Sur les fonctions quasicontinues [1]).

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

1. Introduction.

M. R. Baire a établi dans sa thèse, que la fonction $f(x, y, z)$, continue par rapport à chacune de ses trois variables, possède des points de continuité, dans chaque portion de la surface continue $z = g(x, y)$ [2]).

Or la méthode du raisonnement de M. Baire ne s'applique pas directement aux fonctions de plusieurs variables

M. H. Hahn, en se servant d'un autre raisonnement, a étendu aux fonctions de n variables un corollaire qu'on obtient du théorème cité en posant $g = \text{const}$. Il en résulte qu'une fonction de plusieurs variables, continue par rapport à chacune d'elles est ponctuellement discontinue [3]).

Du théorème de M. Hahn et d'un de ses lemmes on déduit immédiatement que la fonction de plusieurs variables, continue par rapport à chacune d'elles, jouit de la propriété plus spéciale à laquelle nous donnons ici le nom de *quasicontinuité*. Ce fait a été remarqué antérieurement par M. Volterra pour les fonctions de deux variables [4]).

En étudiant les fonctions quasicontinues, nous allons voir qu'une fonction de plusieurs variables, quasicontinue par rapport à chacune

[1]) Communication au Deuxième Congrès der Mathématiciens Polonais à Wilno, septembre 1931.

[2]) *Sur les fonctions des variables réelles*, Milan, 1899, p. 98.

[3]) *Über Funktionen mehrerer Veränderlichen,…* Math. Zeitschrift, t. 4, 1919, p. 310.

[4]) Thèse de M. Baire, p. 95.

d'elles, est quasicontinue. Comme toute fonction d'une variable unilatéralement continue est quasicontinue, une fonction unilatéralement continue par rapport à chacune des plusieurs variables est quasicontinue donc ponctuellement discontinue.

En introduisant la notion de la *quasicontinuité symétrique* nous allons établir qu'une fonction continue relativement à une variable x_i et quasicontinue par rapport à chacune des autres variables possède des points de continuité sur toute portion de l'hyperplan $x_i = \text{const}$.

Les notions de la *quasicontinuité supérieure* et de la quasicontinuité *inférieure* vont nous permettre de voir qu'une fonction ponctuellement discontinue par rapport à une des variables et quasicontinue par rapport à chacune des autres variables est ponctuellement discontinue.

En considérant des suites de fonctions *simultanément quasicontinues* nous allons montrer que la limite d'une suite de fonctions continues par rapport à chacune de ses n variables est ponctuellement discontinue.

En se servant de la quasicontinuité simultanée des fonctions, nous allons ensuite modifier la méthode de M. Baire de manière qu'elle soit applicable aux fonctions de plusieurs variables.

Enfin, en suivant un raisonnement de M. K. Bögel [1]), nous allons établir que la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continue par rapport à chacune des variables possède des points de continuité sur toute portion de l'hypersurface

$$x_n = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

g étant une fonction continue par rapport à chacune des variables.

2. Les fonctions quasicontinues.

Considérons l'espace cartesien à n dimensions composé des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'ensemble de tous les points x tels que

$$a_i < x_i < b_i,$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$, est appellé *intervalle* à n dimensions et sera désigné par $(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$.

[1]) *Über die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen,* Mathematische Annalen, t. 81 (1920).

L'intervalle $(x_1-\delta,\ x_1+\delta;\ldots;\ x_n-\delta,\ x_n+\delta)$ est un *voisinage* V_x du point $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de rayon δ.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ est *quasicontinue* au point $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ lorsque, étant donné un ε positif, il existe, dans chaque voisinage de ce point, un intervalle où $|f(x)-f(x^0)|<\varepsilon$.

Ainsi la fonction d'une variable unilatéralement continue en un point est quasicontinue. La fonction de deux variables continue en un point du côté d'un angle dont le sommet se trouve en ce point est aussi quasicontinue.

Une fonction partout quasicontinue est évidemment ponctuellement discontinue, mais il existe des fonctions ponctuellement discontinues qui ne sont pas quasicontinues; telle est, par exemple, la fonction caractéristique d'un ensemble fini de points.

