Sur les invariants des transformations continues d'ensembles.

Par

N. Aronszajn (Varsovie).

La théorie des ensembles de points n'a considéré jusqu'à present que bien peu de propriétés invariantes envers les transformations continues: on n'en connait que quelques unes. Or, plusiers problèmes modernes nécessitant une telle étude, je me suis proposé de développer une méthode générale permettant d'en obtenir autant que l'on veut à l'aide des propriétés connues. La construction d'une telle classe de nouveaux invariants des transformations continues d'ensembles, de même que leurs applications, constituent l'objet principal de cet ouvrage [1]).

Après quelques préliminaires, je donne dans la *première partie* une théorie générale consistant à définir des différentes classes de tels invariants à l'aide des propriétés topologiques W quelconques assujetties à certaines conditions (voir n° **10**). Ces conditions étant satisfaites en particulier pour trois propriétés connues que je désigne respectivement par W_0, W_1 et W_2, à savoir: la connexité, la propriété d'être un continu et celle d'être un continu localement connexe (image continue du segment rectiligne; appelée aussi „continu Péanien"), je m'arrête tout spécialement sur ces dernières propriétés et sur les classes d'invariants qui en proviennent par l'application de la méthode générale (voir les n° munis d'apostrophe).

La *deuxième partie* est consacrée aux applications. J'y construis plusieurs exemples qui permettent de résoudre divers problèmes

1) Ces résultats ont été présentes à la séance du 31 octobre 1930 de la Soc. Polon. de Mathém. Section de Varsovie.

concernant les transformations continues (voir n° **12**), en particulier celui de l'existence d'une classe indénombrable de continus dont aucun n'est une image continue d'un autre [2]). J'y signale enfin quelques problèmes qui s'imposent en relation avec les matières traitées, mais qui restent ouverts jusqu'à présent.

Préliminaires.

Un ensemble abstrait E est appelé *espace*, lorsqu'une notion de limite (L) y est définie, c. à d. que pour chaque suite de points $\{x_n\}$ et chaque point p de E il est déterminé si p est la limite de $\{x_n\}$ (en symboles: $p = L\{x_n\}$) ou non [3]).

L'ensemble abstrait dont les éléments forment les points d'un espace sera appelé la *base* de cet espace.

Dans le même ensemble abstrait on peut définir des différentes notions de limite et obtenir ainsi des différents espaces ayant la même base.

Soit E^0 un espace à la base E et à la notion de limite (L). Nous appelons M^0 un *sous-espace* de E^0 (en symboles: $M^0 \subset E^0$), lorsque M^0 est un espace à la base $M \subset E$ et à la limite (L') coincidant avec (L) dans M, c. à d. telle que pour toute suite $\{x_n\} \subset M$ et tout point $p \in M$, les formules $L\{x_n\} = p$ et $L'\{x_n\} = p$ soient équivalentes. A chaque sous-ensemble M de la base E correspond univoquement un sous-espace M^0 de l'espace E^0 ayant M pour base.

Soient E_1^0 et E_2^0 deux espaces avec les bases E_1 et E_2 et avec les notions de limite respectives (L_1) et (L_2). Soit encore f une transformation univoque de E_1 en E_2 (en symboles: $f(E_1) = E_2$). On appelle f transformation *continue* de l'espace E_1^0 en E_2^0, lorsque $L_1\{x_n\} = p$ entraîne $L_2\{f(x_n)\} = f(p)$ pour tout point p et toute suite $\{x_n\}$ de points de E_1^0. Etant donnés deux espaces E^1 en E^2 à la même base E, nons appellerons *transformation par coïncidence*

2) Le premier exemple de ce genre a été donné par M. Z. Waraszkiewicz, Fund. Math. XVIII, p. 118. Un autre exemple a été trouvé par M. B. Knaster (non publié). L'un comme l'autre reposent sur des considérations tout à fait différentes des nôtres.

3) Les espaces de ce genre ont été introduits par M. Fréchet, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906); v. aussi *Les espaces abstraits* (Paris, 1929), p. 164. Ils y sont appelés „espaces (L)"; ici le symbole (L) sera employé pour désigner la notion de limite.

de E^1 en E^2 la transformation qui à chaque point x de E^1 fait correspondre le point de E^2 formé de même élément de la base E que le point x. Il est évident, que la transformation par coïncidence est biunivoque.

Pour que la transformation par coïncidence de E^1 en E^2 soit continue, il faut et il suffit que $L^1\{x_n\}=p$ entraîne toujours $L^2\{x_n\}=p$, où (L^1) et (L^2) désignent les notions de limite dans E^1, resp. E^2. Cette importante relation entre les notions de limite (L^1) et (L^2), déterminées dans le même ensemble-base, sera écrite en symboles

$$(L^1) \lhd (L^2) \quad \textit{ou} \quad (L^2) \rhd (L^1).$$

Nous avons un *espace métrique*, lorsque dans un ensemble abstrait E (appelé la *base* de cet espace) on a défini une *métrique* (ϱ), c. à d. lorsqu'on a fait correspondre à chaque couple d'éléments $(x, y) \subset E$ un nombre $\varrho(x, y) \geqslant 0$ assujetti aux trois conditions connues de M. Fréchet[4]).

Une métrique (ϱ) détermine univoquement de la manière habituelle une notion de limite (L) à savoir $L\{x_n\}=p$ pour $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(p, x_n)=0$, de sorte que tous les espaces métriques forment en même temps des espaces avec une notion de limite.

Soit E^0 un espace métrique à la base E et à la métrique (ϱ). Nous appelons M^0 un *sous-espace* de E, en symboles $M^0 \subset E^0$, lorsque M^0 est un espace métrique avec la base $M \subset E$ et la métrique (ϱ') égale à (ϱ) dans M, c. à d. que l'on a $\varrho'(x, y)=\varrho(x, y)$ pour $(x, y) \subset M$. Ainsi à chaque sous-ensemble M de la base E vient correspondre univoquement un sous-espace métrique M^0 de l'espace métrique E^0 ayant la base M.

Soient (ϱ^1) et (ϱ^2) deux métriques définies dans le même ensemble-base E. Nous écrirons

$$(\varrho^1) \lhd (\varrho^2) \quad \textit{ou} \quad (\varrho^2) \rhd (\varrho^1),$$

lorsque $\varrho^1(x, y) \geqslant \varrho^2(x, y)$ pour chaque couple $(x, y) \subset E$[5]).

[4]) Ce sont les conditions: 1) $\varrho(x, x)=0$, 2) $\varrho(x, y)=\varrho(y, x)>0$ *pour* $x \neq y$ et 3) $\varrho(x, y)+\varrho(y, z) \geqslant \varrho(x, z)$: cf. M. Fréchet, l. c., p. 61 et F. Hausdorff, *Mengenlehre* (1927), p. 94.

[5]) Dans l'ensemble des fonctions (définies dans l'intervalle fermé $[0; 1]$ de nombres réels) bornées et mesurables au sens de M. Lebesgue on définit p. ex. pour tout p naturel les métriques $\varrho^{(p)}(f_1, f_2)=\left[\int_0^1 |f_1(x)-f_2(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Pour $p_1<p_2$ on a alors $(\varrho^{(p_1)}) \rhd (\varrho^{(p_2)})$.

Il est évident que, (L^1) et (L^2) désignant les notions de limite déterminées par (ϱ^1) et (ϱ^2), la formule $(\varrho^1) \lhd (\varrho^2)$ entraîne la formule $(L^1) \lhd (L^2)$.

Soit E^0 un espace métrique à la métrique (ϱ). Pour $p \in E^0$ et $\eta>0$ nous posons

$S(p, \eta)=$ *l'ensemble de tous les* $x \in E^0$ *pour lesquels* $\varrho(p, x)<\eta$.

Nous appelons $S(p, \eta)$ la *sphère* (*ouverte*) de centre p et de rayon η.

Pour $M \subset E^0$ nous posons

$$\delta(M)=\sup_{(x, y) \subset M} \varrho(x, y)$$

et appelons $\delta(M)$ le *diamètre* de M.

Lorsque les signes de la métrique porteront des indices, nous assignerons les mêmes indices aux signes de la sphère et du diamètre p. ex. pour les métriques (ϱ^1), (ϱ_2), (ϱ_1^*) on aura les sphères S^1, S_2, S_1^*, et les diamètres δ^1, δ_2, δ_1^*.

