Sur les transformations intérieures.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Soit f une transformation continue d'un espace R en un espace T. On appelle f *transformation intérieure* de R si pour tout ensemble U ouvert dans R, $f(U)$ est ouvert dans $f(R)=T$ [1]).

Je vais démontrer le théorème suivant, analogue au théorème de M. Lavrentieff sur l'extension d'une homéomorphie [2]).

Théorème [3]). *Soient R, T deux espaces complets, séparables, $A\subset R$, f une transformation intérieure de A, $f(A)=B\subset T$. Il existe dans R un G_δ absolu $A_1\supset A$ et une transformation intérieure f_1 de A_1, telle que $f_1(A_1)\subset T$ et $f_1(x)=f(x)$ pour $x\in A$.*

Il existe [4]) un ensemble $R_1\supset A$, qui est un G_δ dans R et une fonction φ continue dans R_1, telle que $\varphi(R_1)\subset T$ et $\varphi(x)=f(x)$ pour $x\in A$. R_1 étant métrisable d'une manière qui le rend complet [5]), la démonstration de notre théorème se réduit à la démonstration du lemme suivant.

Lemme. *Soit R complet, séparable, $A\subset R$, f une transformation continue de R et intérieure de A. Il existe un $B\supset A$ qui est G_δ dans R et tel que f est une transformation intérieure de B.*

[1]) S. Stoilow. Ann. Ec. Norm. 1928, p. 348.
[2]) A. Lavrentieff. Fund. Math. VI, p. 149—150.
[3]) comp. N. Aronszajn. Fund. Math. XVI, p. 120.
[4]) A. Lavrentieff, l. c., p. 150.
[5]) P. Alexandroff. C. R. 178 (1924), p. 185—187, F. Hausdorff, Fund. Math. VI, p. 146—148.

Pour $x'\in R$, $\eta>0$, désignons par $S(x',\eta)$ la sphère de R de centre x' et de rayon η (= ensemble des $x\in R$ tels que $\varrho(x,x')<\eta$), par $S^*(f(x'),\eta)$ la sphère de $f(R)$ de centre $f(x')$ et de rayon η.

Définissons un système déterminant

$$\{G_{n_1,n_2,\dots,n_k}=S(a_{n_1,n_2,\dots,n_k},\ \lambda_{n_1,n_2,\dots,n_k})\}$$

et un système de nombres positifs $\{\mu_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$, satisfaisant aux conditions suivantes:

(Z₁) $$\lambda_{n_1,n_2,\dots,n_k}\leqq\frac{1}{k}\geqq\mu_{n_1,n_2,\dots,n_k};\ a_{n_1,n_2,\dots,n_k}\in A$$

(Z₂) $$\overline{G_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}}}\subset G_{n_1,\dots,n_k}$$

(Z₃) $$A\subset\sum_{n=1}^{\infty}G_n;\quad A\times G_{n_1,\dots,n_k}\subset\sum_{n=1}^{\infty}G_{n_1,\dots,n_k,n}$$

(Z₄) Si $a_{n_1,n_2,\dots,n_{k+1}}\in G_{m_1,m_2,\dots,m_l}$ et $m_1+m_2+\dots+m_l\leqq k-1$, alors:

(1) $$G_{n_1,n_2,\dots,n_{k+1}}\subset\sum_{m=1}^{\infty}G_{m_1,m_2,\dots,m_l,m}$$

(Z₅) $$f(G_{n_1,\dots,n_k})\subset S^*(f(a_{n_1,\dots,n_k}),\ \mu_{n_1,\dots,n_k})$$

(Z₆) $$f(A)\times S^*(f(a_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}}),\ \mu_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}})\subset f(G_{n_1,n_2,\dots,n_k}\times A)$$

(Z₇) Si $f(a_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}})\in f(G_{m_1,\dots,m_l}\times A)$ et $m_1+m_2+\dots+m_l\leqq k-1$, alors il existe un entier m' tel que:

(2) $$f(A)\times S^*(f(a_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}}),\ \mu_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}})\subset f(G_{m_1,m_2,\dots,m_l,m'}\times A).$$

I. Considérons la classe des sphères $S(a,\lambda)$ telles que $a\in A$, $\lambda\leqq 1$ et

(3) $$f(S(a,\lambda))\subset S^*(f(a),1)$$

la fonction f étant continue, chaque $a\in A$ est le centre d'une telle sphère.

R étant séparable il existe une suite $\{S(a_n,\lambda_n)\}$ de ces sphères telle que $A\subset\sum_{n=1}^{\infty}S(a_n,\lambda_n)$. On pose $G_n=S(a_n,\lambda_n)$, $\mu_n=1$.