Si dans chaque intervalle se trouve un point de quasicontinuité, la fonction est aussi ponctuellement discontinue, c'est à dire chaque intervalle contient un point de continuité

Nous allons voir qu'*une fonction quasicontinue par rapport à chacune des variables est quasicontinue.*

Considérons une fonction de deux variables x et y, dont x est un point d'un espace à n dimensions et y un point d'un espace linéaire [1]).

Supposons que la fonction $f(x, y)$ quasicontinue par rapport à x et à y séparement n'est pas quasicontinue par rapport à (x, y) en un point (x^0, y^0) [2]).

La fonction f étant quasicontinue relativement à x, il existe, dans le voisinage V_{x^0} de x^0 de rayon δ, un intervalle I dont les points x vérifient l'inégalité

$$|f(x, y^0)-f(x^0, y^0)|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Divisons le voisinage $(y^0-\delta,\ y^0+\delta)$ successivement en

$$2,\ 2^2,\ 2^3, \ldots\ 2^m, \ldots$$

parties égales et rangeons les intervalles partielles, provenant de toutes ces divisions, en une suite simple

$$K_1,\ K_2, \ldots,\ K_p, \ldots$$

[1]) nous n'admettons cela d'ailleurs que pour simplifier les notations.

[2]) nous désignerons par (x, y), le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$.

Désignons par A_p l'ensemble des points x appartenant à l'intervalle I et tels qu'il existe, dans le voisinage $(y^0-\delta,\ y^0+\delta)$, un intervalle J contenant K_p et dont les nombres y vérifient la condition

$$|f(x, y)-f(x, y^0|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

La fonction f étant quasicontinue par rapport à y, tout point x de I appartient à un des ensembles A_p. Il est évident que l'un de ces ensembles, soit A_{p_0}, n'est pas non dense dans l'intervalle I.

Soient: I' un intervalle arbitraire contenu dans I et $R=(I'; K_{p_0})$ le rectangle se projettant sur les „axes" de x et de y suivant les intervalles I' et K_{p_0}.

Comme la fonction $f(x, y)$ n'est pas quasicontinue au point (x^0, y^0), nous pouvons déterminer, pour δ suffisemment petit, un point (x', y') dans chaque rectangle R contenu dans le voisinage $(V_{x_0};\ y^0-\delta,\ y^0+\delta)$ de manière qu'on ait

$$|f(x', y')-f(x^0, y^0)|>\varepsilon, \tag{3}$$

La fonction f étant quasicontinue par rapport à x au point (x', y'), il existe dans I' un intervalle I'' dont les nombres x satisfont à l'inégalité

$$|f(x, y')-f(x', y')|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Les inégalités (1), (2), (3) et (4) donnent, pour x appartenant à I'',

$$|f(x, y')-f(x, y^0)|>\frac{\varepsilon}{4}.$$

Comme le nombre y' appartient à K_p, l'intervalle I'' ne contient pas des nombres x appartenant à l'ensemble A_p défini au moyen de la condition 2. Par suite, dans chaque intervalle I', contenu dans I se trouve un intervalle I'', ne contenant pas des points de l'ensemble A_{p_0}, c'est à dire cet ensemble est non dense dans I.

Nous sommes arrivés ainsi à une contradiction.

En passant au cas d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quasicontinue par rapport à chacune des variables, nous pouvons appliquer notre théorème d'abord aux variables x_1 et x_2, puis au point (x_1, x_2) et à la variable x_3 et ainsi de suite pour finir par $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ et la dernière variable x_n.

Comme toute fonction partout quasicontinue est ponctuellement discontinue, nous voyons qu'une fonction quasicontinue par rapport à chacune des variables est ponctuellement discontinue.

Ce dernier corollaire est une généralisation de la première partie du théorème suivant de M. Hahn: une fonction continue par rapport à chacune des variables est ponctuellement discontinue.

Dans la démonstration de ce théorème M. Hahn s'appuie sur un théorème auxiliaire qui peut être énoncé de la manière suivante: une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ponctuellement discontinue par rapport à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et continue par rapport à chacune de ses variables est quasicontinue [1]).

