(41) $f(a_{r_1,\ldots,r_{k_{j+1}}}) \epsilon f(A) \times f(G_{r_1,\ldots,r_{k_{j+1}}}) \subset f(A) \times f(G_{r_1,\ldots,r_{k_j}}) \subset$
$\subset f(A) \times S^*(f(a_{r_1,\ldots,r_{k_j}}),\ \mu_{r_1,\ldots,r_{k_j}}) \subset f(G_{p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j} \times A).$

D'après (39), (41) et (Z_7) il existe un q_{j+1} tel que:

(42) $f(A) \times S^*(f(a_{r_1,\ldots,r_{k_{j+1}}}),\ \mu_{r_1,\ldots,r_{k_{j+1}}}) \subset f(G_{p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j,q_{j+1}} \times A).$

Mais c'est la rélation (37) où l'on a remplacé j par $j+1$. Les suites $\{k_j\}$, $\{q_j\}$ sont donc déterminées par induction et on a

(43) $$f(a_{r_1,\ldots,r_{k_j}}) \epsilon f(G_{p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j})$$

donc il existe un point b_j tel que:

(44) $$b_j \epsilon G_{p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j}$$

(45) $$f(b_j) = f(a_{r_1,\ldots,r_{k_j}}).$$

D'après (Z_1), le diamètre de $G_{p_1,p_2,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j}$ tend vers 0. Donc, R étant complet, on aura en vertu d'un théorème de M. Hausdorff[1]).

(46) $$\prod_{j=1}^{\infty} \overline{G_{p_1,p_2,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j}} = b_0.$$

Mais d'après (Z_2):

(47) $$\prod_{j=1}^{\infty} \overline{G_{p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j}} = \prod_{j=1}^{\infty} G_{p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_j} \subset B.$$

Donc $b_0 \epsilon B$ et comme évidemment $b_0 \epsilon G_{p_1,\ldots,p_l} \subset G$, on aura $b_0 \epsilon B \times G$. D'autre part, d'après (44) $b_0 = \lim_{j\to\infty} b_j$. f étant continue il résulte de (29), (30), (45):

(48) $$f(b_0) = \lim_{j\to\infty} f(a_{r_1,\ldots,r_{k_j}}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{r_1,\ldots,r_k}) = f(x_1) = y.$$

Donc (28) entraîne:

(49) $$y \epsilon f(B \times G).$$

On voit que tout point de $f(B\times G)$ est un point intérieur de cet ensemble dans $f(B)$. Donc $f(B\times G)$ est ouvert dans $f(B)$ et f *est une transformation intérieure de* B c. q. f. d.

[1]) *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 318.

Warszawa 3/V 1932.

Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Théorème I: *F étant une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires de puissance du continu, il existe toujours un ensemble linéaire non dénombrable E, dont les images continues sont distinctes de tout ensemble de la famille F*[1]).

Démonstration. Dans le cas, où $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, notre théorème est évidemment vrai. (Il suffit dans ce cas prendre pour E un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$). Il suffira donc de donner une démonstration de notre théorème, en admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Admettons donc que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Soit

(1) $$E_1,\ E_2,\ E_3,\ldots,\ E_\omega,\ E_{\omega+1},\ldots\ E_\xi,\ldots \quad (\xi < \Omega)$$

une suite transfinie du type Ω, formée de tous les ensembles de la famille F.

La famille de tous les ensembles G_δ linéaires ainsi que la famille de toutes les fonctions continues, définies sur un ensemble linéaire donné, étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type Ω,

(2) $$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_\omega(x),\ f_{\omega+1}(x),\ldots,\ f_\xi(x),\ldots, \quad (\xi < \Omega)$$

formée de toutes les fonctions, dont chacune est définie et continue sur un ensemble G_δ (variable), Γ; soit Γ_α l'ensemble G_δ sur lequel est définie et continue la fonction $f_\alpha(x)$.

[1]) D'après une remarque due à M. Lindenbaum on peut encore dire que, E_1 étant un sous-ensemble quelconque de E, les images continues de E_1 sont distinctes de tout ensemble de la famille F.

L'ensemble de tous les systèmes (α, β) de deux nombres ordinaux $< \Omega$ étant de puissance $\aleph_1^2 = \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω,

$$(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2), \ldots,\ (\alpha_\omega, \beta_\omega), \ldots\ (\alpha_\xi, \beta_\xi), \ldots\quad (\xi < \Omega)$$

formée de tous ces systèmes.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{P_\xi\}$ $(\xi < \Omega)$ d'ensembles et une suite transfinie $\{p_\xi\}$ $(\xi < \Omega)$ de nombres réels comme il suit.