II. Supposons que pour $i \leqq k$ les ensembles $G_{n_1, n_2, \ldots, n_i}$ et les nombres $\mu_{n_1, n_2, \ldots, n_i}$ sont déterminés, de manière à satisfaire aux conditions (Z_1)—(Z_7). La condition

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_i \leqq k - 1 \tag{4}$$

entraîne $i \leqq k - 1$, donc tous les $G_{m_1, m_2, \ldots, m_i}$ qui satisfont à cette condition sont déjà déterminés; ces $G_{m_1, m_2, \ldots, m_i}$ étant en nombre fini, on peut les ranger en une suite $L_1^{(k)}, L_2^{(k)}, \ldots, L_r^{(k)}$. Si $G_{m_1, m_2, \ldots, m_i} = L_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, nous poserons: $L_{j,m}^{(k)} = G_{m_1, m_2, \ldots, m_k, m}$, $m = 1, 2, \ldots$ Les ensembles $L_{j,m}^{(k)}$ sont déjà aussi déterminés.

Soit maintenant $n_1, n_2, \ldots, n_k$ une suite déterminée d'indices, et soit $a \in G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times A$.

Supposons que l'on a $f(a) \in f(L_j^{(k)} \times A)$. D'après (Z_2) et (Z_3) nous avons:

$$L_j^{(k)} \times A = \sum_{m=1}^{\infty} (L_{j,m}^{(k)} \times A) \tag{5}$$

donc:

$$f(L_j^{(k)} \times A) = \sum_{m=1}^{\infty} f(L_{j,m}^{(k)} \times A) \tag{6}$$

donc il existe un entier m_j tel que $f(a) \in f(L_{j,m_j}^{(k)} \times A)$. $L_{j,m_j}^{(k)}$ étant ouvert dans R, $L_{j,m_j}^{(k)} \times A$ est ouvert dans A, donc f étant une transformation intérieure de A, $f(L_{j,m_j}^{(k)} \times A)$ est ouvert dans $f(A)$. De même $f(G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times A)$ est ouvert dans $f(A)$. La partie commune d'un nombre fini d'ensemble ouverts étant un ensemble ouvert, — l'ensemble:

$$f(G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times A) \times \prod_{f(a) \in f(L_j^{(k)} \times A)} f(L_{j,m_j}^{(k)} \times A) \tag{7}$$

est ouvert dans $f(A)$ et contient $f(a)$. On peut par suite déterminer un nombre $\mu(a)$ tel que:

$$0 < \mu(a) \leqq \frac{1}{k+1} \tag{8}$$

$$f(A) \times S^*(f(a), \mu(a)) \subset f(G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times A) \times \prod_{f(a) \in f(L_j^{(k)} \times A)} f(L_{j,m_j}^{(k)} \times A). \tag{9}$$

Les ensembles, $G_{n_1, \ldots, n_k}$ et $L_{j,m}^{(k)}$, donc aussi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} L_{j,m}^{(k)}$ sont ouverts dans R, f est continue et d'après (Z_3) la rélation $a \in L_j^{(k)}$ entraîne $a \in \sum\limits_{m=1}^{\infty} L_{j,m}^{(k)}$; donc nous pouvons déterminer un nombre $\lambda(a)$ tel que

$$0 < \lambda(a) \leqq \frac{1}{k+1} \tag{10}$$

$$f(S(a, \lambda(a)) \subset S^*(f(a), \mu(a)) \tag{11}$$

$$\overline{S(a, \lambda(a))} \subset G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \times \prod_{a \in L_j^{(k)}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} L_{j,m}^{(k)} \right) \tag{12}$$

R étant séparable, il existe une suite de points $b_n \in A \times G_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ telle que:

$$A \times G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset \sum_{n=1}^{\infty} S(b_n, \lambda(b_n)). \tag{13}$$

Nous posons:

$$\mu_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} = \mu(b_{n_{k+1}}); \quad \lambda_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} = \lambda(b_{n_{k+1}}) \tag{14}$$

$$a_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} = b_{n_{k+1}}; \quad G_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}} = S(a_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}}, \lambda_{n_1, \ldots, n_{k+1}}). \tag{15}$$

De cette manière nous déterminons tout le système $\{G_{n_1, \ldots, n_k}\}$, $\{\mu_{n_1, \ldots, n_k}\}$. Les conditions (Z_1)—(Z_7) sont remplies. En effet, (Z_1) résulté de (8), (10), (Z_2) de (12), (Z_3) de (13), (Z_4) de (12), (Z_5) de (11), (Z_6) de (9) enfin (Z_7) de (9).

