l'axe $0x$ l'ensemble parfait P de Cantor et, pour chaque $\xi \epsilon P$, le segment S_ξ à extrémités $(\xi, 0)$ et $(\xi, \frac{1}{2})$, parallèle à $0y$. Soit $[\xi_1; \xi_2]$ un segment contigu à l'ensemble P et $\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{2} 3^{-n}$. Prenons à présent la partie du continu B_α située entre les segments S et $[t_{2n}; t'_{2n}]$ (cf. **11**., p. 131), y compris ces segments, et transportons la par translation de sorte que S coïncide avec S_{ξ_1} et $[t_{2n}; t'_{2n}]$ avec S_{ξ_2}. Pour chaque segment contigu $[\xi_1; \xi_2]$ on obtient ainsi un continu $C(\xi_1, \xi_2)$ unissant les segments S_{ξ_1} et S_{ξ_2}.

Le continu cherché C est formé de la somme de tous ces continus $C(\xi_1, \xi_2)$, de tous les segments S_ξ et du segment $[0; \frac{1}{2}]$ de l'axe $0x$.

15. Nous avons déjà mentionné quelques problèmes se rattachant aux considérations de ce travail. Signalons en encore les suivants:

1) *Quel est le plus grand ordre* $\omega_i(C)$ *d'un continu* C, c. à d. l'ordre du continu R de **13.**?

2) *Existe-t-il une classe de puissance* $\mathfrak{c}$ *de continus „arcwise connected" incomparables* c *deux à deux?*

Remarquons que les types c des continus C „arcwise connected", définis dans **14.**, forment une suite qui, en vertu de (39), n'est pas croissante. Si l'on démontre qu'elle n'est pas en même temps décroissante, on sera en présence de $\aleph_1$ continus „arcwise connected" incomparables c. Si on démontre au contraire que cette suite est décroissante, on aura un ensemble ordonné du type Ω^* des continus C, c. à d. la réponse affirmative à un des problèmes posés dans **12.**, p. 136.

3) *Les fonctions* $\tau^{i,\alpha}$ *sont-elles indépendantes* (en dehors des conditions de 10!)? Plus précisément: étant données deux suites $\{\mathfrak{m}_\alpha^0\}$ et $\{\mathfrak{m}_\alpha^1\}$ de nombres cardinaux, où $\alpha < \Gamma$ et Γ est un nombre ordinal, assujetties aux conditions :

$$\mathfrak{m}_\alpha^0 \leqslant \mathfrak{m}_\alpha^1 \quad et \quad \mathfrak{m}_\alpha^i \leqslant \mathfrak{m}_\beta^i \quad pour \quad \alpha < \beta \quad et \quad i = 0 \quad où \quad 1,$$

existe-t-il toujours un espace (un continu?) E^0 tel que l'on ait

$$\tau^{i,\alpha}(E^0) = \mathfrak{m}_\alpha^i \quad pour\ tout \quad \alpha < \Gamma \quad et \quad i = 0 \quad où \quad 1?$$

Sur la deuxième définition des ensembles finis donnée par Dedekind.

Par

J. Cavaillès (Paris).

On connaît le passage de la préface de la deuxième édition de „*Was sind und was sollen die Zahlen*", où Dedekind après avoir énoncé sa seconde définition des ensembles finis (un ensemble S est dit fini lorsqu'on peut l'appliquer en lui-même de telle sorte qu'aucune vraie partie de S ne soit appliquée en elle-même) ajoute: „Nun mache man einmal den Versuch auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu errichten", promettant les plus grandes difficultés à celui qui voudrait développer cette définition sans le secours de la suite des nombres naturels.

Dans son ouvrage sur les ensembles finis (*Fund. Math.* T. VI p. 45) M. Tarski, après avoir cité ce texte, écrit: „nos recherches nous conduisent à une conclusion bien différente; si on admet le théorème 52 (où il démontre l'équivalence avec la définition dont il est parti) comme définition d'ensemble fini, on en déduit sans difficulté les théorèmes les plus importants sur les ensembles finis et on prouve son équivalence à la définition habituelle arithmétique" (ibid. p. 92).

Dedekind avait pourtant fait la tentative ainsi qu'en témoigne un opuscule resté manuscrit et que publie Mlle Noether dans le tome III des Oeuvres complètes. Il n'y atteint aucune des propriétés essentielles des ensembles finis, mais les notions qu'il y introduit et les théorèmes qu'il y démontre permettent d'en retrouver sans effort quelques-unes.

Supposons établie la correspondance qui applique d'une façon univoque l'ensemble fini S en lui-même et aucun vrai sous-ensemble de S en lui-même; si s est un élément de S, s' sera son image. On a $S' \subset S$ (S' étant l'ensemble de tous les s') [1])

1° Tout élément s est image d'un élément r tel que:

$$r' = s$$

2° $$s \neq s'$$

3° L'application est biunivoque.