Soient E_1^0 et E_2^0 deux espaces métriques avec les bases E_1 et E_2 et avec les métriques (ϱ_1) et (ϱ_2) respectivement. Soit encore f une transformation univoque de E_1 en E_2: $f(E_1)=E_2$. Nous appelons *module* de f par rapport aux espaces E_1^0 et E_2^0 la fonction $\mu(p, \eta)$ du point variable $p \in E_1^0$ et du nombre positif η, définie par l'équation suivante:

$$\mu(p, \eta)=\tfrac{1}{2}\,\delta_2[f(S_1(p, \eta))].$$

On démontre facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que f soit une transformation continue de E_1^0 en E_2^0 est que le module $\mu(p, \eta)$ remplisse la condition

$$\lim_{\eta\to 0} \mu(p, \eta)=0 \quad \textit{pour chaque} \quad p \in E_1^0.$$

Deux métriques (ϱ^1) et (ϱ^2) définies dans le même ensemble-base E seront dites *équivalentes*, lorsqu'elles déterminent la même notion de limite. En désignant par E^1 et E^2 les espaces métriques formés de la base E par les métriques (ϱ^1) et (ϱ^2) respectivement, on voit immédiatement que, pour l'équivalence des métriques (ϱ^1) et (ϱ^2), il faut et il suffit que les transformations par coïncidence de E^1 en E^2 et de E^2 en E^1 soient continues.

Soit E^0 un espace à la base E et à la notion de limite (L). Nous dirons qu'une métrique (ϱ), définie dans E *convient* à cet espace E^0 ou à cette notion de limite (L), lorsque la notion de limite déterminée dans E par (ϱ) coïncide avec (L). On sait qu'il existe des espaces pour lesquels on ne peut pas définir une métrique convenable. L'espace pour lequel la définition d'une telle métrique est possible est appelé *métrisable.*

Soit $\{x_n\}$ une suite de points d'un espace métrique E^0 à la métrique (ϱ^0). On dit que $\{x_n\}$ forme une *suite de* Cauchy (par rapport à la métrique (ϱ^0)), lorsque pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_ε tel que l'on ait pour $i > N_\varepsilon < j$ l'inégalité $\varrho^0(x_i, x_j) < \varepsilon$. On appelle *complet* [6]) tout espace métrique dont chaque suite de Cauchy est convergente (admet un point limite); la métrique d'un space complet est dite métrique *complète.*

Un espace où l'on peut définir une métrique complète convenable est un G_δ *absolu* [7]); il est caractérisé par le fait que dans chaque espace métrisable qui le contient il forme un ensemble G_δ (la partie commune d'une suite dénombrable d'ensembles ouverts) [8]).

Pour terminer, ajoutons les indications suivantes:

Soient E la base commune des espaces E^0, E^1, E^2,.... et M^0 un sous-espace de E^0. Nous désignerons souvent, pour simplifier les énoncés, par le même signe (dans le cas présent par M^0) le sous-espace d'un autre espace E^k, p. ex. E^2, ayant la même base que M^0. Nous exprimerons ce passage, en disant que M^0 est considéré „comme sous-espace de E^2" ou „dans l'espace E^2" ou bien en écrivant $M^0 \subset E^2$. Parfois nous indiquerons ce passage, en appliquant à M^0 des notions n'ayant le sens que pour les sous-espaces de E^2 (p. ex. le signe de diamètre avec des indices correspondants).

[6]) Cf. M. Fréchet, l. c, p. 74.

[7]) Chez M. F. Hausdorff, l. c., p. 121, le terme „G_δ-absolu" a une signification différente: il ne considère, en effet, que des espaces *métriques*, de sorte que la notion „métrisable" y serait dépourvue de sens. Il est d'autant plus intéressant de noter que, malgré la différence des notions, les G_δ-absolus au sens de M. Hausdorff forment, comme espaces *topologiques* (c. à d. considérés sans leur métrique, mais seulement avec leur notion de limite), la même classe d'espaces que les G_δ-absolus au sens adopté ici. Ces derniers coïncident en outre avec les espaces *complets* de M. Fréchet (cf. *Les espaces abstraits*, p. 74).

[8]) Cf. F. Hausdorff, l. c., p. 214, III, où l'énoncé semble être tout à fait différent du nôtre (à cause de la différence des notions de G_δ-absolu). Or, notre assertion en résulte quand-même facilement.

Dans cet ouvrage nous ne considérerons que des espaces métriques de diamètre $\leqslant 1$ (car on peut toujours remplacer une métrique quelconque par une métrique équivalente, remplissant cette condition).

Première Partie.

1. Soit W une propriété topologique [9]) d'un ensemble M situé dans un espace E [9']). Nous n'envisagerons dans la suite que des propriétés remplissant les conditions:

(α) *Un ensemble* $(p) \subset E$ *formé par un point unique* p *possède toujours la propriété* W.

(β) *Si les ensembles* $M_1 \subset E$ *et* $M_2 \subset E$ *où* $M_1 \cdot M_2 \neq 0$ *possèdent la propriété* W, *il en est de même de l'ensemble* $M_1 + M_2$ [10]).

1'. Désignons respectivement par W_0, W_1 et W_2 les propriétés de l'ensemble M d'être *connexe*, d'être un *continu* [11]) et d'être un *continu Péanien* [12]).

Ces propriétés W_i (où $i = 0$, 1 et 2) remplissent, comme on prouve sans peine, la condition (β). Pour qu'elles remplissent aussi la condition (α), il faut et il suffit de considérer tout ensemble se réduisant à un point comme à la fois connexe, continu et continu Péanien; c'est ce que nous ferons toujours dans la suite.

Les propriétés W_i en question ne dépendent évidemment pas de l'espace contenant M; elles dépendent seulement de l'ensemble M lui-même: ce sont des propriétés *intrinsèques* de M [12']).

Nous connaîtrons plus loin (voir **10**, Remarques 1 et 2) des propriétés satisfaisant aux conditions (α) et (β) (ainsi qu'à d'autres

[9]) c. à d. une propriété qui ne dépend que de la notion de limite dans E^0 et non de la métrique. Dans tout ce travail la lettre W sera employée pour désigner une telle propriété.

[9']) En termes exacts il faudrait dire que W est une fonction propositionnelle $W(M, E)$ contenant comme variables libres les espaces M et E (donc, les deux notions de limite) et telle que $W(M, E)$ entraîne la relation $M \subset E$.

[10]) Les conditions (α) et (β) sont évidemment indépendantes.

[11]) c. à d. un ensemble (espace) compact en soi et connexe.

[12]) c. à d. une image continue d'un segment rectiligne (intervalle fermé de nombres réels); terme équivalent: *continu localement connexe.*

[12']) En termes exacts (comp. [9'])): Une propriété $W = W(M, E)$ est intrinsèque lorsqu'elle satisfait à la condition: *si* $W = W(M, E)$ *est vraie pour un* $E \supset M$, *elle est vraie pour chaque* $E \supset M$. Donc, une propriété intrinsèque $W(M, E)$ est équivalente à l'ensemble des propriétés $W(M, M)$ et $M \subset E$.

conditions auxquelles nous allons assujettir des propriétés W), mais qui dépendent en outre de l'espace contenant M.

2. Soit E^0 un espace métrique ayant la base E et la métrique (ϱ^0). Nous allons définir dans la même base E une suite transfinie des métriques $(\varrho^{W,\alpha})$. Nous obtiendrons de cette manière une suite transfinie des espaces métriques $E^{W,\alpha}$.

Déf. 1. *Posons* $(\varrho^{W,0})=(\varrho^0)$ *et* $E^{W,0}=E^0$. *Les métriques* $(\varrho^{W,\xi})$ *et les espaces* $E^{W,\xi}$ *de diamètre* $\leqslant 1$ *pour tous les* $\xi<\alpha$ *supposés définis, soit pour chaque couple d'éléments* $(x,y)\subset E$:

$$\varrho^{W,\alpha}(x,y)=\sup_{\xi<\alpha}\inf_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi), \tag{1}$$

où M^ξ parcourt tous les sous-ensembles de l'espace $E^{W,\xi}$ qui contiennent x et y et possèdent la propriété W, et

$$\varrho^{W,\alpha}(x,y)=1 \tag{1'}$$

dans le cas où de tels ensembles M^ξ sont en défaut pour un $\xi<\alpha$.

Il faut démontrer que la métrique $(\varrho^{W,\alpha})$ donnée par la Déf. 1 existe.

En effet, on a d'abord selon (1) ou (1')

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & \varrho^{W,\alpha}(x,y)\geqslant\inf\limits_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi)\geqslant\varrho^{W,\xi}(x,y)\geqslant 0\\ \text{ou bien} & \\ (2') & \varrho^{W,\alpha}(x,y)=1\geqslant\delta^{W,\xi}(E^{W,\xi})\geqslant\varrho^{W,\xi}(x,y)\end{array}\right\}\ \textit{pour tout}\ \xi<\alpha,$$

de sorte que $\varrho^{W,\alpha}(x,y)=0$ entraîne en tout cas $\varrho^{W,\xi}(x,y)=0$ et par conséquent, $(\varrho^{W,\xi})$ étant par hypothèse une métrique, $x=y$. Réciproquement, lorsque $x=y$, l'ensemble (x) est d'après (α) un M^ξ dans chaque espace $E^{W,\xi}$ et on a alors selon (1): $0\leqslant\varrho^{W,\alpha}(x,x)\leqslant\leqslant\sup\limits_{\xi<\alpha}\delta^{W,\xi}((x))=0$. L'équivalence entre les égalités $x=y$ et $\varrho^{W,\alpha}(x,y)=0$ est donc établie.