Des ces deux théorèmes de M. Hahn on déduit immédiatement le corollaire suivant: une fonction continue par rapport à chacune des variables est quasicontinue. Or nous sommes arrivés directement à ce résultat, toute fonction continue étant *à fortiori* quasicontinue.

3. Les fonctions quasicontinues symétriquement.

Nous dirons que l'intervalle à n dimensions $(a_1, b_1;\ a_2, b_2; \ldots;\ a_n b_n)$ est *coupé* par l'hyperplan $x_i = c$ quand $a_i < c < b_i$.

La fonction sera dite *quasicontinue symétriquement* par rapport à x_i au point $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, si, dans chaque voisinage de ce point, il existe un intervalle coupé par l'hyperplan $x_i = x_i^0$ et tel que

$$|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon.$$

Il est évident qu'une fonction $f(x)$ quasicontinue symétriquement par rapport à x_n est quasicontinue par rapport à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

L'ensemble défini par les conditions:

$$a_i < x_i < b_i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$x_n = c$$

est un *intervalle* de l'hyperplan $x_n = c$.

Lorsque chaque intervalle d'un hyperplan $x_n = c$ contient un point de quasicontinuité symétrique par rapport à x_n de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, chaque intervalle de cet hyperplan contient un point de continuité de cette fonction.

[1]) M. Hahn énonce dans ce théorème une propriété qui est équivalante à la quasicontinuité et qui s'obtient de celle-ci en remplaçant l'intervalle par l'ensemble ouvert (th. III, p. 100).

Ainsi une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles quasicontinue symétriquement par rapport à y jouit de deux propriétés suivantes:

1) elle est quasicontinue par rapport à x,
2) chaque intervalle de la droite parallèle à l'axe des x contient un point de continuité de $f(x, y)$.

Aucune de ces propriétés prise séparément ne suffit pour que la fonction soit quasicontinue symétriquement par rapport à y, mais il est facile à voir que toute fonction jouissant de ces deux propriétés est nécessairement quasicontinue symétriquement par rapport à y.

Comme toute fonction continue est à plus forte raison quasicontinue, nous obtenons ainsi une généralisation de la remarque de M. Volterra d'après laquelle tout fonction $f(x, y)$ continue par rapport à x et possédant des points de continuité sur chaque segment parallèle à l'axe des x jouit de la propriété qui porte ici le nom de quasicontinuité.

La remarque de M. Volterra se raportait à une fonction continue relativement à chacune des variables; tandis que M. Baire a établi que les points de continuité d'une fonction de ce genre se trouvent sur chaque segment parallèle à l'axe des x.

Il est facile à montrer directement que *toute fonction $f(x, y)$ continue par rapport à x et à y est quasicontinue symétriquement par rapport à l'une quelconque des variables.*

Soit en effet $(x^0 - \delta,\ x^0 + \delta;\ y^0 - \delta,\ y^0 + \delta)$ un voisinage plan du point (x^0, y^0). La fonction f étant continue par rapport à x, nous pouvons déterminer un nombre positif $\alpha < \delta$ dépendant de ε et tel que, pour $|x - x^0| < \alpha$, on ait:

$$|f(x, y^0) - f(x^0, y^0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Désignons par F_p l'ensemble des nombres x de l'intervalle fermé $(x^0 - \alpha,\ x^0 + \alpha)$ tels que l'inégalité $|y - y^0| \leqslant \frac{\delta}{p}$ implique

$$|f(x, y) - f(x, y^0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

La fonction f étant continue par rapport à x, cet ensemble est fermé.

Comme la fonction considérée est aussi continue par rapport à y, tout point de l'intervalle fermé $(x^0-\alpha, x^0+\alpha)$ appartient à un des ensembles F_p.