Soit

$$V_k = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} G_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{16}$$

$$B = \prod_{k=1}^{\infty} V_k \tag{17}$$

$$C = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{18}$$

V_k étant ouvert dans R, B est un G_δ dans R. D'après (Z_3) on a $A \subset V_1$ et la rélation $A \subset V_k$ entraîne:

$$(19)\qquad A = A \times V_k = \sum_{n_1,\dots,n_k} (G_{n_1,\dots,n_k} \times A) \subset \sum_{n_1,\dots,n_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_{n_1,\dots,n_k,n} \right) = V_{k+1}.$$

Donc $A \subset B$.

Soit $x \in B$ et supposons que $x \in G_{p_1,p_2,\dots,p_j}$; soit k un entier satisfaisant aux conditions:

$$(20)\qquad S\left(x, \frac{1}{k+1}\right) \subset G_{p_1,p_2,\dots,p_j}$$

$$(21)\qquad k \geqq p_1 + p_2 + \dots + p_j + 1.$$

Comme $x \in B$, on a $x \in V_{k+1}$, c. à d. il existe une suite $q_1, q_2, \dots q_{k+1}$ telle que:

$$(22)\qquad x \in G_{q_1,q_2,\dots,q_{k+1}} = S(a_{q_1,\dots,q_{k+1}}, \lambda_{q_1,\dots,q_{k+1}}).$$

Il résulte de (Z_1), (20), (22) que

$$(23)\qquad a_{q_1,\dots,q_{k+1}} \in G_{p_1,p_2,\dots,p_j}.$$

D'après (Z_4), (21), (23) on aura:

$$(24)\qquad x \in G_{q_1,q_2,\dots,q_{k+1}} \subset \sum_{p=1}^{\infty} G_{p_1,p_2,\dots,p_j,p}$$

donc il existe un p_{j+1} tel que $x \in G_{p_1,p_2,\dots,p_j,p_{j+1}}$. Il en résulte l'existence d'une suite infinie d'entiers $p_1, p_2, \dots$ telle que

$$(25)\qquad x \in \prod_{k=1}^{\infty} G_{p_1,p_2,\dots,p_k}$$

donc $x \in C$. On voit que $B \subset C$; évidemment on a aussi $C \subset B$; donc

$$(26)\qquad B = C.$$

Considérons maintenant un ensemble G ouvert dans R et soit $x \in B \times G$. D'après (Z_1) et (26) nous pouvons déterminer une suite d'entiers $p_1, p_2, \dots, p_l, p_{l+1}$ telle que:

$$(27)\qquad x \in G_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}}; \quad G_{p_1,p_2,\dots,p_l} \subset G.$$

Considérons un point y tel que:

$$(28)\qquad y \in f(B); \quad \varrho(y, f(x)) < \tfrac{1}{3} \mu_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}}.$$

Il existe un point $x_1 \in B$ tel que:

$$(29)\qquad f(x_1) = y.$$

D'après (26) nous pouvons déterminer une suite d'entiers $r_1, r_2, \dots$ telle que:

$$(30)\qquad x_1 \subset \prod_{k=1}^{\infty} G_{r_1,r_2,\dots,r_k}.$$

Déterminons maintenant deux suites d'entiers: $k_1, k_2, \dots$ et $q_1, q_2, \dots$ de manière suivante:

(I) Soit k_1 un entier satisfaisant aux conditions:

$$(31)\qquad \frac{1}{k_1} \leqq \frac{1}{3} \mu_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}},$$

$$(32)\qquad k_1 \geqq p_1 + p_2 + \dots + p_{l+1} + 2.$$

On aura d'après (28), (29), (31), (Z_1), (Z_5), (Z_6)

$$(33)\qquad f(x_1) \in f(G_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}) \subset S^*(f(a_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}), \mu_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}) \subset \\ \subset S^*(f(a_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}), \tfrac{1}{3} \mu_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}});$$

$$(34)\qquad f(a_{r_1,r_2,\dots,r_{r_1}}) \in S^*(f(x_1), \tfrac{1}{3} \mu_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}}) \subset S^*(f(a_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}}), \mu_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}})$$

$$(35)\qquad f(a_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}) \in S^*(f(a_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}}), \mu_{p_1,p_2,\dots,p_{l+1}}) \times f(A) \subset \\ \subset f(G_{p_1,p_2,\dots,p_l} \times A).$$

D'après (32), (35), (Z_7) il existe un entier q_1, tel que:

$$(36)\qquad f(A) \times S^*(f(a_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}), \mu_{r_1,r_2,\dots,r_{k_1}}) \subset f(G_{p_1,p_2,\dots,p_l,q_1} \times A).$$