D'autre part, on déduit facilement de (1) et (1') que $\varrho^{W,\alpha}(x,y)==\varrho^{W,\alpha}(y,x)$ et que les inégalités $\delta^{W,\xi}(E^{W,\xi})\leqslant 1$ impliquent $\varrho^{W,\alpha}(x,y)\leqslant 1$.

Enfin, étant donnés trois points x_1, x_2 et x_3 et, pour chaque $\xi<\alpha$, des ensembles M_1^ξ et M_2^ξ contenant (x_1,x_2), resp. (x_2,x_3), on a selon (β) et (1):

$$\varrho^{W,\alpha}(x_1,x_2)+\varrho^{W,\alpha}(x_2,x_3)=\sup_{\xi<\alpha}\inf_{M_1^\xi}\delta^{W,\xi}(M_1^\xi)+\sup_{\xi<\alpha}\inf_{M_2^\xi}\delta^{W,\xi}(M_2^\xi)\geqslant$$
$$\geqslant\sup_{\xi<\alpha}\inf_{M_1^\xi,M_2^\xi}[\delta^{W,\xi}(M_1^\xi)+\delta^{W,\xi}(M_2^\xi)]\geqslant\sup_{\xi<\alpha}\inf_{M_1^\xi,M_2^\xi}\delta^{W,\xi}(M_1^\xi+M_2^\xi))\geqslant$$
$$\geqslant\varrho^{W,\alpha}(x_1,x_3)$$

et dans le cas où pour un $\xi<\alpha$ et pour un des couples (x_1,x_2) ou (x_2,x_3) il n'existe aucun ensemble M^ξ contenant ce couple on obtient selon (1'):

$$\varrho^{W,\alpha}(x_1,x_2)+\varrho^{W,\alpha}(x_2,x_3)\geqslant 1\geqslant\varrho^{W,\alpha}(x_1,x_3).$$

Il est ainsi démontré que $(\varrho^{W,\alpha})$ possède toutes les propriétés qui caractérisent une métrique et que l'espace $E^{W,\alpha}$ a un diamètre $\leqslant 1$. Les métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ et les espaces $E^{W,\alpha}$ se trouvent ainsi définis par induction transfinie.

D'après (2) on a (voir Préliminaires) pour tout $\beta\leqslant\alpha$:

$$(\varrho^{W,\alpha})\lhd(^{W,\beta}) \tag{3}$$

et

(4) *la transformation par coïncidence de* $E^{W,\alpha}$ *en* $E^{W,\beta}$ *est continue.*

Remarque: Pour tout $\beta<\alpha$ on peut resteindre dans la formule (1) la variabilité de ξ à l'intervalle $\beta\leqq\xi<\alpha$, car

$$\sup_{\xi<\beta}\inf_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi)=\varrho^{W,\beta}(x,y)\leqslant\inf_{M_\beta}\delta^{W,\beta}(M^\beta),\ \text{d'où}\ \sup_{\xi<\alpha}\inf_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi)=$$
$$=\max[\sup_{\xi<\beta}\inf_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi),\ \sup_{\beta\leqslant\xi<\alpha}\inf_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi)]=\sup_{\beta\leqslant\xi<\alpha}\inf_{M^\xi}\delta^{W,\xi}(M^\xi).$$

Il en résulte que toutes les métriques qui suivent $(\varrho^{W,\beta})$ ne dépendent que des métriques qui les précèdent à partir de $(\varrho^{W,\beta})$ et qu'elles s'obtiennent de la métrique $(\varrho^{W,\beta})$ de manière tout à fait analogue à celle dont les métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ s'obtiennent de $(\varrho^{W,0})$. On peut l'écrire symboliquement

$$(\varrho^{(W,\beta)^{W,\gamma}})=(\varrho^{W,\beta+\gamma});$$

on peut aussi exprimer ce fait, en disant que les métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ s'obtiennent par l'*itération transfinie* de l'opération déterminant $(\varrho^{W,1})$ à l'aide de $(\varrho^{W,0})$ [12'']).

2'. Désignons, pour les trois propriétés W_i $(i=0,1,2)$, introduites dans **1'.**, par $(\varrho^{i,\alpha})$ les métriques correspondantes et par $E^{i,\alpha}$ les espaces correspondants.

Lorsque l'espace E^0 *est un continu, les métriques* $(\varrho^{0,1})$ *et* $(\varrho^{1,1})$ *sont identiques.*

[12''] M. A. Lindenbaum dans sa Thèse a eu également l'idée d'itérer l'opération donnant $(\varrho^{W,1})$ à l'aide de (ϱ^0), mais, procédant d'une manière différente que la nôtre, il n'a pu obtenir que des métriques successives identiques.

En effet, d'après (1) on a $\varrho^{i,1}(x,y)=\inf_{M^0}\delta^0(M^0)$ pour tout M^0 étant un W_i. Or, dans les deux cas $i=0$ et $i=1$ en peut restreindre dans cette formule la variabilité de M^0 aux sous-continus de E^0 contenant x et y, car on peut y remplacer M^0 par un continu ayant toutes les deux propriétées W_0 et W_1 à la fois et le même diamètre que M^0. L'identité des deux métriques en questions en résulte immédiatement.

Il est à remarquer que dans le cas considéré les métriques $(\varrho^{0,1})$ et $(\varrho^{1,1})$ coïncident avec la métrique étoilée (ϱ^*) introduite par M. S. Mazurkiewicz [13]) et employée par P. Urysohn [14]) dans l'étude de plusieurs problèmes topologiques.

3. Ajoutons aux conditions (α) et (β), que doit remplit la propriété W, une nouvelle condition

(γ) *Si le sous-ensemble M de l'espace E possède la propriété W et f est une transformation continue de l'espace E, l'ensemble transformé $f(M)$ possède également la propriété W par rapport à l'espace transformé $f(E)$* [15]).

3'. *Toutes les propriétés W_i ($i=0$, 1 et 2) remplissent la condition (γ).*

En effet, ces propriétés étant indépendantes de l'espace contenant l'ensemble M (voir 1'.), il suffit de démontrer que si l'ensemble M a la propriété W_i, toutes les images continues de M la possèdent aussi. Mais ceci n'exprime que le fait bien connu, à savoir l'invariance des propriétés d'un ensemble d'être *connexe*, resp. un *continu*, resp. un *continu Péanien*, envers les transformations continues.

4. **Théorème I:** *Soient: E^0 un espace métrique à la base E et à la métrique (ϱ^0), P un sous-ensemble de E et P^α le sous-ensemble de l'espace $E^{W,\alpha}$ ayant P pour base.*

Si un P^ξ possède une propriété W satisfaisant aux conditions (α), (β) et (γ), alors

1° *chaque P^β, pour $0\leqslant\beta\leqslant\xi$ possède la propriété W,*

2° *on a $\delta^{W,\beta}(P^\beta)=\delta^{W,\xi}(P^\xi)=\delta^{W,0}(P^0)$ pour tout $0\leqslant\beta\leqslant\xi$.*

[13]) Cf. S. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 165.

[14]) Cf. P. Urysohn, Verh. Akad. Amsterdam XIII, p. 35—42.

[15]) La condition (γ) exprime l'invariance de W envers les transformations continues. Les conditions (α), (β) et (γ) sont indépendantes.

Démonstration: 1°. P^ξ possèdant la propriété W et P^β étant le transformé de P^ξ moyennant la transformation par coïncidence de $E^{W,\xi}$ en $E^{W,\beta}$, on conclut de 2.(4) et de (γ) que P^β jouit également de la propriété W par rapport à $E^{W,\beta}$.

2°. Soit à présent β le premier nombre ordinal pour lequel $\delta^{W,\beta}(P^\beta)\neq\delta^{W,0}(P^0)$, donc, d'après 2. (3), $\delta^{W,\beta}(P^\beta)>\delta^{W,0}(P^0)$. Il existe alors deux points $(x,y)\subset P$ pour lesquels

$$\varrho^{W,\beta}(x,y)>\delta^{W,0}(P^0). \tag{5}$$

Il s'agit de montrer que β ne peut pas être $\leqslant\xi$. Supposons donc que $\beta\leqslant\xi$. Or, il résulte de 1° que $\varrho^{W,\beta}(x,y)$ s'obtient par la formule 2.(1) et par conséquent que $\varrho^{W,\beta}(x,y)=\sup_{\zeta<\beta}\inf_{M^\zeta}\delta^{W,\zeta}(M^\zeta)\leqslant$ $\leqslant\sup_{\zeta<\beta}\delta^{W,\zeta}(P^\zeta)=\delta^{W,0}(P^0)$, contrairement à (5).