Un au moins de ces ensembles, soit F_{p_0}, n'est pas non dense et par suite, étant fermé, contient un intervalle (a, b). Soit R le rectangle $\left(a, b; y^0-\frac{\delta}{p_0}, y^0+\frac{\delta}{p_0}\right)$; il est contenu dans le voisinage considéré et de plus il est symétrique par rapport à la droite $y=y^0$. Pour tout point de ce rectangle les deux inégalités (1) et (2) ont lieu et par suite

$$|f(x, y)-f(x^0, y^0)|<\varepsilon;$$

donc la fonction f est quasicontinue par rapport à (x, y) symétriquement par rapport à y au point (x^0, y^0).

En raisonnant *ad absurdum*, on peut établir le théorème suivant, qui est plus général que celui qui vient d'être démontré: *si une fonction quasicontinue de x est continue relativement à y, elle est quasicontinue par rapport à (x, y) symétriquement par rapport à y* [1].

Il suffit pour cela de reproduire la démonstration du chapitre 2, en simplifiant la construction de l'ensemble A_p qui cette fois sera composé de points x pour lesquels l'inégalité $|y-y^0|<\frac{\delta}{p}$ implique

$$|f(x, y)-f(x, y^0)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

La fonction f étant continue par rapport à y, tout point de l'intervalle I appartient a l'un des ensembles A_{p_0}.

Enfin le rectangle R sera défini en posant

$$R=\left(I'; y^0-\frac{\delta}{p_0}; y^0+\frac{\delta}{p_0}\right).$$

En appliquant ce théorème successivement aux variables et aux systèmes des variables, on en déduit qu'*une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continue par rapport à chacune des variables est quasicontinue par rapport à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symétriquement par rapport à x_i.*

[1] La fonction $f(x, y)=1$, pour $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$, et nulle en tous les autres points est quasicontinue par rapport à chacune des variables, mais elle n'est pas quasicontinue symétriquement par rapport à y aux points $(x, 0)$, pour $x\geqslant 0$. On ne peut donc pas remplacer dans le théorème considéré la continuité relativement à y par la quasicontinuité.

Comme toute fonction quasicontinue symétriquement par rapport à x_i possède des points de continuité sur chaque segment de l'hyperplan $x_i=c$, *une fonction continue par rapport à chacune des variables est ponctuellement continue de manière qu'elle possède sur chaque intervalle d'un hyperplan $x_i=c$ des points de continuité.*

C'est bien ce corollaire qui est le théorème final du mémoire de M. Hahn.

4. Les fonctions quasicontinues supérieurement et inférieurement.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *quasicontinue supérieurement* au point $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ quand, étant donné un nombre ε positif, il existe, dans chaque voisinage de ce point, un intervalle où $f(x)<f(x^0)+\varepsilon$.

La définition de la *quasicontinuité inférieure* s'obtient en remplaçant la dernière inégalité par l'inégalité suivante $f(x)>f(x^0)-\varepsilon$.

La fonction d'une variable réelle semicontinue supérieurement (inférieurement) d'un coté, droit ou gauche, est évidemment quasicontinue supérieurement (inférieurement). En particulier une fonction monotone est partout quasicontinue supérieurement ou inférieurement. Une fonction possédant les limites unilaterales en un point est quasicontinue supérieurement ou inférieurement en ce point.

Il résulte des définitions données que la fonction quasicontinue est en même temps quasicontinue inférieurement et supérieurement, mais l'inverse n'est pas vrai. Par exemple la fonction $f(x_1)$ telle que

$$f(x_1^0-0)<f(x_1^0)<f(x_1^0+0)$$

n'est pas quasicontinue au point x_1^0.

Désignons par $m(x)$ et $M(x)$ respectivement la borne inférieure est supérieure de la fonction $f(x)$ au point x de l'espace considéré; ensuite par $mM(x)$ et $Mm(x)$ respectivement la borne inférieure de $M(x)$ et la borne supérieure de $m(x)$ au point x.

Il est aisé à voire que l'inégalité $f(x^0)\geqslant mM(x^0)$ est une condition nécessaire et suffisante de la quasicontinuité supérieure de la fonction $f(x)$ au point x^0. De même l'inégalité $f(x^0)\leqslant Mm(x^0)$ est une condition nécessaire et suffisante de la quasicontinuité inférieure de f. Par suite, si la fonction f est partout quasicontinue supérieurement (inférieurement), nous avons la relation

$$mM(x)\leqslant Mm(x)$$

qui caractérise les fonctions ponctuellement discontinues [1]). Donc une fonction partout quasicontinue supérieurement ou partout quasicontinue inférieurement est ponctuellement discontinue.