Soit H_s un sous ensemble de S tel que tout élément de H_s ait son image dans H_s sauf en général s:

$$\text{si} \quad H'_s \subset H_s \quad \text{on a} \quad H_s = S.$$

Nous appellerons as la partie commune à tous les H_s qui contiennent l'élément a [2]).

Dedekind démontre facilement les propriétés suivantes:

4° as est un H_s c'est-à-dire: l'image de tout élément de as différent de s est contenue dans as.

5° $$s\,s = (s)$$

6° $$s'\,s = S$$

7° $$\text{Si} \quad b \,\varepsilon\, as \quad \text{on a} \quad bs \subset as$$

8° $$as = (a) + a's$$

Si $a \neq s$, a est extérieur à $a's$

9° Si abc sont trois éléments distincts de S on a toujours:

$$\text{ou bien} \quad b'c = b'a + a'c$$
$$\text{ou bien} \quad b'c = b'a \times a'c.$$

[1]) Les notations sont celles employées habituellement, en particulier par M. Tarski: les minuscules designent des éléments, les majuscules des ensembles; un ensemble composé du seul élément s'écrit (a); on a en particulier:

pour a appartient à A	$a \in A$
a n'appartient pas à A	$a \,\bar{\in}\, A$
A est sous-ensemble de B	$A \subset B$
Somme des ensembles A et B	$A + B$
partie commune aux ensembles A et B	$A \times B$
image de a dans l'application φ	$\varphi(a)$
image de A dans l'application φ	$\varphi(A)$
l'ensemble A fait partie de la classe K	$A \in K$

[2]) Il est assez remarquable que M. Tarski sans connaître cet inédit utilise la même notion pour démontrer l'équivalence de sa définition avec celle qui nous occupe; c'est d'ailleurs une transposition de la chaîne.

Il termine enfin par la définition du mode de correspondance que nous appellerons Ψ entre les éléments de S et ceux d'un vrai sous-ensemble T de S: il y a toujours, démontre-t-il, si s est un élément de S, un élément s_1 et un seul satisfaisant aux quatre conditions:

a) si a est un élément tel que

$$T \subset as, \quad \text{on a} \quad s_1 s \subset as$$

b) $$T \subset s_1 s.$$

c) $$s_1 \in T$$

d) Le segment ss_1 ne contient aucun élément de T distinct de s et de s_1.

On peut remarquer que la condition a) est une suite de c), en vertu de la propriété 7.

Ceci posé (et là s'arrète le memoire de Dedekind) on peut démontrer:

Théorème I. *Tout sous ensemble d'un ensemble fini est fini.* Soit T un sous-ensemble quelconque, par rapport auquel est définie la correspondance Ψ précédente: nous désignerons dans cette correspondance l'homologue d'un élément s par s_1, pour le distinguer de son image s', obtenue par l'application primitive.

Lemme I.: a et s étant deux éléments quelconques de S:

$$as' = as + (s')$$

(Dedekind se borne à démontrer que $as' \subset a's + (s')$ ce qui est évident par la définition du segment).

Il suffit de remplacer dans les équations (9) abc respectivement par s, a, s' (qui par hypothèse sont distincts)

$$\text{ou} \quad a'\,s' = a'\,s + s'\,s'$$
$$\text{ou} \quad a'\,s' = a'\,s \times s'\,s'$$

Mais le deuxième cas est impossible car on aurait $a'\,s' = (s')$ donc $a' = s'$ or $a \neq s$.

Donc on doit prendre le premier, et, comme a est extérieur à $a'\,s'$, on peut écrire:

$$a\,s' = as + (s').$$

Lemme II.: Dans l'application Ψ, s étant un élement de S, son homologue s_1 est déterminé par l'alternative:

1) ou $s' \in T$, alors $T \subset s's = S$.

Comme ss' ne contient d'autre élément que s, s' les conditions b)—d) sont remplies:

$$s' = s_1$$

2) ou $s' \bar{\in} T$, alors considérons l'homologue $(s')_1$ de s', on a

$$T \subset (s')_1 s' = (s')_1 s + (s')$$

donc

$$T \subset (s')_1 s, \quad \text{et} \quad (s')_1 \in T$$

enfin

$$s(s')_1 = s'(s')_1 + (s)$$

le premier terme du deuxième membre par hypothèse ne contenant de T que $(s')_1$. Donc les conditions b) — d) sont remplies pour $(s')_1$ comme homologue de s: s et s' ont dans ce cas le même homologue.

e) Le théorème I s'en déduit sans peine: Si l'application Ψ transformait un vrai sous-ensemble U de T en lui-même:

$$U_1 \subset U$$

soit V l'ensemble des éléments de S dont les homologues font partie de U, on aurait $V = S$.