Pour définir l'ensemble P_1 distinguons deux cas.

1) $E_{\alpha_1} \subset f_{\beta_1}(\Gamma_{\beta_1})$. Posons, pour a réels:

$$H_\xi(a) = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \,\epsilon\, \Gamma_{\beta_\xi},\ f_{\beta_\xi}(x) = a]. \tag{3}$$

Les ensembles Γ_β étant des G_δ et les fonctions $f_\beta(x)$ étant continues dans Γ_β, on voit sans peine que les ensembles (3) sont des G_δ (quel que soit le nombre réel a et le nombre ordinal $\xi < \Omega$).

Dans notre cas, pour tout nombre $a \,\epsilon\, E_{\alpha_1}$ l'ensemble $H_1(a)$ est un G_δ non vide et on a évidemment $H_1(a). H_1(a') = 0$ pour deux nombres distincts a et a' de E_{α_1}. Parmi les ensembles $H_1(a)$, où $a \,\epsilon\, E_{\alpha_1}$, il n'y a donc qu'un ensemble au plus dénombrable d'ensembles de mesure non nulle; l'ensemble E_{α_1} ayant la puissance du continu, il en résulte qu'il existe un nombre $a_1 \,\epsilon\, E_{\alpha_1}$ tel que $m\, H_1(a_1) = 0$. Posons $P_1 = H_1(a_1)$.

2) $E_{\alpha_1} - f_{\beta_1}(\Gamma_{\beta_1}) \neq 0$. Dans ce cas nous poserons $P_1 = 0$.

p_1 sera défini comme un nombre réel non $\epsilon\, P_1$.

Soit maintenant λ un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini les ensembles de mesure nulle P_ξ pour $\xi < \lambda$ et les nombres q_ξ pour $\xi < \lambda$.

Si $E_{\alpha_\lambda} \subset f_{\beta_\lambda}(\Gamma_{\beta_\lambda})$, il existe, comme on voit sans peine, un ensemble de puissance du continu de nombres réels a, tels que $a \,\epsilon\, E_{\alpha_\lambda}$, $H_\lambda(a) \neq 0$ et $m\, H_\lambda(a) = 0$; il existe donc entre eux un, soit a_λ, tel que

$$p_\xi \text{ non } \epsilon\, H_\lambda(a_\lambda), \quad \text{pour} \quad \xi < \lambda.$$

Nous poserons

$$P_\lambda = H_\lambda(a_\lambda). \tag{3 a}$$

Si $E_{\alpha_\lambda} - f_{\beta_\lambda}(\Gamma_{\beta_\lambda}) \neq 0$, nous poserons $P_\lambda = 0$.

Les ensembles P_ξ $(\xi < \lambda)$ étant de mesure nulle, il en est de même (d'après $\lambda < \Omega$) de leur somme ainsi que de l'ensemble $S_\lambda = \sum_{\xi<\lambda} P_\xi + \sum_{\xi<\lambda} (p_\xi)$: il existe donc un nombre p_λ non $\epsilon\, S_\lambda$.

Les ensembles P_λ $(\lambda < \Omega)$ et les nombres p_λ $(\lambda < \Omega)$ sont ainsi définis par l'induction transfinie.

Soit E l'ensemble de tous les points p_λ, où $\lambda < \Omega$.

Admettons qu'un ensemble de la famille F, soit E_α, est une image continue de E. Toute fonction définie et continue dans un ensemble E pouvant être étendue à un ensemble G_δ contenant E en conservant la continuité [1]), il résulte donc de notre hypothèse qu'il existe un nombre ordinal $\beta < \Omega$, tel que

$$E \subset \Gamma_\beta \tag{4}$$

et

$$f_\beta(E) = E_\alpha. \tag{5}$$

D'après la propriété de la suite (α_ξ, β_ξ) $(\xi < \Omega)$, il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, tel que

$$\alpha_\lambda = \alpha \quad \text{et} \quad \beta_\lambda = \beta. \tag{6}$$

De la définition des suites $\{P_\xi\}$ et $\{p_\xi\}$ résulte que p_ξ non $\epsilon\, P_\eta$, pour $\xi < \Omega$, $\eta < \Omega$. Donc

$$E\, P_\lambda = 0. \tag{7}$$

Or, d'après (6), (5) et (4) on a

$$E_{\alpha_\lambda} = f_{\beta_\lambda}(E) \subset f_{\beta_\lambda}(\Gamma_{\beta_\lambda}),$$

donc, d'après la définition de l'ensemble P_λ, on a la formule (3 a).