II. Supposons maintenant que nous avons déterminé les entiers k_j et q_j et que l'on a:

$$(37)\qquad f(A) \times S^*(f(a_{r_1,\dots,r_{k_j}}), \mu_{r_1,\dots,r_{k_j}}) \subset f(G_{p_1,\dots,p_l,q_1,\dots,q_j} \times A).$$

Soit k_{j+1} un entier satisfaisant aux inégalités:

$$(38)\qquad k_{j+1} > k_j$$

$$(39)\qquad k_{j+1} \geqq p_1 + p_2 + \dots + p_l + q_1 + \dots + q_j + 2.$$

D'après (Z_1), (Z_2), (Z_5) on a:

$$(40)\qquad a_{r_1,\dots,r_{k_{j+1}}} \in G_{r_1,\dots,r_{k_{j+1}}} \subset G_{r_1,\dots,r_{k_j}}$$

(41) $f(a_{r_1,\dots,r_{k_{j+1}}}) \epsilon f(A) \times f(G_{r_1,\dots,r_{k_{j+1}}}) \subset f(A) \times f(G_{r_1,\dots,r_{k_j}}) \subset$
$\subset f(A) \times S^*(f(a_{r_1,\dots,r_{k_j}}), \mu_{r_1,\dots,r_{k_j}}) \subset f(G_{p_1,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j} \times A).$

D'après (39), (41) et (Z_7) il existe un q_{j+1} tel que:

(42) $f(A) \times S^*(f(a_{r_1,\dots,r_{k_{j+1}}}), \mu_{r_1,\dots,r_{k_{j+1}}}) \subset f(G_{p_1,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j,q_{j+1}} \times A).$

Mais c'est la rélation (37) où l'on a remplacé j par $j+1$. Les suites $\{k_j\}$, $\{q_j\}$ sont donc déterminées par induction et on a

(43) $$f(a_{r_1,\dots,r_{k_j}}) \epsilon f(G_{p_1,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j})$$

donc il existe un point b_j tel que:

(44) $$b_j \epsilon G_{p_1,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j}$$

(45) $$f(b_j) = f(a_{r_1,\dots,r_{k_j}}).$$

D'après (Z_1), le diamètre de $G_{p_1,p_2,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j}$ tend vers 0. Donc, R étant complet, on aura en vertu d'un théorème de M. Hausdorff[1]).

(46) $$\prod_{j=1}^{\infty} \overline{G_{p_1,p_2,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j}} = b_0.$$

Mais d'après (Z_2):

(47) $$\prod_{j=1}^{\infty} \overline{G_{p_1,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j}} = \prod_{j=1}^{\infty} G_{p_1,\dots,p_i,q_1,\dots,q_j} \subset B.$$

Donc $b_0 \epsilon B$ et comme évidemment $b_0 \epsilon G_{p_1,\dots,p_i} \subset G$, on aura $b_0 \epsilon B \times G$. D'autre part, d'après (44) $b_0 = \lim_{j\to\infty} b_j$. f étant continue il résulte de (29), (30), (45):

(48) $$f(b_0) = \lim_{j\to\infty} f(a_{r_1,\dots,r_{k_j}}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{r_1,\dots,r_k}) = f(x_1) = y.$$

Donc (28) entraîne:

(49) $$y \epsilon f(B \times G).$$

On voit que tout point de $f(B\times G)$ est un point intérieur de cet ensemble dans $f(B)$. Donc $f(B\times G)$ est ouvert dans $f(B)$ et f *est une transformation intérieure de* B c. q. f. d.

[1]) *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 318.

Warszawa 3/V 1932.

Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Théorème I: *F étant une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires de puissance du continu, il existe toujours un ensemble linéaire non dénombrable E, dont les images continues sont distinctes de tout ensemble de la famille F*[1]).

Démonstration. Dans le cas, où $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, notre théorème est évidemment vrai. (Il suffit dans ce cas prendre pour E un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$). Il suffira donc de donner une démonstration de notre théorème, en admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Admettons donc que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Soit

(1) $$E_1, E_2, E_3, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots E_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

une suite transfinie du type Ω, formée de tous les ensembles de la famille F.

La famille de tous les ensembles G_δ linéaires ainsi que la famille de toutes les fonctions continues, définies sur un ensemble linéaire donné, étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type Ω,

(2) $$f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots, \quad (\xi < \Omega)$$

formée de toutes les fonctions, dont chacune est définie et continue sur un ensemble G_δ (variable), Γ; soit Γ_α l'ensemble G_δ sur lequel est définie et continue la fonction $f_\alpha(x)$.

[1]) D'après une remarque due à M. Lindenbaum on peut encore dire que, E_1 étant un sous-ensemble quelconque de E, les images continues de E_1 sont distinctes de tout ensemble de la famille F.