En effet si $v \in V$:

ou $v' \in T$ alors $v' = v_1, v_1$ est un u,

donc l'homologue de v' fait aussi partie de U

ou $v' \bar{\in} T$ alors $(v')_1 = v_1$

or par hypothèse v_1 est un u, donc l'homologue de v' aussi, donc

$$V' \subset V, \quad V = S.$$

Or ceci est impossible, car, U étant vraie partie de T, il y a un élément t de T extérieur à U; t, comme élément de S, est image d'un autre élément k, donc

$$k_1 = t \quad \text{puisque} \quad k' = t \quad \text{(lemme II)}$$

donc

$$k \bar{\in} V$$

Théorème II. *Si A est un ensemble fini, l'ensemble $A + (b)$, est fini, $b)$ étant extérieur à A.*

En effet considérons la transformation qui applique A en lui-même; soit a un élément quelconque de A, considérons la nouvelle application H qui donne à a pour image b, à b pour image a' et conserve tous les autres rapports: nous transformons ainsi $A + (b)$ en lui-même. Soit U un vrai sous-ensemble de A: s'il était appliqué en lui-même, il devrait renfermer les éléments a, b, a', dont les rapports ont été changés, et les renfermer tous les trois. Dans la première application l'élément dont l'image est hors de U et qui maintenant a son image en U ne peut être que a: or a' est dans U.

Théorème III. (Principe d'induction complète). *S'il existe une classe K telle que:*

1° *Il y a un élément s de l'ensemble fini S possédant la propriété $(s) \in K$*

2° *$B + (s) \in K$ lorsque $B \in K$, $s \in S$,*

on a $S \in K$.

En effet:

Lemme: s'il existe un segment sb tel que $sb \in K$ on a $S \in K$.

En effet $sb' = sb + (b')$.

Donc le système H des éléments b tels que $sb \in K$ a la propriété $H' \subset H$, $H = S$.

Donc en particulier, si r est l'élément tel que $r' = s$ on a

$$sr \in K \quad \text{or} \quad r'r = S$$

donc $S \in K$.

Or par hypothèse le segment $ss = (s)$ est élément de K.

Donc le théorème est établi.

Corollaire I.: *La classe des sous-ensembles d'un ensemble fini S est finie.*

En effet, soit un ensemble A tel que la classe de ses sous-ensembles soit finie, soit un élément b tel que: $b \in S$, $b \bar{\in} A$, la classe des sous-ensembles de $A + (b)$ est finie: $A + (b)$ est fini (théorème II), et tout sous-ensemble de $A = (b)$ est: ou (b) ou un sous-ensemble de A auquel s'ajoute l'élément b. La classe de la deuxième catégorie étant finie, la classe totale qui en dérive par la seule adjonction de (b) est finie.

Or le sous-ensemble (s), de S a la classe de ses sous-ensembles finie, donc...

Corollaire II. *Si un ensemble S est fini il est impossible d'appliquer d'une façon biunivoque S sur un de ses vrais sous-ensembles.*

Par induction complète:

1° s étant un élément de S le théorème est vrai pour l'ensemble (s)

2° s'il est vrai pour l'ensemble A, il est vrai pour $A + (b)$, b étant un élément de S.

La réciproque, qui établirait l'équivalence des deux définitions ne semble pas pouvoir être démontrée sans l'aide de la suite des entiers, comme disait Dedekind (cf. Zermelo Acta Math. t. 32, p. 190).

Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque.

Par

Eduard Čech (Brno).

Dans les dernières années, plusieurs auteurs [1]) ont développé une théorie de l'homologie dans un espace *métrique et compact* R. Voici la manière de procéder de M. Alexandroff: D'après le théorème de Borel, on peut recouvrir R par un système *fini*

$$U_1,\ U_2, \ldots,\ U_k \tag{1}$$

d'ensembles ouverts [2]) dont la norme (= maximum des diamètres des ensembles (1)) est inférieure à un nombre positif donné. Or on déduit de (1) un complexe (abstrait) N dont les sommets $a_1, a_2, \ldots, a_k$ correspondent aux ensembles (1), les sommets $a_{\nu_0}, a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ déterminant un n-simplexe de N si et seulement si les ensembles correspondants $U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_n}$ ont un point commun. Ceci étant, on considère une suite de recouvrements tels que (1), dont les normes

[1]) P. Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, Annals of Math., (2) 30, 1929; p. 101—187, où l'on trouve cités les travaux antérieurs du même auteur.

S. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 12, 1930, Chap. 7, § 4.

L. Vietoris, Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Annalen, 97, 1927, p. 454—472.

Pour le cas particulier où l'espace R est une partie du plan euclidien, v. déjà L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve, Math. Annalen, 72, 1912, p. 422—425.

[2]) M. Alexandroff considère des ensembles *fermés*; mais cette différence n'est pas essentielle (v. ce Mémoire, V, 8).