erfüllt nach (39), **29.**, 4⁰ und (38) die Ungleichung

$$\varrho(x, \varphi_k(x)) \leqslant \frac{1}{8}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right),$$

woraus sich nach (37) und **29.**, 2⁰, 4⁰

$$\varrho[\varphi_k(x), \varphi_k(y)] \leqslant \frac{1}{4}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{2}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k+1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right)$$

für je zwei zu einem Simplexe des Netzes σ_{k+1} gehörende Punkte x, y von M_k ergibt.

Setzen wir also $\varphi = \varphi_k$, $M = M_k$, $M' = N_k - N_{k+1} + T_{k+1}$, $\sigma = \sigma_{k+1}$ und $m = n$, so werden alle Voraussetzungen des Hilfssatzes **31.** erfüllt, woraus die Existenz einer Erweiterung φ'_k von φ_k auf M' folgt, die den folgenden Bedingungen genügt:

1) $\varphi'_k \in A^{N_k - N_{k+1} + T_{k+1}}$,

2) *Für jede* l*-Seite* $S^{(l)}$ *des Komplexes* $N_k - N_{k+1} + T_{k+1}$ *von* σ_{k+1} *gilt* $\delta(\varphi'_k(S^{(l)})) \leqslant \frac{1}{2}\eta^{n-l}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k}$.

Es gilt insbesondere nach (37), (38), (39) und (40):

$$\varrho(x, \varphi'_k(x)) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{2}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{8}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \quad \text{für jedes } x \in N_k - N_{k+1} + T_{k+1}. \tag{41}$$

Nach (40) und (41) retrahiert also die Funktion

$$\varphi(x) = x \quad \text{für} \quad x \in A,$$
$$\varphi(x) = \varphi'_k(x) \quad \text{für} \quad x \in N_k - N_{k+1} + T_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

die Umgebung $N_1 = A + \sum_{k=1}^{\infty}(N_k - N_{k+1} + T_{k+1})$ von A auf A, w. z. b. w.

33. Satz. *Ebene* $\mathfrak{R}$*-Mengen sind mit den in sich kompakten, lokal zusammenhängenden und die Ebene in höchstens endlich viele Gebiete zerschneidenden Punktmengen identisch.*

B e w e i s. Erstens, ist eine $\mathfrak{R}$-Menge in sich kompakt, nach **27.** lokal zusammenziehbar, also nach **25.** lokal zusammenhängend, und, auf Grund des Satzes **16.**, zerschneidet sie die Ebene in höchstens endlich viele Gebiete. Zweitens, ist jede in sich kompakte, lokal zusammenhängende und die Ebene in höchstens endlich viele Gebiete zerschneidende ebene Punktmenge, nach **25.**, Beispiel **2**, lokal zusammenziehbar und somit nach Satz **32.** eine $\mathfrak{R}$-Menge, w. z. b. w.

Sur les composants dimensionnels d'un espace compact.

Par

S t e f a n M a z u r k i e w i c z (Warszawa).

D'après U r y s o h n on appelle *multiplicité Cantorienne de dimension* n un espace compact de dimension n, s'il reste connexe après la suppression d'un ensemble fermé de dimension $n - 2$ quelconque [1]) R étant compact de dimension n, M. A l e x a n d r o f f appelle [2]) *composant dimensionnel* (dimensionnelle Komponente) de R tout ensemble fermé qui est 1) contenu dans R, 2) une multiplicité Cantorienne de dimension n et 3) saturé par rapport aux propriétés 1) et 2). Toute définition de la dimension engendre de cette manière une notion correspondante de multiplicité Cantorienne et de composant dimensionnel [3]). Je me borne à la considération des multiplicités Cantoriennes dites *simples* (einfach) par M. A l e x a n d r o f f qui correspondent à la définition de la dimension de B r o u w e r - M e n g e r - U r y s o h n (que je vais désigner par le symbole dim R) et je vais donner pour ce cas particulier la solution du problème II posé par M. A l e x a n d r o f f dans son mémoire cité [4]).

T h é o r è m e. *Si la classe de composants dimensionnels* (correspondants à la définition de dimension de B r o u w e r - M e n g e r -

[1]) U r y s o h n. Fund. Math. VII p. 124.