Théorème II: *Etant donnés deux espaces métriques E_1^0 et E_2^0 avec les bases E_1 et E_2 et les métriques (ϱ_1^0) et (ϱ_2^0) respectivement, soient: f une transformation univoque de E_1^0 en E_1^0, $\mu(p,\eta)$ le module de f par rapport à E_1^0 et à E_2^0 et $\mu^\alpha(p,\eta)$ le module de f par rapport à $E_1^{W,\alpha}$ et à $E_2^{W,\alpha}$.*

Dans ces conditions, si f est une transformation continue de E_1^0 en E_2^0, elle est aussi pour tout α une transformation continue de $E_1^{W,\alpha}$ en $E_1^{W,\alpha}$ et on a:

$$\mu(p,\eta)\geqslant\mu^\beta(p,\eta)\geqslant\mu^\alpha(p,\eta) \text{ pour } 0\leqslant\beta\leqslant\alpha,\ p\in E \text{ et } 0<\eta\leqslant 1. \tag{6}$$

Démonstration: Nous allons procéder par l'induction transfinie.

Pour $\alpha=0$ on a $E_1^0=E_1^{W,0}$ et $E_2^0=E_2^{W,0}$, donc f est par l'hythèse une transformation continue de $E_1^{W,0}$ en $E_2^{W,0}$ et la formule (6) est dans ce cas évidente.

Admettons à présent que la non-croissance de la suite $\{\mu^\beta(p,\eta)\}$ et la continuité de la transformation f de $E_1^{W,\beta}$ en $E_2^{W,\beta}$ soient établies pour tout $\beta<\alpha$.

Il suffit de prouver que l'on a $\mu^\beta(p,\eta)\geqslant\mu^\alpha(p,\eta)$ quel que soit $\beta<\alpha$, pour en conclure aussitôt que $\lim_{\eta\to 0}\mu^\alpha(p,\eta)\leqslant\lim_{\eta\to 0}\mu^\beta(p,\eta)=0$ (la dernière égalité résultant de l'hypothèse que f est une transformation continue de $E_1^{W,\beta}$ en $E_2^{W,\beta}$), c. à d. que f est en effet une transformation continue de $E_1^{W,\alpha}$ en $E_2^{W,\alpha}$ et que la formule (6) se présente pour α.

Or, on a par définition de $\mu^\alpha(p, \eta)$ (voir Préliminaires):

$$\mu^\alpha(p, \eta) = \tfrac{1}{2}\, \delta_2^{W,\alpha}[f(S_1^{W,\alpha}(p, \eta))] = \tfrac{1}{2} \sup \varrho_2^{W,\alpha}(y_1, y_2), \tag{7}$$

où y_1 et y_2 parcourent l'ensemble $f(S_1^{W,\alpha}(p, \eta))$. Considérons un quelconque de ces couples (y_1, y_2). Il existe alors des points x_1 et x_2 de $S_1^{W,\alpha}(p, \eta)$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\varrho_1^{W,\alpha}(p, x_1) < \eta \leqslant 1$ et $\varrho_1^{W,\alpha}(p, x_2) < \eta \leqslant 1$.

D'après Déf. I et la Rémarque de **2.** on a

$$\varrho_1^{W,\alpha}(p, x_i) = \sup_{\beta \leqslant \xi < \alpha} \inf_{M_i^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi) < \eta \quad \text{où} \quad i = 1, 2.$$

Il existe donc pour $i = 1, 2$ et pour chaque ξ où $\beta \leqslant \xi < \alpha$ un ensemble M_i^ξ de diamètre $< \eta$, contenant p et x_i et ayant la propriété W. Il en résulte immédiatemunt que $M_1^\xi + M_2^\xi \subset S_1^{W,\xi}(p, \eta)$ et par conséquent que

$$\delta_2^{W,\xi}[f(M_1^\xi + M_2^\xi)] \leqslant \delta_2^{W,\xi}[f(S_1^{W,\xi}(p, \eta))] = 2\mu^\xi(p, \eta). \tag{8}$$

D'autre part, $M_1^\xi + M_2^\xi$ contenant x_1 et x_2, on obtient

$$(y_1, y_2) = (f(x_1), f(x_2)) \subset f(M_1^\xi + M_2^\xi). \tag{9}$$

Comme $p \in M_1^\xi \cdot M_2^\xi \neq 0$ et comme les ensembles M_i^ξ pour $i = 1, 2$ ont la propriété W, l'ensemble $M_1^\xi + M_2^\xi$ possède d'après (β) la même propriété. Il en résulte, d'après (γ), que l'ensemble $f(M_1^\xi + M_2^\xi)$ possède aussi la propriété W par rapport à l'espace $E_2^{W,\xi}$. Par conséquent, d'après (8), (9), Déf. I et Rem. de **2.**, on a

$$\varrho_2^{W,\alpha}(y_1, y_2) \leqslant \sup_{\beta \leqslant \xi < \alpha} \delta_2^{W,\xi}[f(M_1^\xi + M_2^\xi)] \leqslant \sup_{\beta \leqslant \xi < \alpha} 2\mu^\xi(p, \eta) \leqslant 2\mu^\beta(p, \eta),$$

d'où selon (7):

$$\mu^\alpha(p, \eta) = \tfrac{1}{2} \sup \varrho_2^{W,\alpha}(y_1, y_2) \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot 2\mu^\beta(p, \eta) = \mu^\beta(p, \eta), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire III: *Si les espaces métriques E_1^0 et E_2^0 ont la même base et si leurs notions de limite (L_1) et (L_2) satisfont à la relation $(L_1) \lhd (L_2)$, il en est de même des notions de limite des espaces $E_1^{W,\alpha}$ et $E_2^{W,\alpha}$ pour chaque nombre ordinal α.*

En effet, il suffit de considérer la transformation par coïncidence de E_1^0 en E_1^0, qui est continue dans les conditions du corollaire, et d'appliquer le théorème II.

Corollaire IV: *Si la fonction f transforme d'une manière biunivoque et bicontinue l'espace E_1^0 en E_2^0, elle transforme de la même façon $E_1^{W,\alpha}$ en $E_2^{W,\alpha}$ pour tout α.*

Corollaire V: *Si les espaces E_1^0 et E_2^0 ont la même base et des métriques équivalentes, il en est de même des espaces $E_1^{W,\alpha}$ et $E_2^{W,\alpha}$, quel que soit α.*

En effet, la transformation par coïncidence est dans ce cas biunivoque et bicontinue.

Le dernier corollaire est d'une importance toute particulière, parce qu'il exprime le fait que les notions de limite dans les espaces $E^{W,\alpha}$ ne dépendent que de la notion de limite dans E^0 et que, même en remplaçant la métrique dans E^0 par une métrique équivalente (pour que la notion de limite dans E^0 ne soit pas modifiée), on obtient dans $E^{W,\alpha}$ encore la même notion de limite.

On pourrait exprimer le même fait, en disant que (abstraction faite des métriques de E^0 et $E^{W,\alpha}$) les espaces $E^{W,\alpha}$ s'obtiennent de l'espace E^0 par voie *topologique*. On peut le démontrer, en définissant les notions de limite $(L^{W,\alpha})$ des espaces $E^{W,\alpha}$ uniquement à l'aide de la notion de limite (L^0) de E^0. Voici cette définition (où E^0 désigne un espace avec la base E et la notion de limite (L^0)):

Déf. I'. *Soit* $(L^{W,0}) = (L^0)$ *et supposons que pour tout $\xi < \alpha$ les notions de limite $(L^{W,\xi})$ et*, par conséquent, *les espaces $E^{W,\xi}$ soient déjà définis. Posons: $x = L^{W,\alpha}\{x_n\}$, lorsqu'il existe un nombre naturel N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ et pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$ l'espace E^0 contient un ensemble M_n^ξ satisfaisant aux conditions:*

a) *considéré dans l'espace $E^{W,\xi}$, l'ensemble M_n^ξ possède la propriété W,*
b) *M_n^ξ contient les points x et x_n,*
c) *P_n^ξ désignant la somme $\sum_{\xi \leqslant \beta < \alpha} M_n^\beta$, la suite des ensembles $\{P_n^\xi\}$ pour $n \to \infty$, converge dans l'espace $E^{W,\xi}$ vers le point x* [16]).

Sans donner ici la démonstration de la coïncidence des notions de limite $(L^{W,\alpha})$ déterminées par la Déf. I' avec celles définies par les métriques $(\varrho^{W,\alpha})$, nous indiquons seulement que cette démonstration fait usage du théorème I.