Inversement une fonction ponctuellement discontinue est en chaque point quasicontinue supérieurement ou inférieurement. En effet, si $mM(x^0) \leqslant Mm(x^0)$, l'une des inégalités caractéristiques citées a lieu.

Les fonctions qui sont ici appélées quasicontinues supérieurement interviennent dans la thèse de M. Baire. Il y a établi que la borne inférieure d'une fonction quasicontinue supérieurement et positive ne s'annule pas en tous les points d'un intervalle [2]). Nous allons appliquer plus loin cette propriété.

En reproduisant le raisonnement du chapitre 2, nous pouvons montrer qu'*une fonction quasicontinue de x et quasicontinue supérieurement de y est aussi quasicontinue supérieurement de (x, y), donc ponctuellement discontinue.*

Pour qu'une fonction de deux variables soit ponctuellement discontinue sur le plan, il suffit d'ailleurs d'admettre qu'elle est quasicontinue par rapport à une des variables et ponctuellement discontinue par rapport à l'autre. Cela résulte du théorème suivant: *Si une fonction est ponctuellement discontinue de x et quasicontinue de y, elle est quasicontinue de (x, y) en tout point de continuité par rapport à x* [3]).

Pour démontrer ce théorème il suffit d'appliquer le raisonnement du chap. 2, car la fonction ponctuellement discontinue est en chaque point quasicontinue supérieurement ou quasicontinue inférieurement.

En appliquant l'énoncé du théorème cité à x_1 et $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ et en tenant compte du théorème établi dans le chap. 2, nous voyons qu'*une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ponctuellement discontinue de x_1 et quasicontinue par rapport à chacune des autres variables est ponctuellement discontinue.*

[1]) S. Kempisty, *Sur les fonctions ponctuellement discontinues*, Comptes Rendus du Premier Congrès de Math. des Pays Slaves, 1929, p. 275.

[2]) loc. cit., p. 97.

[3]) Une fonction ponctuellement discontinue par rapport à chacune de deux variables peut être totalement discontinue; telle est p. ex. la fonction caractéristique de l'ensemble de noeuds d'un réseau si l'on ne considére dans chacun de grillages consécutifs que les noeuds qui n'appartiennent pas aux grillages précédents.

5. Les fonctions simultanément quasicontinues.

Nous dirons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont *simultanément quasicontinues* au point x^0, lorsque, étant donné ε positif, il existe un intervalle dans lequel ont lieu simultanément les inégalités:

$$|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon, \quad |g(x) - g(x^0)| < \varepsilon.$$

Ainsi une fonction continue et une fonction quasicontinue sont simultanément quasicontinues.

Il est évident que la somme de deux fonctions simultanément quasicontinues est quasicontinue.

En raisonnant comme dans le chap. 2 et en introduisant les simplifications signalés dans le chap. 3, on montre aisément que *si fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont simultanément quasicontinues par rapport à x et continues par rapport à y, elles sont simultanément quasicontinues par rapport à (x, y).*

Remplaçons dans cet énoncé d'abord x par x_1 et y par x_2, ensuite par (x_1, x_2) et x_3, par (x_1, x_2, x_3) et x_4 et ainsi de suite pour finir par $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et x_n. Nous arrivons ainsi au corollaire suivant: *si les fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont continues par rapport à chacune des variables, elles sont simultanément quasicontinues par rapport à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Nous dirons, dans la suite, qu'une fonction $f(x, y)$ est *quasicontinue par rapport à x simultanément pour les divers valeurs de y*, lorsque quelques soient y^1 et y^2, les fonctions $f(x, y^1)$ et $f(x, y^2)$ sont simultanément quasicontinues par rapport à x.

Il suit du théorème démontré qu'une fonction continue par rapport à chacune des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ est continue par rapport à $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ pour les divers valeurs de x_n.

