$(u_2)$ Supposons déterminé $B(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de manière que: $B(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathfrak{W}(R, \sigma_2)$ alors $B(a_1, \ldots, a_k, 0)$ et $B(a_1, \ldots, a_k, 1)$ satisfont aux conditions: $B(a_1, .., a_k, 0) + B(a_1, \ldots, a_k, 1) \subset B(a_1, a_2, \ldots, a_k)$; $B(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$; $B(a_1, a_2, \ldots, a_k, 1) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$ enfin: $\dim B(a_1, .. , a_k. 0) \times B(a_1, \ldots, a_k, 1) \leqq n-2$. D'après (V) un tel couple d'ensembles existe.

Soit maintenant $s = (a_1 a_2 \ldots)$ une suite dyadique infinie. Posons:

$$H(s) = \prod_{k=1}^{\infty} B(a_1 a_2 \ldots a_k). \tag{4}$$

D'après $(u_1)$, $(u_2)$, (II) on aura $H(s) \in \mathfrak{B}(R)$; d'autre part, on a pour tout $k$ naturel $B(a_1 a_2 \ldots a_k) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, par conséquent $B(a_1 a_2 \ldots a_k)$ possède un composant dimensionnel $Q$ tel que $d_n(Q) \geqq \sigma$, donc à fortiori $d_n(B(a_1 a_2 .. a_k)) \geqq \sigma$ et il vient, d'après un théorème de Urysohn[7]): $\dim H(s) = n$; donc $H(s)$ contient un composant dimensionnel $P(s)$[8]). D'après $H(s) \in \mathfrak{B}(R)$, $\dim H(s) = n$ et (I) on aura $P(s) \in \mathfrak{A}(R)$, Soient maintenant: $s_1 = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \ldots)$ et $s_2 = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \ldots)$ deux suites dyadiques différentes; soit $j$ le premier entier tel que $a_j^{(2)} \neq a_j^{(2)}$. On aura d'après $(u_1)$, $(u_2)$:

$$\begin{aligned} P(s_1) \times P(s_2) \subset B(a_1^{(1)} .. a_j^{(1)}) \times B(a_1^{(2)} \ldots a_j^{(2)}) = \\ = B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, a_j^{(1)}) \times B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, a_j^{(2)}) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dim P(s_1) \times P(s_2) \leqq \dim B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, 0) \times B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, 1) \leqq n-2. \tag{6}$$

Donc $P(s_1) \neq P(s_2)$. A toute suite dyadique correspond ainsi un élément de $\mathfrak{A}(R)$ et à deux suites différentes correspondent deux éléments différents. Donc la puissance de $\mathfrak{A}(R)$ est celle du continu c. q. f. d.

Remarquons que l'extension de notre théorème au cas de la dimension mod $m$ serait immédiate, si l'on savait définir pour la dimension mod $m$ des constantes analogues aux constantes d'Urysohn.

7) Urysohn. Fund. Math. VIII p. 354–355.
8) Tumarkin, l. c.

# Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire.

Par

C. Kuratowski et St. Ulam (Lwów).

**1.** $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques, on appelle produit combinatoire $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ l'ensemble des paires $(x, y)$ où $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$ et où la distance de deux points $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ est définie par la formule

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2},$$

$|x_1 - x_2|$ et $|y_1 - y_2|$ désignant la distance dans les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ resp.

En vertu de cette définition l'espace $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est métrique; de plus, la condition $z = \lim z_n$ veut dire que $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$. Par analogie à la géométrie analytique nous appellerons $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ les „axes" de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $x$ et $y$ les coordonnées (l'abscisse et l'ordonnée) du point $(x, y)$.

La notion de projection d'un ensemble situé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ s'introduit alors d'elle même.