[2]) A l e x a n d r o f f: *Dimensionstheorie.* Math. Ann. 106 p. 214—215. M. T u m a r k i n (C. R. 186 p. 420) appelle ces ensembles: multiplicités Cantoriennes maximales.

[3]) M. A l e x a n d r o f f considère les multiplicités Cantoriennes simples et mod m, qui correspondent aux dimensions mod m introduites par lui (comp. m. c. p. 162—238).

[4]) m. c. p. 216.

Urysohn) *d'un espace compact, métrique est non dénombrable, elle est de la puissance du continu.*

Soit R un espace métrique, compact; $\dim R = n$. Désignons par $\mathfrak{A}(R)$ la classe de composants dimensionnels de R et pour $\sigma > 0$, par $\mathfrak{A}(R, \sigma)$ la classe des $Q \in \mathfrak{A}(R)$ qui satisfont à la condition $d_n(Q) \geqq \sigma$, $d_n(Q)$ désignant la n-ème constante de Urysohn[5]).

Désignons par $\mathfrak{B}(R)$ la classe des sous ensembles fermés $A \subset R$ tels que la relation $Q \in \mathfrak{A}(R)$ entraîne l'une des relations:

$$(1) \qquad Q \subset A; \ \dim A \times Q \leqq n-2.$$

Pour $\sigma > 0$ désignons par $\mathfrak{W}(R, \sigma)$ la classe des A qui satisfont simultanément aux conditions:

$$(2) \qquad A \in \mathfrak{B}(R); \quad \mathfrak{A}(A, \sigma) \text{ — non dénombrable.}$$

Toute multiplicité Cantorienne de dimension n contenue dans R est contenue dans un composant dimensionnel de R[6]). En s'appuyant sur ce fait on démontre facilement les résultats suivants:

(I) Si $A \in \mathfrak{B}(R)$ et $\dim A = n$ alors $P \in \mathfrak{A}(A)$ entraîne $P \in \mathfrak{A}(R)$, c. à d. $\mathfrak{A}(A) \subset \mathfrak{A}(R)$.

(II) La propriété exprimée par $A \in \mathfrak{B}(R)$ est inductive c. à d. si $A_{k+1} \subset A_k$, $A_k \in \mathfrak{B}(R)$, $k = 1, \ldots,$ alors $\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{B}(R)$.

(III) Si $A \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, $A = B + C$, B et C sont fermés et $\dim B \times C \leqq n-2$, alors $A \in \mathfrak{B}(R)$, $B \in \mathfrak{B}(R)$; $\mathfrak{A}(A) \subset \mathfrak{A}(B) + \mathfrak{A}(C)$ et un au moins des ensembles B, C est un $\mathfrak{W}(R, \sigma)$.

(IV) Si $A \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$ il existe un A_1 qui satisfait aux conditions: $A_1 \subset A$; $A - A_1 \neq 0$; $A_1 \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, $\dim A_1 \times \overline{(A - A_1)} \leqq n-2$.

(V) Si $A \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$ il existe deux ensembles B, C qui satisfont aux conditions: $B + C \subset A$; $B \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$; $C \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$; $\dim B \times C \leqq n-2$.

Pour démontrer (V), déterminons la suite $\{L_\alpha\}$, $\alpha < \Omega$ de manière suivante:

(w_1) $L_1 = A$,

(w_2) Si $L_\alpha \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, alors $L_{\alpha+1}$ est un ensemble satisfaisant aux conditions: $L_{\alpha+1} \subset L_\alpha$, $L_\alpha - L_{\alpha+1} \neq 0$, $L_{\alpha+1} \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, $\dim L_{\alpha+1} \times \overline{(L_\alpha - L_{\alpha+1})} \leqq n-2$. Un tel ensemble existe d'après (IV).

(w_3) Si L_α non $\in \mathfrak{W}(R, \sigma)$ alors $L_{\alpha+1} = L_\alpha$.

(w_4) Si $\beta < \Omega$ est de seconde espèce alors $L_\beta = \prod\limits_{\alpha<\beta} L_\alpha$.