5. Nous dirons que l'espace E^0 possède *localement* la propriété W *au point* $p \in E^0$, si pour chaque ensemble ouvert $G \subset E^0$, contenant p, il existe un ensemble ouvert G_1 tel que $p \in G_1 \subset G$ et que chaque point $x \in G_1$ se laisse unir à p par un ensemble à la propriété W con-

[16]) Une suite d'ensembles $\{Q_n\}$ est dite *convergente vers le point x*, lorsque chaque suite de points $\{x_n\}$ où $x_n \in Q_n$ converge vers x.

tenu dans G. Nous dirons tout court que l'espace E^0 possède *localement la propriété W* ou qu'il possède *la propriété W locale*, lorsqu'il la possède en chacun de ses points.

Dans un autre article [17]), j'ai défini la localisation des propriétés d'une manière un peu différente. J'y ai considéré pour une classe quelconque $\mathfrak{A}$ de sous-ensembles de E^0, l'ensemble $A(E^0)$ de tous les points $p \in E^0$ dont tout voisinage contient un ensemble $N \in \mathfrak{A}$ ayant p comme point intérieur. Lorsque $\mathfrak{A}$ était la classe de tous les sous-ensembles de E^0 possédant une propriété donnée W, l'ensemble correspondant $A(E^0)$ était entendu comme l'ensemble de tous les points auxquels l'espace E^0 possède la propriété *W localement.*

Or, pour en obtenir notre définition actuelle de la localisation, il faut désigner par $\mathfrak{A}$ non pas la classe des ensembles $N \subset E^0$ qui possèdent simplement la propriété W, mais celle de tous les ensembles $M \subset E^0$ ayant la propriété $\hat{W}$ suivante: *tout couple de points de M se laisse joindre dans M par un ensemble $K \subset M$ possédant la propriété W (par rapport à E^0).*

L'ensemble $A(E^0)$ correspondant à la classe $\mathfrak{A}$ ainsi conçue est exactement l'ensemble de tous les points auxquels E^0 possède localement la propriété W dans le sens de la définition adoptée ici et (d'après le théorème I de l'article cité) cet ensemble $A(E^0)$ *est toujours un G_δ par rapport à E^0.*

On peut démontrer facilement que les métriques $(\varrho^{\hat{W},\alpha})$ et $(\varrho^{W,\alpha})$ sont identiques. On pourrait donc, sans en diminuer la généralité, se borner dans l'étude des espaces $E^{W,\alpha}$, à ne considérer que les propriétés $\hat{W}$ qui, outre les conditions (α), (β) et (γ), remplissent la condition suivante:

(β') *Si chaque couple de points d'un ensemble $M \subset E^0$ peut y être relié par un ensemble $K \subset M$ à la propriété $\hat{W}$, l'ensemble M la possède également.*

Théorème VI: *La condition nécessaire et suffisante pour que la métrique $(\varrho^{W,\alpha})$, pour un α donné, soit équivalente à la métrique $(\varrho^{W,\alpha+1})$, est que l'espace $E^{W,\alpha}$ possède la propriété W localement.*

Démonstration: La condition est nécessaire. Soit en effet, G un ensemble ouvert et $p \in G \subset E^{W,\alpha}$. Il existe donc une sphère $S^{W,\alpha}(p, \varepsilon) \subset G$. Les métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ et $(\varrho^{W,\alpha+1})$ étant équivalentes, la transformation f de $E^{W,\alpha}$ en $E^{W,\alpha+1}$ par coïncidence est continue et son module $\mu(p, \eta)$ remplit la condition $\lim\limits_{\eta \to 0} \mu(p, \eta) = 0$. Il existe alors un $\eta_0 < \varepsilon$ tel que $2\mu(p, \eta_0) < \varepsilon$. En posant $G_1 = S^{W,\alpha}(p, \eta_0) \subset \subset S^{W,\alpha}(p, \varepsilon) \subset G$, nous obtenons pour chaque point $x \in G_1 \subset S^{W,\alpha}(p, \eta_0)$:

$$\varrho^{W,\alpha+1}(p, x) \leqslant \delta^{W,\alpha+1}[f(S^{W,\alpha}(p, \eta_0))] = 2\mu(p, \eta_0) < \varepsilon.$$

[17]) voir Monatshefte für Math. u. Phys. XXXVII, p. 242.

D'autre part, d'après Rem. de **2.**, on a $\varrho^{W,\alpha+1}(p, x) = \inf\limits_{M^\alpha} \delta^{W,\alpha}(M^\alpha)$. En vertu de l'inégalité qui précède, il existe donc un ensemble $M^\alpha \subset E^{W,\alpha}$ à la propriété W, unissant p et x et tel que $\delta^{W,\alpha}(M^\alpha) < \varepsilon$; par conséquent $M^\alpha \subset S^{W,\alpha}(p, \varepsilon) \subset G$, c. q. f. d.

La condition est suffisante. En vertu de **2.**(4), il suffit de montrer que, l'espace $E^{W,\alpha}$ possèdant localement la propriété W, la transformation par coïncidence f de $E^{W,\alpha}$ en $E^{W,\alpha+1}$ est continue, ou, ce qui revient au même, que le module $\mu(p, \eta)$ de f remplit la condition $\lim\limits_{\eta \to 0} \mu(p, \eta) = 0$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait par suite de la décroissance de $\mu(p, \eta)$ comme fonction de η, un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(p, \eta) > \varepsilon$ pour tout $\eta > 0$. Mais la propriété W locale implique, comme on voit sans peine, l'existence d'une sphère $S^{W,\alpha}(p, \eta_0)$ dont chaque point x peut être uni à p par l'ensemble M_x^α ayant la propriété W et situé dans $S^{W,\alpha}(p, \varepsilon)$. Il en résulte que $\mu(p, \eta_0) =$

$$= \tfrac{1}{2}\, \delta^{W,\alpha+1}[f(S^{W,\alpha}(p, \eta_0))] = \tfrac{1}{2} \sup_{(x_1, x_2) \subset S^{W,\alpha}(p, \eta_0)} \varrho^{W,\alpha+1}(x_1, x_2) \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{x_1, x_2} [\varrho^{W,\alpha+1}(p, x_1) + \varrho^{W,\alpha+1}(p, x_2)] \leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{x_1, x_2} [\delta^{W,\alpha}(M_{x_1}^\alpha) + \delta^{W,\alpha}(M_{x_2}^\alpha)] \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{x_1, x_2} \delta^{W,\alpha}(M_{x_1}^\alpha + M_{x_2}^\alpha) \leqslant \tfrac{1}{2}\, \delta^{W,\alpha}[S^{W,\alpha}(p, \varepsilon)] \leqslant \varepsilon,$$

contrairement à la définition de ε.

Theorème VII: *Si pour un α donné la métrique $(\varrho^{W,\alpha})$ équivaut à $(\varrho^{W,\alpha+1})$, on a $(\varrho^{W,\beta}) = (\varrho^{W,\alpha+1})$ pour tout $\beta \geqslant \alpha + 1$.*

Démonstration: Le théorème étant évident pour $\beta = \alpha + 1$, considérons un $\beta > \alpha + 1$ et supposons que le théorème soit vrai pour chaque ξ où $\alpha + 1 \leqslant \xi < \beta$. Soient x et y deux points quelconques de la base de E^0. D'après Rem. de **2.** on obtient

$$\varrho^{W,\beta}(x, y) = \sup_{\alpha+1 \leqslant \xi < \beta} \inf_{M^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi).$$

Mais chaque ensemble $M^{\alpha+1}$ est par hypothèse (comme sous-ensemble de $E^{W,\xi}$ où $\alpha + 1 \leqslant \xi < \beta$) un ensemble M^ξ avec $\delta^{W,\alpha+1}(M^{\alpha+1}) = \delta^{W,\xi}(M^{\alpha+1})$. Il en résulte que $\inf\limits_{M^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi) \leqslant \inf\limits_{M^{\alpha+1}} \delta^{W,\alpha+1}(M^{\alpha+1})$ et par conséquent que $\varrho^{W,\beta}(x, y) = \inf\limits_{M^{\alpha+1}} \delta^{W,\alpha+1}(M^{\alpha+1})$.

D'autre part, on a $\varrho^{W,\alpha+1}(x, y) = \inf\limits_{M^\alpha} \delta^{W,\alpha}(M^\alpha)$.

Or, en vertu de l'équivalence des métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ et $(\varrho^{W,\alpha+1})$ chaque ensemble M^α, comme sous-ensemble de $E^{W,\alpha+1}$ est un $M^{\alpha+1}$, ce qui nous donne, d'après le théorème I, $\delta^{W,\alpha+1}(M^\alpha) = \delta^{W,\alpha}(M^\alpha)$, donc $\varrho^{W,\alpha+1}(x, y) = \inf\limits_{M^\alpha} \delta^{W,\alpha}(M^\alpha) \geqslant \inf\limits_{M^{\alpha+1}} \delta^{W,\alpha+1}(M^{\alpha+1}) = \varrho^{W,\beta}(x, y)$, d'où en vertu de la formule **2.** (3), on a $\varrho^{W,\beta}(x, y) = \varrho^{W,\alpha+1}(x, y)$, c. q. f. d.