**2.** Dans beaucoup de cas, les propriétés topologiques du produit $A \times B$ se laissent déterminer par celles des facteurs $A$ et $B$. Ainsi, par exemple, on prouve sans aucune difficulté, que pour que $A \times B$ soit respectivement: *fermé*, *ouvert* (en général *de classe borelienne* $\alpha$), *dense*, *compact*, *complet*, *séparable*, *connexe*[1]), *localement connexe*, il faut et il suffit que $A$ *et* $B$ le soient également. Pour que $A \times B$ soit respectivement un *ensemble frontière*, *non-dense*, *dense-en-soi*, il faut et il suffit que $A$ *ou* $B$ le soit.

1) Voir, par ex., v. Dantzig, Fund. Math. XV (§ 5).

Complétons d'abord cette liste par l'énoncé suivant: pour que $A \times B$ soit *clairsemé* (c.-à-d. ne contienne aucun ensemble dense-en-soi), il faut et il suffit que $A$ et $B$ le soient [1]).

Pour démontrer cet énoncé, il suffit évidemment de prouver que, *$Z$ étant un ensemble dense-en-soi (non-vide) situé dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, une de ses projections, soit sur l'axe $\mathcal{X}$, soit sur l'axe $\mathcal{Y}$, contient un sous-ensemble dense-en-soi (non-vide).*

Or, désignons ces deux projections par $A^*$ et $B^*$ resp. Tout se réduit à démontrer que, $a$ étant un point isolé de $A^*$, l'ensemble $Z^a$, composé des points de $Z$ à abscisse $a$, est dense-en-soi.

Soit $(a, b) \in Z^a$. L'ensemble $Z$ étant dense-en-soi, on a $(a, b) = \lim (a_n, b_n)$, où $(a_n, b_n)$ est une suite de points extraits de $Z$ et distincts de $(a, b)$. Il vient $a = \lim a_n$ et, $a$ étant un point isolé de $A^*$, on a, pour $n$ suffisamment grand, $a_n = a$, donc $(a_n, b_n) \in Z^a$, ce qui prouve que $(a, b)$ est un point d'accumulation de $Z^a$, c. q. f. d.

Dans la suite nous allons étudier, du point de vue du produit combinatoire, les notions d'ensemble *de première catégorie* (= somme d'une suite d'ensembles non-denses) et *de la propriété de Baire* (= somme d'un ensemble de I-re catégorie et d'un ensemble $G_\delta$).

**3.** Nous allons supposer dorénavant que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux espaces métriques, dont le deuxième est *séparable.*

**Théorème 1.** *$C$ étant un sous-ensemble non-dense du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, l'ensemble $C \cdot (x \times \mathcal{Y})$ est non-dense relativement à $(x \times \mathcal{Y})$, abstraction faite d'un ensemble des $x$ de première catégorie* [2]) (*d'une façon moins précise, mais plus intuitive: un ensemble qui est superficiellement non-dense est linéairement non-dense sur „presque toute" droite parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$*).

D é m o n s t r a t i o n. L'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable, il existe une suite d'ensembles ouverts $R_1, \ldots, R_n, \ldots$ (non-vides), tels que tout sous-ensemble ouvert de $\mathcal{Y}$ s'obtient par la réunion de certains de

[1]) En cas de produit d é n o m b r a b l e (pour la définition, v. p. ex. Fund. Math. XVII, p. 265) cet énoncé est en défaut: le produit dénombrable des espaces tous identiques à la suite $(0, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$ est dense-en-soi.

[2]) L'hypothèse que $\mathcal{Y}$ est séparable est essentielle. Supposons, en effet, que $\mathcal{X}$ désigne l'intervalle $(0, 1)$, $\mathcal{Y}$ soit un espace isolé de la puissance du continu, et que la fonction $y = f(x)$ établisse une correspondance biunivoque entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. L'image de cette fonction est, pour tout $x$, linéairement ouverte et superficiellement non-dense.



termes de cette suite. Soit $E_n$ l'ensemble des $x$ tels que $(x \times R_n) \subset \overline{C \cdot Y^x}$, $Y^x$ désignant l'ensemble $(x \times \mathcal{Y})$. Il vient $E_n \times R_n \subset \overline{C \cdot Y^x}$.