En suivant le raisonnement de M. Lebesgue dont il se sert pour démontrer le théorème de M. Baire sur la discontinuité ponctuelle de la limite d'une suite de fonctions continues, on peut établir que *la limité d'une suite de fonctions simultanément quasicontinues est ponctuellement quasicontinue.*

Il suffit pour le voir de remarquer que l'ensemble des points x tels que

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

est *quasifermé*, ce qui veut dire qu'il contient chaque point dans le voisinage duquel il est partout dense. Or l'intersection des ensembles quasifermés est aussi quasifermé et l'ensemble quasifermé partout dense dans un intervalle contient cet intervalle.

Il résulte des théorèmes cités que *la limite d'une suite de fonctions* $f_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *continues par rapport à chacune des variables est ponctuellement discontinue.*

Par suite si une fonction de plusieurs variables possède des dérivées partielles par rapport à chacune des variables, ces derivèes partielles sont ponctuellement discontinues. Nous arrivons ainsi à un résultat établi par M. Baire au moyen d'un raisonnement spécial [1]).

La notion de quasicontinuité simultanée peut aussi servir pour établir le théorème suivant sur les fonctions composées: *si les fonctions*

$$f(y_1, y_2, \dots, y_p) \quad \text{et} \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

sont continues par rapport à chacune des variables, la fonction composée

$$f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

est quasicontinue.

En effet, la fonction f est quasicontinue par rapport à $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ et les fonctions g_i sont simultanément quasicontinues par rapport à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

En particulier, la fonction $f(x, y, g(x, y))$, composée des fonctions $f(x, y, z)$ et $g(x, y)$ continues par rapport à x, y et z, est quasicontinue par rapport à (x, y). Or cet dernier corollaire est une généralisation d'un corollaire de M. Baire d'après lequel cette fonction composée est ponctuellement continue [2]).

6. L'oscillation d'une fonction sur un segment.

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables dont x est un point d'un espace à n dimension et y un nombre réel. Considérons un *segment* $(x^0; y^0 - h, y^0 + h)$ composé des points (x, y) de l'espace à $n+1$ dimensions tels que

$$x = x^0, \quad y^0 - h < y < y^0 + h.$$

Désignons ensuite par $\omega(x; y^0 - h, y^0 + h)$ l'oscillation de la

[1]) loc. cit., p. 108.
[2]) loc. cit., p. 98.

fonction $f(x, y)$ sur ce segment. Cette oscillation est une fonction semicontinue inférieurement par rapport à (x^0, y^0), lorsque la fonction f est continue par rapport à x [1]). Il est aisé à voir que l'oscillation $\omega(x, y-h, y-h)$ est une fonction quasicontinue inférieurement de (x, y) quand f est quasicontinue par rapport à x simultanément pour les divers valeurs de y.

Or M. Baire a défini dans sa thèse [2]) la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ égale à la borne supérieure des nombres positifs h pour lesquels

$$\omega(x; y-h, y+h) \leqslant \sigma.$$

Il a établi: 1° que cette fonction est semicontinue supérieurement lorsque $f(x, y)$ est continue par rapport à chacune des variables réelles x et y; 2° qu'elle est quasicontinue supérieurement lorsque $x = (x_1, x_2)$ et f est continue par rapport à x_1, x_2 et y séparement [3]).

Or, on peut montrer aisément que $\alpha_\sigma(x, y)$ est une fonction quasicontinue supérieurement de (x, y) lorsque l'oscillation $\omega(x; y-h, y+h)$ est quasicontinue inférieurement par rapport à (x, y). En tenant compte de nos remarques concernant l'oscilation ω, nous voyons que la fonction α_σ est quasicontinue supérieurement lorsque $f(x, y)$ est quasicontinue par rapport à x simultanément pour les divers valeurs de y. En particulier cela a lieu quand f est continue par rapport à chacune des coordonnées du point x.