Corollaire VIII: *Les espaces $E^{W,\alpha}$ ont tous la même notion de limite à partir du premier espace E^{W,α_0} qui possède localement la propriété W (y compris E^{W,α_0}).*

La démonstration résulte immédiatement des théorèmes VI et VII.

Théorème IX: *Soient $(L^{W,\alpha})$, resp. (L^0), la notion de limite de l'espace $E^{W,\alpha}$, resp. de E^0, et E_1^0 un espace métrique avec la même base que E^0, mais avec la métrique (ϱ_1^0) et la notion de limite (L_1^0). Admettons que l'on ait $(L_1^0) \lhd (L^0)$ et que l'espace E_1^0 possède la propriété W localement. Dans ces conditions on a $(L_1^0) \lhd (L^{W,\alpha})$ quel que soit α.*

D é m o n s t r a t i o n: D'après le corolaire III, on a $(L_1^{W,\alpha}) \lhd (L^{W,\alpha})$, où $(L_1^{W,\alpha})$ désigne la notion de limite dans $E_1^{W,\alpha}$. Mais $(L_1^0) = (L_1^{W,\alpha})$ d'après la corollaire VIII.

5'. La propriété locale W_0 est connue sous le nom de *connexité locale.*

En considérant les propriétés $\hat{W}_0$, $\hat{W}_1$ et $\hat{W}_2$ correspondant aux propriétés W_0, W_1 et W_2 (cf. **5.**, p. 104), on voit facilement que:

1) $\hat{W}_0$, de même que W_0, exprime que l'ensemble est *connexe.*

2) $\hat{W}_1$ exprime le fait que l'ensemble est un *semicontinu.*

3) $\hat{W}_2$ signifie que l'ensemble est *„arcwise connected"* [18]).

Pour les espaces G_δ-absolus les propriétés locales W_0, W_1 et W_2 sont équivalentes [19]).

[18]) La notion de semicontinu et celle d'ensemble „arcwise connected" (c. à d. dont tous deux points s'y laissent lier par un arc simple) nous seront utiles dans la suite. D'ordinaire, on les définit justement comme des propriétés $\hat{W}_1$ et $\hat{W}_2$, mais sans donner la définition générale des propriétés $\hat{W}$ en fonction des propriétés W quelconques.

[19]) Pour la démonstration de la prémisse la plus essentielle, à savoir que la propriété locale W_2 résulte de la propriété locale W_0, voir N. A r o n s z a j n, Fund. Math. XV, p. 232 et 238.

Remarque: La propriété de l'espace d'être *compact (en soi) et localement connexe* est un invariant des transformations continues. Ce théorème peut être généralisé sur les propriétés quelconques W qui remplissent les conditions (α), (β) et (γ), de sorte que, les propriétés locales correspondantes, *accompagnées de la compacticité,* constituent des propriétés invariantes par rapport aux transformations continues.

6. Une propriété V est dite *plus faible* (au sens large) que la propriété W, lorsque chaque ensemble à la propriété W (par rapport à un espace donné) possède la propriété V (par rapport au même espace).

Théorème X: *Etant donné un espace E^0 avec la métrique (ϱ^0) et deux propriétés W et V satisfaisant aux conditions (α), (β) et (γ), si V est plus faible que W, on a $(\varrho^{V,\alpha}) \rhd (\varrho^{W,\alpha})$, quel que soit α.*

D é m o n s t r a t i o n: Si $\alpha = 0$, on a $(\varrho^{V,\alpha}) = (\varrho^0) = (\varrho^{W,\alpha})$, donc $(\varrho^{V,\alpha}) \rhd (\varrho^{W,\alpha})$. Admettons donc qu'il en est de même pour tout $\xi < \alpha$ et considérons deux points quelconques x et y de E^0. Il s'agit de montrer que $\varrho^{W,\alpha}(x, y) \geqslant \varrho^{V,\alpha}(x, y)$. Il suffit de l'établir pour le cas où $\varrho^{W,\alpha}(x, y) < 1$. Or, on a dans ce cas en vertu de la Déf. I (1): $\varrho^{W,\alpha}(x. y) = \sup\limits_{\xi<\alpha} \inf\limits_{M^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi)$.

Mais la transformation par coïncidence de $E^{W,\xi}$ en $E^{V,\xi}$ étant pour tout $\xi < \alpha$ continue, puisque $(\varrho^{V,\xi}) \rhd (\varrho^{W,\xi})$, on conclut de (γ) que chaque M^ξ constitue dans $E^{V,\xi}$ un ensemble M_*^ξ, possédant la propriété W et à plus forte raison V. On voit donc que $\varrho^{V,\alpha}(x, y)$ s'obtient de $\varrho^{W,\xi}(x, y)$ à l'aide de la formule (1) de **2.**, d'où (M_V^ξ dédésignant un sous-ensemble arbitraire de $E^{V,\xi}$ contenant (x, y) et possédant la propriété V), on a $\varrho^{V,\alpha}(x, y) = \sup\limits_{\xi<\alpha} \inf\limits_{M_V^\xi} \delta^{V,\xi}(M_V^\xi) \leqslant$ $\leqslant \sup\limits_{\xi<\alpha} \inf\limits_{M_*^\xi} \delta^{V,\alpha}(M_*^\xi)$ et comme $(\varrho^{W,\xi}) \lhd (\varrho^{V,\xi})$ entraîne $\delta^{W,\xi}(M^\xi) \geqslant$ $\geqslant \delta^{V,\xi}(M_*^\xi)$, il vient $\varrho^{V,\alpha}(x, y) \leqslant \sup\limits_{\xi<\alpha} \inf\limits_{M^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi) = \varrho^{W,\alpha}(x, y)$, c. q. f. d.

6'. On voit aisément que la propriété W_0 *est plus faible que* W_1 et que W_1 *est plus faible que* W_2.

Soit W une propriété intrinsèque remplissant (α), (β) et (γ) [20]).

S'il existe un ensemble non connexe à la propriété W, tous les ensembles (x, y) composés de deux points x et y quelconques auront également, d'après (γ), la

[20]) S'il existe un ensemble non vide possédant une propriété intrinsèque W, la condition (α) résulte pour celle-ci de (γ).

propriété W [21]). Dans ce cas on obtient immédiatement, d'après Déf. I (1), en posant $M^\alpha = (x, y)$, que $(\varrho^{W,\alpha}) = (\varrho^0)$ pour chaque métrique (ϱ^0) et chaque α.

Il en résulte que, pour une propriété intrinsèque W présentant quelque intéret pour nos recherches, chaque ensemble la possèdant doit être connexe.

Ceci admis, considérons (s'il en existe) un ensemble comprenant plusieurs points et possédant cette propriété W; il s'ensuit d'après (γ) que chaque continu Péanien l'aura également (car chaque espace métrique et connexe peut être transformé d'une manière continue en un continu Péanien quelconque).

En résumant, on peut dire que, abstraction faite de quelques exception sinsignifiantes, toutes les propriétés *intrinsèques* W soumises à la condition (γ) sont plus fortes que W_0 et plus faibles que W_2.

Il est à noter qu'à chaque propriété topologique W (intrinsèque ou non) d'un ensemble correspond une propriété W_a intrinsèque, appelée *„propriété W absolue"* qui coïncide avec W dans le cas où W est intrinsèque. On définit W_a de la manière suivante:

Un ensemble M possède la propriété W_a, lorsqu'il possède la propriété W par rapport à chaque espace métrisable qui le contient topologiquement [22]).

On montre sans peine que si W remplit une des conditions (α), (β), (γ) (et même une condition (δ) que nous définirons plus loin), il en est de même de W_a.

On obtient de cette manière des notions absolues telles que celle d'ensemble G_δ absolu, de classe Borelienne absolue [23]), de rétracte absolu [24]), etc.

7. Nous allons nous occuper à présent des propriétés W intrinsèques remplissant les conditions (α), (β) et (γ).

Théorème XI: *Soient: E^0 un espace métrique, P^0 un sous-ensemble de E^0, P^α le sous-ensemble de l'espace $E^{W,\alpha}$ ayant la même base que P^0 et $P^{W,\alpha}$ l'espace s'obtenant par le procédé de* **2.** Def. I *de l'ensemble P^0, lorsqu'on considère ce dernier comme un espace. Soit enfin $(\varrho_P^{W,\alpha})$ la métrique de $P^{W,\alpha}$.*

Dans ces conditions on a

$$(\varrho_P^{W,\alpha}) \lhd (\varrho^{W,\alpha})$$

[21]) car un ensemble non connexe peut être facilemeet transformé de manière continue en une paire de points (x, y).

[22]) Nous ne considérons ici que des espaces métriques, donc, au point de vue topologique, métrisables. Si nous laissons tomber cette convention, il faudrait ajouter à la définition de W_a la condition que l'ensemble M soit métrisable, afin d'éviter quelques inconvénients.