Nous avons $a_\lambda \,\epsilon\, E_{\alpha_\lambda}$, donc d'après (6) et (5), il existe un nombre $x_0 \,\epsilon\, E$, tel que

$$a_\lambda = f_{\beta_\lambda}(x_0); \tag{8}$$

or, de $x_0 \,\epsilon\, E$ et (4) et (6) résulte que

$$x_0 \,\epsilon\, \Gamma_{\beta_\lambda}. \tag{9}$$

Les formules (8) et (9) donnent, d'après (3 a) et (3): $x_0 \,\epsilon\, P_\lambda$. On a donc $x_0 \,\epsilon\, E\, P_\lambda$, contrairement à (7).

L'hypothèse que l'ensemble E_α est une image continue de l'ensemble E implique donc une contradiction.

[1]) *Fund. Math.*, t. IV, p. 317.

Les images continues de l'ensemble E sont donc distinctes de tout ensemble de la famille F.

Le théorème I est ainsi démontré.

De notre théorème I résulte tout de suite ce

Théorème II: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et si F est une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires de puissance du continu, il existe toujours un ensemble linéaire de puissance du continu, dont les images continues sont distinctes de tout ensemble de la famille F.*

Du théorème II résulte, en particulier, l'existence, pour tout ensemble linéaire de puissance du continu, d'un ensemble linéaire H de même puissance, dont E n'est pas une image continue. En particulier, il en résulte qu'*il existe un ensemble linéaire H de puissance du continu, tel que l'intervalle* (0, 1) *n'est pas une image continue de H.* Si simple que semble être cette proposition, nous ne la savons par démontrer sans admettre l'hypothèse du continu. (On voit sans peine que pour que les images continues d'un ensemble linéaire H soient toutes distinctes de l'intervalle (0, 1), il faut et il suffit qu'elles soient toutes parfaitement discontinues, c'est-à-dire dépourvues de sous-ensembles parfaits. En effet, la suffisance de cette condition et évidente. D'autre part, soit E une image continue de H et supposons que E contient un sous-ensemble parfait P. Si E contient un intervalle, cet intervalle, donc aussi l'intervalle (0, 1), est évidemment une image continue de E, donc aussi de H. Si E ne contient aucun intervalle, l'ensemble P, en tant que fermé dans E, est une image continue de E [1]), donc aussi de H, et, comme on sait, l'intervalle (0, 1) est une image continue de tout ensemble parfait. L'intervalle (0, 1) est donc une image continue de H).

Or, d'après le théorème I on peut démontrer sans admettre l'hypothèse du continu l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable dont les images continues sont toutes distinctes de l'intervalle (0, 1). Voici encore une autre démonstration de cette proposition qui n'utilise pas le théorème I.

Il suffit, comme nous savons, de traiter le cas où $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Or, en admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, j'ai démontré [2]) que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire dont toute image continue est de mesure nulle, et parsuite est distincte de l'intervalle (0, 1).

[1]) Voir *Fund. Math.*, t. XII, p. 100.

[2]) *Fund. Math.*, t. XI, p. 302.

Supposons maintenant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et soit ω_2 le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_2$. Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie du type ω_2 d'ensembles linéaires $\{E_\alpha\}$ $(\alpha<\omega_2)$ comme il suit.

Soit E_1 l'ensemble de tous les nombres réels. Soit maintenant α un nombre ordinal donné $<\omega_2$ et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles E_ξ, où $\xi<\alpha$. D'après $\alpha<\omega_2$, la famille Φ_α de tous les ensembles E_ξ, où $\xi<\alpha$, est de puissance $\overline{\overline{\alpha}}\leqslant\aleph_1=2^{\aleph_0}$. La famille F_α de tous les ensembles linéaires de puissance du continu qui sont des images continues des ensembles de la famille Φ_α est donc aussi de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$. D'après le théorème II, il existe donc un ensemble linéaire E_α de puissance du continu dont les images continues sont distinctes de tout ensemble de la famille F_α.

La suite transfinie d'ensembles $\{E_\alpha\}$ $(\alpha<\omega_2)$ est ainsi définie par l'induction transfinie. On voit sans peine que de deux termes différents de cette suite aucun n'est une image continue de l'autre.