La suite $\{L_\alpha\}$ est descendante et les L_α sont fermés. Il existe donc un premier nombre $\gamma < \Omega$ tel que $L_\gamma = L_{\gamma+1}$. D'après (w_2) L_γ non $\in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, donc γ est de seconde espèce. D'après (w_3) pour $\alpha < \gamma$ on a $L_\alpha \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$. Donc d'après (II), $L_\gamma \in \mathfrak{B}(R)$ et d'après (I) $\mathfrak{A}(L_\gamma) \subset \mathfrak{A}(R)$ et $\mathfrak{A}(L_\gamma, \sigma) \subset \mathfrak{A}(R, \sigma)$. Comme on a: $L_\gamma \subset A$ et $\mathfrak{A}(A, \sigma) \subset \mathfrak{A}(R, \sigma)$ il résulte que $\mathfrak{A}(L_\gamma, \sigma) \subset \mathfrak{A}(A, \sigma)$. L'ensemble $\mathfrak{A}(A, \sigma)$ est non dénombrable, tandis que $\mathfrak{A}(L_\gamma, \sigma)$ est dénombrable, donc:

$$(3) \qquad \mathfrak{A}^*(A, \sigma) = \mathfrak{A}(A, \sigma) - \mathfrak{A}(L_\gamma, \sigma)$$

est non dénombrable. Soit $Q \in \mathfrak{A}^*(A, \sigma)$; alors Q n'est pas contenu dans L_γ; il existe donc un premier nombre $\lambda(Q) \leqq \gamma$ tel que Q n'est pas contenu dans $L_{\lambda(Q)}$. D'apres (w_4) $\lambda(Q)$ est de première espèce: $\lambda(Q) = \mu(Q) + 1$ et on a: $\mu(Q) < \gamma$. L'ensemble de nombres ordinaux $< \gamma$ étant dénombrable et l'ensemble (3) non dénombrable il existe un nombre $\mu_1 < \gamma$ et un ensemble non dénombrable $\mathfrak{A}^{**} \subset \mathfrak{A}^*(A, \sigma)$ tel que: $Q \in \mathfrak{A}^{**}$ entraîne $\mu(Q) = \mu_1$. Posons:

$$(4) \qquad B = L_{\mu_1+1}, \quad C = \overline{L_{\mu_1} - L_{\mu_1+1}}.$$

Evidemment $B + C \subset A$ et d'après (w_2) et $\mu_1 + 1 < \gamma$: $\dim B \times C \leqslant n-2$, $B \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$. D'autre part, d'après (III) et la signification de μ_1 on aura: $C \in \mathfrak{B}(R)$; $\mathfrak{A}^{**} \times \mathfrak{A}(B) = 0$; $\mathfrak{A}^{**} \subset \mathfrak{A}(L_{\mu_1}, \sigma) \subset \mathfrak{A}(B, \sigma) + \mathfrak{A}(C, \sigma)$; donc $\mathfrak{A}^{**} \subset \mathfrak{A}(C, \sigma)$. Donc $C \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$ et (V) est démontré. —

Passons maintenant à la démonstration du théorème. On a: $\mathfrak{A}(R) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}\left(R, \frac{1}{k}\right)$; Donc si $\mathfrak{A}(R)$ est non dénombrable, il existe un $\sigma > 0$ tel que $\mathfrak{A}(R, \sigma)$ est non dénombrable, donc $R \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$. A chaque suite dyadique $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i = 0, 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ faisons correspondre un ensemble $B(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de manière suivante:

(u_1) $B(0)$, $B(1)$ satisfont aux conditions: $B(0) + B(1) \subset R$; $B(0) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$; $B(1) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$; $\dim B(0) \times B(1) \leqq n-2$; D'après (V) un tel couple d'ensembles existe.

[5]) Urysohn. Fund. Math. VIII p. 353.

[6]) Tumarkin. l. c. Menger Proc. Akad. Amst. XXX p. 705—709.

(u_2) Supposons déterminé $B(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de manière que: $B(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathfrak{W}(R, \sigma_2)$ alors $B(a_1, \ldots, a_k, 0)$ et $B(a_1, \ldots, a_k, 1)$ satisfont aux conditions: $B(a_1, .., a_k, 0) + B(a_1, \ldots, a_k, 1) \subset B(a_1, a_2, \ldots, a_k)$; $B(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$; $B(a_1, a_2, \ldots, a_k, 1) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$ enfin: $\dim B(a_1, . ., a_k. 0) \times B(a_1, \ldots, a_k, 1) \leqq n - 2$. D'après (V) un tel couple d'ensembles existe.

