mesure.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à suivre le raisonnement du N° précédent, en tenant compte du fait que:

1) si un ensemble formé d'un certain nombre des demi-circonférences décrites au-dessus de l'axe des x est mesurable *superficiellement*, sa partie située sur l'axe des x est mesurable *linéairement*; de plus, si le deuxième ensemble est de mesure *linéaire* nulle, le premier est de mesure *superficielle* nulle;

2) la condition nécessaire et suffisante pour que deux points x et y de l'intervalle 01 appartiennent à une même courbe du système considéré est que, soit $x+y$, soit $x-y$, soit de la forme $\frac{k}{2^n}$ (k entier, n naturel);

3) X étant un sous-ensemble mesurable de l'intervalle 01 qui avec x contient chaque point de la forme $x+\frac{k}{2^n}$ (situé entre 0 et 1), X est de mesure 0 ou 1 [1]).

[1]) Voir, par ex. A. Łomnicki, C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie, 1918, p. 845.

Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Soit K un ensemble d'éléments quelconques, et soit F une famille donnée de sous-ensembles de K, jouissant de deux propriétés suivantes: 1) toute somme d'un nombre fini d'ensembles de F appartient à F, et 2) tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de F appartient à F.

Posons $Q^1 = F$, désignons par P^1 la famille de tous les ensembles complémentaires par rapport à l'ensemble K aux ensembles de la famille F, et définissons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ les familles d'ensembles P^α et Q^α par l'induction transfinie comme il suit. P^α sera la famille de tous les ensembles qui sont des sommes d'infinités dénombrables d'ensembles appartenant aux familles Q antérieurement définies, et Q^α la famille des ensembles qui sont des produits d'infinités dénombrables d'ensembles appartenant aux familles P antérieurement définies [1]).

D'autre part, posons $L^0 = F$ et définissons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ les familles d'ensembles L^α par l'induction transfinie comme il suit: L^α est la famille de tous les ensembles qui sont limites (univoques) de suites infinies d'ensembles appartenant aux familles L^ξ (ξ variable), où $\xi < \alpha$ [2]).

Le but de cette Note est d'étudier les relations entre les familles P^α, Q^α et L^α. Nous démontrerons notamment ce

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 307.

[2]) Cf Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales, Fonctions, Classes de Baire*, p. 37; cf. aussi N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 53.