L'ensemble $E_n$ est non-dense. Supposons, en effet, que l'ensemble ouvert $G$ soit contenu dans $\overline{E_n}$. On aurait alors

$$G \times R_n \subset \overline{E_n} \times R_n \subset \overline{E_n \times R_n} \subset \overline{C \cdot Y^x} \subset \overline{C}.$$

Ainsi l'ensemble $C$, comme dense dans l'ensemble ouvert $G \times R_n$, ne serait pas un ensemble non-dense, contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, l'ensemble $P = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est de première catégorie.

Reste à prouver que si $x$ n'appartient pas à $P$ l'ensemble $C \cdot Y^x$ est non-dense relativement à $Y^x$. Or, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un ensemble $R_n$ tel que $x \times R_n \subset \overline{C \cdot Y^x}$; mais alors $x$ appartiendrait à $E_n$ donc à $P$.

**Corollaire 1.** *$C$ étant un ensemble de première catégorie situé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ l'ensemble $C \cdot Y^x$ est de première catégorie relativement à $Y^x$, abstraction faite d'un ensemble des $x$ de première catégorie.*

Soit, en effet, $C = \sum C_n$, $C_n$ non-dense. Soit (en vertu du théorème précédent) $P_n$ un ensemble de première catégorie tel que pour $x$ n'appartenant pas à $P_n$ l'ensemble $C_n \cdot Y^x$ est non-dense dans $Y^x$. Or, si $x$ n'appartient à aucun des $P_n$ (dont la somme est évidemment de première catégorie), chacun des ensembles $C_n \cdot Y^x$ est non-dense dans $Y^x$; donc $C \cdot Y^x$, étant leur somme, est de première catégorie dans $Y^x$.

**Corollaire 2.** *Pour que le produit $C = A \times B$ soit de première catégorie, il faut et il suffit qu'un des ensembles $A$ ou $B$ le soit.*

En effet, si $A$ n'est pas de première catégorie, $A$ contient un $x$ (en vertu du corollaire précédent) tel que $C \cdot Y^x$ est un ensemble de première catégorie relat. à $Y^x$. Or $C \cdot Y^x$ étant isométrique à $B$ et $Y^x$ à $\mathcal{Y}$ il s'ensuit que $B$ est de première catégorie (relativement à $\mathcal{Y}$). Ainsi la condition est nécessaire. La suffisance résulte du fait, que le produit d'un ensemble non-dense par un ensemble arbitraire est non-dense.

**Corollaire 3** [1]. *Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ deux espaces complets et soit $y=f(x)$ une fonction arbitraire transformant l'espace $\mathscr{X}$ en un sous-ensemble de l'espace $\mathscr{Y}$. $C$ désignant l'ensemble des points $(x, y)$ du produit $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ qui n'appartiennent pas à l'image de cette fonction (c. à d. qui satisfont à l'inégalité $y\neq f(x)$), $C$ n'est en aucun de ses points de première catégorie* [2].

En effet, dans le cas contraire il existeraient deux ensembles $G$ et $H$ ouverts dans $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ resp. tels que $C\cdot(G\times H)$ soit de première catégorie. En remplaçant dans le corollaire 1: $\mathscr{X}$ par $G$ et $\mathscr{Y}$ par $H$, on en conclut l'existence d'un point $x\in G$ tel que l'ensemble $C\cdot Y^x\cdot(G\times H)$ est de première catégorie dans $Y^x\cdot(G\times H)$. Comme $Y^x\cdot(G\times H)=x\times H$, il en résulte que l'ensemble $C\cdot(x\times H)$ est de première catégorie dans $(x\times H)$. Or, l'ensemble $C\cdot(x\times H)$ est ouvert dans $(x\times H)$ puisqu'il ne diffère de celui-ci que par un seul point au plus (notamment par le point $(x, f(x))$. Nous arrivons ainsi à la conclusion qu'un ensemble ouvert dans $(x\times H)$, donc dans $Y^x$, y est de première catégorie. Or $Y^x$ étant isométrique à $\mathscr{Y}$ et $\mathscr{Y}$, comme espace complet, n'étant en aucun de ses points de première catégorie, cela présente une contradiction.