[23]) Malgré la différence entre la notion de propriété absolue adoptée ici et celle adoptée par M. **Hausdorff** (cf. l. c. § 38, II et III) les deux définitions donnent au point de vue topologique les mêmes espaces G_ξ-absolus (ξ quelconque) et F_ξ-absolus ($\xi > 1$).

[24]) Cette notion a été introduite par M. K. **Borsuk**, Fund. Math. XVII, p. 159.

(où, bien entendu, la métrique $(\varrho^{W,\alpha})$ de $E^{W,\alpha}$ est considérée seulement dans l'ensemble P^α).

Démonstration: Le théorème étant évident pour $\alpha = 0$, admettons qu'il soit vrai pour chaque $\xi < \alpha$. Anfin de l'établir aussi pour α, il suffit de montrer que, pour tout $(x, y) \subset P^0$, on a $\varrho_P^{W,\alpha}(x, y) \geqslant \varrho^{W,\alpha}(x, y)$. Dans le cas où $\varrho_P^{W,\alpha}(x, y) = 1$ c'est évident; il reste donc le cas où $\varrho_P^{W,\alpha}(x, y) < 1$. Or, $\varrho_P^{W,\alpha}(x, y)$ s'obtient dans ce cas, d'après la formule (1) de **2.**; on a donc $\varrho_P^{W,\alpha}(x, y) = \sup\limits_{\xi<\alpha} \inf\limits_{M_P^\xi} \delta^{W,\xi}(M_P^\xi)$, où M_P^ξ parcourt les sous-ensembles de $P^{W,\xi}$ qui contiennent x et y et possèdent la propriété W.

Cependant la formule supposée $(\varrho_P^{W,\xi}) \lhd (\varrho^{W,\xi})$ entraînant (voir Préliminaires, p. 95) la continuité de la transformation par coïncidence de $P^{W,\xi}$ en P^ξ, l'ensemble M_P^ξ se trouve transformé d'après (γ) en ensemble M^ξ possédant la propriété W (d'abord par rapport à P^ξ, mais W étant intrinsèque, on peut faire abstraction de l'espace contenant M^ξ). On achève la démonstration d'une manière tout à fait analogue à celle du théorème X.

Théorème XII: *Dans les hypothèses du théorème XI, si l'ensemble P^0 (considéré comme espace) possède localement la propriété W, les métriques (ϱ^0), $(\varrho^{W,\alpha})$ et $(\varrho_P^{W,\alpha})$ dans la base P de P^0 sont équivalentes, quel que soit α.*

Démonstration: D'après le théorème XI et la formule **2.**(3), on a

(10) $\quad (\varrho^0) = (\varrho^{W,0}) = (\varrho_P^{W,0}) \rhd (\varrho^{W,\alpha}) \rhd (\varrho_P^{W,\alpha})$ *pour chaque* α,

toutes ces métriques étant considérées dans la base P de P^0. Mais P^0 possédant localement la propriété W, il résulte des théorèmes VI et VII que la métrique $(\varrho_P^{W,\alpha})$ est pour tout α équivalente à la métrique $(\varrho_P^{W,0}) = (\varrho^0)$. En rapprochant ce fait à la formule (10), on obtient la thèse du théorème.

Théorème XIII: *Dans les hypothèses du théorème XI et $F(P^0)$ désignant la frontière $\overline{P^0} \cdot \overline{E^0 - P^0}$* [25]) *de P^0, si l'ensemble $P^0 \cdot F(P^0)$*

[25]) La fermeture $\overline{P^0}$ ainsi que la frontière $F(P^0)$ de P^0 dépendent de l'espace dont P^0 est un sous-ensemble. Nous indiquerons donc toujours, au cours des raisonnements, par rapport à quel espace la fermeture, resp. la frontière, est-elle entendue.

ne contient que des points isolés[26]) *de* $F(P^0)$, *les métriques* $(\varrho_P^{W,\alpha})$ *et* $(\varrho^{W,\alpha})$ *sont dans la base* P *de* P^0 *équivalentes, quel que soit* α.

Démonstration: Désignons pour chaque $p \in P^0$ par $\eta(p)$ le rayon de la plus grande sphère $S^0(p,\eta)$, avec $\eta \leqslant 1$, qui ne contient que tout au plus un seul point de la frontière $F(P^0)$. D'après les hypothèses faites sur P^0, il existe un $\eta(p)$ pour tout $p \in P^0$ et on a $0 < \eta(p) \leqslant 1$. Ceci dit, nous allons établir la formule

$$(11) \quad \varrho^{W,\alpha}(p,x) \geqslant \varrho_P^{W,\alpha}(p,x) \quad \textit{pour} \quad (p,x) \subset P^0 \quad \textit{et} \quad \varrho^{W,\alpha}(p,x) < \eta(p),$$

c'est à dire même plus qu'il ne faut pour démontrer le théorème, car, en vertu du théorème XI, cette formule implique immédiatement l'équivalence des formules $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho^{W,\alpha}(p,x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_P^{W,\alpha}(p,x_n) = 0$ pour tout $p \in P^0$ et $\{x_n\} \subset P^0$, ce qui entraîne l'équivalence des métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ et $(\varrho_P^{W,\alpha})$.

Or, la formule (1) étant évidente pour $\alpha = 0$, admettons qu'elle est vraie pour tout $\xi < \alpha$ et soit $\varrho^{W,\alpha}(p,x) < \eta(p) \leqslant 1$ pour un couple $(p,x) \subset P^0$. D'après 2. Déf. I, on obtient

$$\varrho^{W,\alpha}(p,x) = \sup_{\xi<\alpha} \inf_{M^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi) < \eta(p),$$

de sorte qu'il existe pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ un nombre ordinal $\beta < \alpha$ tel que pour chaque ξ, où $\beta \leqslant \xi < \alpha$, $E^{W,\xi}$ contient un ensemble M^ξ avec

$$(12) \qquad \delta^{W,\xi}(M^\xi) < \min\,[\eta(p), \varrho^{W,\alpha}(p,x) + \varepsilon].$$

Aucun M^ξ ne peut contenir deux point distincts y_1 et y_2 de $F(P^0)$, car on aurait dans le cas contraire $\varrho^0(p,y_i) \leqslant \varrho^{W,\xi}(p,y_i) \leqslant \leqslant \delta^{W,\xi}(M^\xi) < \eta(p)$ pour $i = 1, 2$, ce qui est impossible d'après la définition de $\eta(p)$.

D'autre part, nous pouvons supposer que pour $\beta \leqslant \xi < \alpha$ les M^ξ sont contenus dans P^ξ. Nous allons prouver, en effet, que tout M^ξ peut être remplacé par l'ensemble $M^\xi \cdot P^\xi$; il faut donc que l'ensemble $M^\xi \cdot P^\xi$ contienne p et x et qu'il possède la propriété W. Le premier fait est évident et pour prouver le second, il suffit de définir une transformation f continue de M^ξ en $M^\xi \cdot P^\xi$, ce que

[26]) Un point a d'un ensemble A est dit *isolé*, s'il existe une sphère S de centre a et de rayon positif telle que $S \cdot A = (a)$.

nous allons faire de la manière suivante: la transformation par coïncidence de $E^{W,\xi}$ en E^0 étant biunivoque et continue, la frontière $F(P^\xi) = \overline{P^\xi} \cdot \overline{E^{W,\xi} - P^\xi}$ de P^ξ (relative à $E^{W,\xi}$) ne contient que des points de $F(P^0)$. Les ensembles $M^\xi \cdot \overline{P^\xi}$ et $M^\xi \cdot \overline{E^{W,\xi} - P^\xi}$ forment une décomposition de M^ξ en deux ensembles fermés (relativement à M^ξ) dont la partie commune $M^\xi \cdot \overline{P^\xi} \cdot \overline{E^{W,\xi} - P^\xi} = = M^\xi \cdot F(P^\xi) \subset M^\xi \cdot F(P^0)$ est donc vide ou se réduit à un seul point, que nous désignerons, s'il existe, par y. Ceci établi, on vérifie immédiatement la continuité de la transformation f de M^ξ en $M^\xi \cdot P^\xi$ qui laisse les points de $M^\xi \cdot P^\xi$ immobiles et fait correspondre à chaque point de $M^\xi \cdot \overline{E^{W,\xi} - P^\xi}$ le point y lorsqu'il existe, et le point x dans le cas contraire. C'est donc bien la transformation cherchée.