En se servant de la fonction α_σ et en suivant le raisonnement de M. Baire, nous pouvons démontrer le théorème suivant: si $f(x, y)$ est une fonction continue de y et quasicontinue de x simultanément pour les divers valeurs de y, chaque portion de l'hypersurface continue $y = g(x)$ contient un point de continuité de la fonction f par rapport à (x, y).

On en déduit qu'*une fonction de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ continue par rapport à chacune d'elles possède des points de continuité sur chaque portion de l'hypersurface continue* $x_n = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, ce qui est une extension aux fonctions de plusieurs variables du théorème établi par M. Baire pour les fonctions de deux et trois variables [4]).

[1]) S. Kempisty, *Sur les fonctions semicontinues par rapport à chacune des variables*, Fund. Math., t. XIV, p. 237.
[2]) loc. cit., p. 22.
[3]) loc. cit., p. 23 et 97.
[4]) loc. cit., p. 27 et 99.

Or, en suivant un raisonnement de M. Bögel, nous allons voir que ce théorème subsiste quand la fonction g est continue par rapport à chacune de ses variables.

Il suffit pour cela de montrer que *la fonction $f(x, y)$ quasicontinue relativement à x et continue relativement à y possède des points de continuité sur toute portion de l'hypersurface quasicontinue $y=g(x)$.*

La quasicontinuité de la fonction f par rapport à x implique la propriété suivante de cette fonction: si chaque intervalle $R=(I; a, b)$ contient un intervalle $R'=(I', a, b)$ dans les points duquel l'oscillation $\omega(x, y)$de la fonction $f(x, y)$ est au moins égale à γ, on peut déterminer, dans I, un intervalle I' des points x pour lesquels on a

$$\omega(x; a, b) \geqslant \gamma - \varepsilon\ ^{1)}.$$

Comme la fonction f est continue par rapport à y, son oscillation par rapport à y est nulle, c'est à dire on a

$$\omega_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \omega(x; y-h, y+h).$$

Si la fonction f n'est pas ponctuellement discontinue par rapport à (x, y), l'ensemble de points (x, y) où on a

$$\omega(x, y) \geqslant \gamma$$

n'est pas non dense. Or cet ensemble est fermé, il contient donc une portion de l'hypersurface quasicontinue $y=g(x)$.

Soit $R=(I; a, b)$ un intervalle tel que chaque segment $(x; a, b)$ coupe la portion considérée dès que x appartient à I [2]. L'oscillation de la fonction $f(x, y)$ dans R est alors au moins égale à γ.

Soit ensuite $R_1=(I_1; a, b)$ un intervalle contenu dans R et tel que, d'après la propriété citée, on a

$$\omega(x; a, b) \geqslant \gamma - 1.$$

Si $R_{n-1}=(\bar{I}_{n-1}; a_{n-1}, b_{n-1})$ est donné, nous pouvons déterminer dans cet intervalle un autre intervale $R_n=(I_n; a_n, b_n)$ tel qu'on ait

$$b_n - a_n < \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad \omega(x; a_n b_n) \geqslant \gamma - \frac{1}{n},$$

[1]) En se servant de la continuité f par rapport à y, on peut montrer que cette propriété a lieu quand f est quasicontinue par rapport à x pour y formant un ensemble partout dense.

[2]) $g(x)$ étant quasicontinue nous pouvons toujoues choisir I de manière que $b-a$ soit inférieur à un nombre arbitraire positif.

pour chaque point x appartenant à I_n. Nous définissons ainsi une suite des intervalles R_n dont les projections sur l'axe de y tendent vers un point.

Or, pour le point (x^0, y^0) commun à tous les intervalles R_n, nous avons

$$\omega_y(x^0, y^0) \geqslant \gamma > 0,$$

contrairement à l'hypothèse $\omega_y(x, y) = 0$.

La fonction $f(x, y)$ est donc ponctuellement discontinue, en tout point (x, y).

Le théorème démontré implique le corollaire suivant: *si les fonctions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ sont continues par rapport à chacune des variables, la fonction f possède des points de continuité sur chaque portion de l'hypersurface $y=g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.*

De plus, en vertu de la remarque [1]) il suffit d'admetre que la fonction f est continue par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour un ensemble partout dense des valeurs de x_n.