**Corollaire 4.** *Dans les mêmes hypothèses sur $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$, si l'image d'une fonction jouit de la propriété de Baire (si par exemple la fonction jouit elle-même de la propriété de Baire* [3]*), cette image est de première catégorie.*

Cela résulte du corollaire précédent en vertu du fait que, si le complémentaire d'un ensemble à propriété de Baire n'est en aucun point de première catégorie, l'ensemble même est nécessairement de première catégorie [4].

**4. Théorème 2.** *$C$ étant un sous-ensemble de $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ jouissant de la propriété de Baire, l'ensemble $C\cdot Y^x$ jouit de la propriété de Baire relativement à $Y^x$, abstraction faite d'un ensemble des $x$ de première catégorie ($Y^x$ désigne l'ensemble $x\times\mathscr{Y}$).*

[1]) Cf. C. Kuratowski, Fund. Math. V, p. 84 (théor. VI).

[2]) Un ensemble $A$ est dit de première catégorie au point $x$, s'il existe un entourage $E$ de $x$ tel que $E\cdot A$ soit de première catégorie.

[3]) L'image d'une fonction jouissant de la propriété de Baire en jouit également; v. Fund. Math. XVII, p. 282.

[4]) Voir par ex. Fund. Math. XVI, p. 390.



En effet $C$, comme ensemble à propriété de Baire, est de la forme $C=M+N$ où $M$ est de première catégorie et $N$ est un $G_\delta$. En vertu du Corollaire 1, il existe un ensemble $P$ de première catégorie tel que pour $x$ n'appartenant pas à $P$ l'ensemble $M\cdot Y^x$ est de première catégorie dans $Y^x$. Or $C\cdot Y^x=M\cdot Y^x+N\cdot Y^x$ et $N\cdot Y^x$ étant un $G_\delta$ dans $Y^x$, il en résulte que $C\cdot Y^x$ jouit de la propriété de Baire relativement à $Y^x$.

**Corollaire 1.** *Si $A\times B$ jouit de la propriété de Baire, un des ensembles $A$ ou $B$ en jouit également* [1].

**Corollaire 2.** *Si $\mathscr{X}$ est un espace complet et $\mathscr{X}\times B$ jouit de la propriété de Baire, $B$ en jouit également* [2].

Car $\mathscr{X}$ n'étant pas de I-re catégorie, il existe un $x\in\mathscr{X}$ tel que $(x\times B)$ est à propriété de Baire rel. à $Y^x$. Comme l'ensemble $(x\times B)$ est isométrique avec $B$ et $Y^x$ est isométrique avec $\mathscr{Y}$, notre corollaire en résulte.

[1]) En cas de produit dénombrable ce corollaire (ainsi que le cor. 2 du th. 1) est en défaut: soit, dans l'intervalle $(0, 1/2)$, $A$ un ensemble qui ne jouit pas de la propriété de Baire; dans la „$\aleph_0$-potence" de l'intervalle 01 la $\aleph_0$-potence de $A$ est non-dense.

[2]) Pour une application de ce corollaire, v. la note suivante de M. Kuratowski. Il est à remarquer que la plupart des énoncés de la note présente est applicable à la théorie de la *mesure*, lorsqu'on remplace la notion d'ensemble de I-re cat. par celle d'ensemble de mesure nulle, ainsi que la propriété de Baire par la mesurabilité. C'est un fait encore qui fait ressortir l'analogie entre les ensembles mesurables et ensembles à propriété de Baire, analogie à laquelle M. Szpilrajn a attiré l'attention (v. C. R. du Congr. math. pays Slaves, Varsovie 1929). Comme M. Szpilrajn nous a communiqué, quelques-uns parmi les énoncés de cette note lui ont été connus (mais non-publiés).