Soit maintenant $s = (a_1 a_2 \ldots)$ une suite dyadique infinie. Posons:

$$H(s) = \prod_{k=1}^{\infty} B(a_1 a_2 \ldots a_k). \tag{4}$$

D'après (u_1), (u_2), (II) on aura $H(s) \in \mathfrak{B}(R)$; d'autre part, on a pour tout k naturel $B(a_1 a_2 \ldots a_k) \in \mathfrak{W}(R, \sigma)$, par conséquent $B(a_1 a_2 \ldots a_k)$ possède un composant dimensionnel Q tel que $d_n(Q) \geqq \sigma$, donc à fortiori $d_n(B(a_1 a_2 .. a_k)) \geqq \sigma$ et il vient, d'après un théorème de Urysohn[7]): $\dim H(s) = n$; donc $H(s)$ contient un composant dimensionnel $P(s)$[8]). D'après $H(s) \in \mathfrak{B}(R)$, $\dim H(s) = n$ et (I) on aura $P(s) \in \mathfrak{A}(R)$, Soient maintenant: $s_1 = (a_1^{(1)}, a_2^{(2)} \ldots)$ et $s_2 = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \ldots)$ deux suites dyadiques différentes; soit j le premier entier tel que $a_j^{(2)} \neq a_j^{(2)}$. On aura d'après (u_1), (u_2):

$$\begin{aligned} P(s_1) \times P(s_2) \subset B(a_1^{(1)} .. a_j^{(1)}) \times B(a_1^{(2)} \ldots a_j^{(2)}) = \\ = B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, a_j^{(1)}) \times B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, a_j^{(2)}) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dim P(s_1) \times P(s_2) \leqq \dim B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, 0) \times B(a_1^{(1)} \ldots a_{j-1}^{(1)}, 1) \leqq n - 2. \tag{6}$$

Donc $P(s_1) \neq P(s_2)$. A toute suite dyadique correspond ainsi un élément de $\mathfrak{A}(R)$ et à deux suites différentes correspondent deux éléments différents. Donc la puissance de $\mathfrak{A}(R)$ est celle du continu c. q. f. d.

Remarquons que l'extension de notre théorème au cas de la dimension mod m serait immédiate, si l'on savait définir pour la dimension mod m des constantes analogues aux constantes d'Urysohn.

[7]) Urysohn. Fund. Math. VIII p. 354–355.
[8]) Tumarkin, l. c.

Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire.

Par

C. Kuratowski et St. Ulam (Lwów).

1. $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ étant deux espaces métriques, on appelle produit combinatoire $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ l'ensemble des paires (x, y) où $x \in \mathscr{X}$ et $y \in \mathscr{Y}$ et où la distance de deux points $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ est définie par la formule

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2},$$

$|x_1 - x_2|$ et $|y_1 - y_2|$ désignant la distance dans les espaces $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ resp.

En vertu de cette définition l'espace $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ est métrique; de plus, la condition $z = \lim z_n$ veut dire que $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$. Par analogie à la géométrie analytique nous appellerons $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ les „axes" de l'espace $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, x et y les coordonnées (l'abscisse et l'ordonnée) du point (x, y).

La notion de projection d'un ensemble situé dans $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ s'introduit alors d'elle même.

2. Dans beaucoup de cas, les propriétés topologiques du produit $A \times B$ se laissent déterminer par celles des facteurs A et B. Ainsi, par exemple, on prouve sans aucune difficulté, que pour que $A \times B$ soit respectivement: *fermé*, *ouvert* (en général *de classe borelienne* α), *dense*, *compact*, *complet*, *séparable*, *connexe*[1]), *localement connexe*, il faut et il suffit que A *et* B le soient également. Pour que $A \times B$ soit respectivement un *ensemble frontière*, *non-dense*, *dense-en-soi*, il faut et il suffit que A *ou* B le soit.

[1]) Voir, par ex., v. Dantzig, Fund. Math. XV (§ 5).