En effet, soient α et $\beta>\alpha$ deux nombres ordinaux $<\omega_2$. De la définition de l'ensemble E_β et de $\alpha<\beta$ résulte que E_α n'est pas une image continue de E_β. D'autre part, E_β ne peut être une image continue de E_α, puisque dans ce cas on aurait $E_\beta\in F_\alpha$, contrairement à la définition de E_β.

Nous avons ainsi démontré que

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une famille Φ formée de $\aleph_2$ ensembles linéaires de puissance du continu, telle que de deux ensembles distincts de cette famille aucun n'est une image continue de l'autre (On voit aussi sans peine qu'aucun ensemble linéaire de puissance du continu n'est une image continue de deux ensembles distincts de la famille Φ).

Il en résulte encore tout de suite que, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et $2^{\aleph_1}=\aleph_1$ [1]), il existe une famille Φ formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires de puissance du continu, telle que de deux ensembles distincts de la famille Φ aucun n'est une image continue de l'autre. L'existence d'une telle famille Φ a été démontrée récemment par M. Lindenbaum [2]) sans admettre les hypothèses que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et $2^{\aleph_1}=\aleph_2$: la démon-

[1]) L'ensemble de deux hypothèses: $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et $2^{\aleph_1}=\aleph_2$ est évidemment équivalent à l'hypothèse unique que $2^{2^{\aleph_0}}=\aleph_2$.

[2]) L'énoncé de cette proposition est publié dans les *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.* 10 (1931) (Séance de la Section de Varsovie du 16. I. 1931).

stration de M. Lindenbaum (qui paraîtra dans le vol. XX de ce journal) est cependant fort compliquée.

Les théorèmes I et II peuvent être sans peine généralisés. Au lieu des images continues on peut notamment prendre les images de Baire et, plus généralement, une famille quelconque de puissance du continu de transformations des ensembles à l'aide de fonctions mesurables d'une variable réelle. En effet, on voit sans peine que si $f(x)$ est une fonction mesurable d'une variable réelle, dont l'ensemble de valeurs est non dénombrable, il existe toujours un nombre réel a, tel que l'ensemble de tous les x réels, pour lesquels $f(x)=a$, est de mesure nulle. La démonstration que nous avons donné pour le théorème I s'applique donc dans ce cas.

Or, le problème se pose: les théorèmes I et II restent-ils vrais pour les familles de puissance du continu (ou, seulement, pour les familles dénombrables) de transformations des ensembles à l'aide de fonctions quelconques d'une variable réelle? D'un théorème que nous avons trouvé récemment avec M$^{\text{lle}}$ Braun[1]) résulte que ce n'est pas le cas pour le théorème II. En effet, comme nous avons démontré, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., telle que, quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable N, il existe un indice k (dépendant de N), tel que la fonction $f_k(x)$ transforme N en l'ensemble de tous les nombres réels.

En s'appuyant sur ce résultat, on voit tout de suite que *la négation de l'hypothèse du continu équivaut à la proposition suivante*:

F étant une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires de puissance du continu, et Φ une famille de puissance du continu de fonctions d'une variable réelle, il existe toujours un ensemble linéaire non dénombrable, E, tel que toute fonction de la famille Φ transforme E en un ensemble distinct de tout ensemble de la famille F[2]).

[1]) ce volume, p. 1.

[2]) Cf. ma communication au II Congrès de Mathématiciens Roumains à Turnu Severin, Mai 1932.

On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions.

By

S. Saks *) (Warszawa).

1. In their very interesting new proofs for the existence of continuous functions without derivatives, Banach and Mazurkiewicz showed that the class of continuous functions without finite one-sided derivative in any point is the complement of a set of the 1st category of Baire in the space $\mathfrak{C}$ of continuous functions[1]). The same method, and with the same result, could be applied to the evaluation of the class of continuous functions without both-sided finite or infinite derivatives in any point which we shall call briefly functions of Weierstrass' type.

The problem was set by Banach and Steinhaus whether these results may be extended to the functions of Besicovitch's type i. e. continuous functions without one-sided derivatives (finite or infinite) in any point. We shall give here a negative answer to this problem, showing in the first part of this paper that the complement of the class of Besicovitch's functions is everywhere of the 2nd category in the space $\mathfrak{C}$.

Banach has informed me in a letter that this theorem may be considerably strenghtened. First of all, as showed by this author,

*) International Research Fellow.

[1]) Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Mathematica, t. III, (1931), pp. 92—94; Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, ibid., pp. 174—179; Steinhaus, *Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie*, ibid., t. I (1929), pp. 51—81.