# Une remarque sur l'hypothèse du continu.

Par

W. Hurewicz (Amsterdam).

Nous nous proposons de démontrer que *l'hypothèse du continu* ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) *équivaut à l'hypothèse qu'il existe dans l'espace de* M. Hilbert *un ensemble non dénombrable de points, ne contenant aucun ensemble non dénombrable de dimension finie* [1]).

Tout ensemble (situé dans l'espace de M. Hilbert) d'une puissance inférieure à celle du continu ayant, comme on sait, la dimension 0, il est évident que, si l'hypothèse du continu n'était pas vraie, chaque ensemble non dénombrable contiendrait un sous-ensemble non dénombrable de dimension 0. Nous n'avons donc qu'à démontrer que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble jouissant de la propriété que nous venons de formuler.

Nous allons nous appuyer sur la proposition suivante que j'ai établie dans un mémoire antérieur: *Il est impossible de partager l'espace $E$ de M. Hilbert en une infinité dénombrable d'ensembles de dimensions finies* [2]). Cela posé, admettons que l'hypothèse du continu

[1]) La notion de dimension est prise au sens bien connu de MM. Brouwer, Menger et Urysohn. En nous rapportant au théorème fondamental de M. Menger d'après lequel tout ensemble de dimension finie est homéomorphe à un ensemble contenu dans l'espace euclidien à un nombre fini de dimensions nous pouvons donner à notre énoncé la forme suivante: *L'hypothèse du continu équivaut à l'existence d'un ensemble non dénombrable de points dont aucun sous-ensemble non dénombrable n'est homéomorphe à une partie d'un espace euclidien* (à un nombre fini de dimensions). En se servant de la terminologie de M. Fréchet, on peut caractériser cet ensemble hypothétique par la propriété d'avoir un „type de dimension" qui n'est comparable avec aucun type *fini* correspondant à un ensemble non dénombrable.

[2]) Voir *Proc. Acad. Amsterdam* 31 (1928), p. 916.



soit vraie et considérons dans $E$ les ensembles $G_\delta$ de dimension finie. Ces ensembles formant une classe de puissance du continu, on peut les ranger d'après notre hypothèse dans une suite transfinie du type $\Omega$ ($\Omega$ désignant le premier nombre ordinal de la troisième classe):

$$(') \qquad M_1,\ M_2, \ldots,\ M_\omega, \ldots,\ M_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega).$$

$p$ étant un point arbitraire situé dans $E$, l'ensemble $(p)$ figure parmi les ensembles $M_\alpha$. On a par suite:

$$E = \sum_{\alpha<\Omega} M_\alpha.$$

D'autre part, en tenant compte de la propriété mentionnée de l'espace $E$, on trouve pour chaque nombre $\alpha < \Omega$:

$$E \neq \sum_{\beta<\alpha} M_\beta.$$

En rapprochant les deux relations précédentes, on voit facilement qu'il existe des nombres $\alpha$ *arbitrairement grands*, pour lesquels l'ensemble

$$P_\alpha = M_\alpha - \sum_{\beta<\alpha} M_\beta$$

soit non-vide. Faisons correspondre à chacun de ces nombres un élément $p_\alpha$ de $P_\alpha$ et désignons par $A$ l'ensemble formé par les points $p_\alpha$. Les ensembles $P_\alpha$ n'ayant pas de points communs deux à deux, l'ensemble $A$ est *non dénombrable* Remarquons maintenant que pour chaque ensemble de la suite (') la partie commune de $A$ et de $M_\alpha$ est finie ou dénombrable et rappelons que, d'après une proposition connue, tout ensemble de dimension finie est une partie d'un ensemble $G_\delta$ de dimension finie, c'est à dire d'un ensemble de la suite (') [1]). Il s'ensuit immédiatement qu'un ensemble de dimension finie contenu dans $A$ est nécessairement dénombrable. Notre proposition est établie.

Remarquons que l'hypothèse, qui remplace ainsi l'hypothèse du continu, est de nature *purement topologique*.

[1]) Plus précisément, $m$ étant un entier non négatif quelconque tout ensemble de dimension $m$ est contenu dans un $G_\delta$ de dimension $m$. Cette proposition est due à M. Tumarkin. Voir p. ex. Menger *Dimensionstheorie*.