A présent, nous pouvons donc admettre que $M^\xi \subset P^\xi$ et que l'ensemble M^ξ, considéré comme sous-ensemble de $P^{W,\xi}$, possède la propriété W, car selon la formule (11), supposée vraie pour tout $\xi < \alpha$, la transformation par coïncidence de P^ξ en $P^{W,\xi}$ est continue. En vertu de (11) et (12) on a aussi: $\delta_P^{W,\xi}(M^\xi) \leqslant \delta^{W,\xi}(M^\xi) < \varrho^{W,\alpha}(p,x) + \varepsilon$ pour $\beta \leqslant \xi < \alpha$. On obtient par conséquent, d'après 2. Déf. I et Rem.: $\varrho_P^{W,\alpha}(p,x) = \sup\limits_{\beta\leqslant\xi<\alpha} \inf\limits_{M_P^\xi} \delta_P^{W,\xi}(M_P^\xi) \leqslant \sup\limits_{\beta\leqslant\xi<\alpha} \delta_P^{W,\xi}(M^\xi) < \varrho^{W,\alpha}(p,x) + \varepsilon$ et, ε étant arbitraire, on a enfin $\varrho_P^{W,\alpha}(p,x) \leqslant \varrho^{W,\alpha}(p,x)$, c. q. f. d.

Corollaire XIV. *Si* $F(P^0)$ *ne contient qu'un nombre fini de points, les métriques* $(\varrho^{W,\alpha})$ *et* $(\varrho_P^{W,\alpha})$ *sont équivalentes pour chaque* α.

Corollaire XV: *Si* P^0 *est ouvert dans* E^0, *les métriques* $(\varrho^{W,\alpha})$ *et* $(\varrho_P^{W,\alpha})$ *sont équivalentes pour chaque* α.

7'. *Tous les théorèmes de* **7.** *sont valables pour les propriétés* W_0, W_1 *et* W_2, puisqu'elles sont des propriétés intrinsèques.

8. Ordre de l'espace par rapport à une propriété. *Il est facile de démontrer que,* $\mathfrak{m}$ *désignant la puissance de l'espace* E^0, *toutes les métriques* $(\varrho^{W,\alpha})$ *sont identiques pour les nombres ordinaux* α *de puissance plus grande que* $\mathfrak{m} \cdot \aleph_0$.

Considérons, en effet, l'ensemble T de tous les triples (r,x,y) pour $(x,y) \subset E^0$ et r rationnel. La puissance de T est évidemment $\mathfrak{m} \cdot \aleph_0$. Désignons par $\alpha(r,x,y)$ le premier nombre ordinal α, s'il en existe, pour lequel $\varrho^{W,\alpha}(x,y) \geqslant r$. Désignons encore par β les nombres ordinaux pour lesquels $(\varrho^{W,\beta})$ n'est pas identique à $(\varrho^{W,\beta+1})$.

Il existe alors, pour chaque β, un couple (x', y') et un r' rationnel tels que $\varrho^{W,\beta}(x', y') < r' < \varrho^{W,\beta+1}(x, y')$, de sorte que $\alpha(r', x', y') = \beta + 1$. Il en résulte que la puissance de l'ensemble de tous les β ne dépasse pas la puissance de l'ensemble de tous les $\alpha(r, x', y)$, qui est $\leqslant \overline{\overline{T}} = \mathfrak{m} \cdot \aleph_0$. En vertu du théorème VII, d'après lequel chaque nombre ordinal précédant un β est aussi un β, on en conclut aussitôt qu'un nombre ordinal de puissance $> \mathfrak{m} \cdot \aleph_0$ ne peut pas être un β.

Il existe par conséquent un premier nombre ordinal α_0 pour lequel la métrique (ϱ^{W,α_0}) est équivalente à (ϱ^{W,α_0+1}). Nous désignerons ce nombre ordinal par $\omega_W(E^0)$ et l'appellerons *l'ordre de l'espace E^0 par rapport à W.*

Il est clair, d'après le théorème VII, que toutes les métriques $(\varrho^{W,\alpha})$ qui suivent $(\varrho^{W,\omega_W(E^0)})$ sont équivalentes à cette dernière et que $\omega_W(E^0)$ est le premier nombre ordinal qui remplisse cette condition.

Soient pour abréger, $E^{W,*}$, $(\varrho^{W,*})$ et $(L^{W,*})$ respectivement: l'espace $E^{W,\omega_W(E^0)}$: la métrique $(\varrho^{W,\omega_W(E^0)})$ et la notion de limite dans $E^{W,*}$.

La définition de l'ordre implique immédiatement que

(i) $(L^{W,\alpha}) \trianglerighteq (L^{W,*})$ *pour chaque* α,

(ii) *Pour que l'on ait* $(L^{W,\alpha}) = (L^{W,\beta})$, *il faut et il suffit que*
$$\alpha \geqslant \omega_W(E^0) \leqslant \beta.$$

Le corollaire V et la définition de l'ordre donnent immédiatement le

Théorème XVI. *Si deux espaces E_1^0 et E_2^0 ont une base commune et des métriques équivalentes, on a* $\omega_W(E_1^0) = \omega_W(E_2^0)$.

En d'autres termes, l'ordre d'un espace ne dépend que de sa notion de limite: *l'ordre d'un espace E_0 par rapport à une propriété W est donc une notion topologique.*

Théorème XVII: *Les espaces E^0 et E_1^0 ayant une base commune et leurs notions de limite (L^0) et (L_1^0) vérifiant la relation $(L_1^0) \trianglelefteq (L^0)$, si l'espace E_1^0 jouit localement de la propriété W, on a $(L_1^0) \trianglelefteq (L^{W,*})$.*

Pour la démonstration, il suffit de poser $\alpha = \omega_W(E^0)$ dans le théorème IX.

Théorème XVIII: *Les propriétés V et W remplissant les conditions (α), (β) et (γ) et E^0 étant un espace tel que $E^{V,*}$ et $E^{W,*}$ possèdent localement les deux propriétés à la fois, on a* $(L^{V,*}) = (L^{W,*})$.

D é m o n s t r a t i o n: D'après **2.** (3) on a $(L^0) \trianglerighteq (L^{W,*})$. L'espace $E^{W,*}$ possédant localement la propriété V, on en conclut en vertu du théorème XVII que $(L^{V,*}) \trianglerighteq (L^{W,*})$. On obtient d'une façon analogue $(L^{W,*}) \trianglerighteq (L^{V,*})$, d'où la relation q. f. d.

Théorème XIX: *Dans les hypothèses du théorème XVIII, si la propriété V est plus faible que W, on a l'inégalité* $\omega_V(E^0) \geqslant \omega_W(E^0)$.

D é m o n s t r a t i o n: Posons pour abréger $\alpha = \omega_V(E^0)$ et $\beta = \omega_W(E^0)$.

D'après (i) et le théorème X on a $(L^{V,\alpha}) \trianglerighteq (L^{W,\alpha}) \trianglerighteq (L^{W,\beta})$. Il en résulte selon le théorème XVIII que $(L^{W,\beta}) = (L^{W,\alpha})$; d'après (ii) on a donc $\omega_V(E^0) = \alpha \geqslant \omega_W(E^0)$, c. q. f. d.

Théorème XX: *W étant une propriété intrinsèque remplissant la condition:*

(λ) Chaque espace possédant la propriété W la possède aussi localement,

on a $\omega_W(E^0) \leqslant 1$ *pour tout espace* E^0.

D é m o n s t r a t i o n: Il suffit de prouver que les métriques $(\varrho^{W,1})$ et $(\varrho^{W,2})$ sont égales. Nous le prouverons, en montrant que l'on a pour $(x, y) \subset E^0$

$$\varrho^{W,1}(x, y) \geqslant \varrho^{W,2}(x, y). \tag{13}$$

La formule (13) étant évidente, lorsque $\varrho^{W,1}(x, y) = 1$, admettons que $\varrho^{W,1}(x, y) < 1$, d'où selon **2.** Déf. I:

$$\varrho^{W,1}(x, y) = \inf_{M^0} \delta^{W,0}(M^0) \tag{14}$$

Chaque ensemble M^0 possédant la propriété W, donc possédant par hypothèse la même propriété l o c a l e m e n t, les métriques $(\varrho^0) = (\varrho^{W,0})$ et $(\varrho^{W,1})$ dans la base de M^0 sont selon le théorème XII équivalentes. Il en résulte que l'ensemble $M_1^0 \subset E^{W,1}$, qui a la même base que M^0, jouit également de la propriété W. Par conséquent, on peut écrire d'après **2.** Déf. I et Rem.: $\varrho^{W,2}(x, y) = \inf_{M^1} \delta^{W,1}(M^1)$, où M^1 parcourt tous les sous-ensembles de $E^{W,1}$ qui contiennent x et y et possèdent la propriété W. Ainsi tous les ensembles M_1^0 se trouvent parmi les ensembles M^1, d'où

$$\varrho^{W,2}(x, y) \leqslant \inf_{M_1^0} \delta^{W,1}(M_1^0). \tag{15}$$

D'autre part, le théorème I donne $\delta^{W,1}(M_1^0) = \delta^{W,0}(M^0)$, ce qui entraîne en vertu de (14) et (15) la formule (13), q. f. d.

8'. L'ordre d'un espace E^0 par rapport aux propriétés W_0. W_1 et W_2 sera désigné respectivement par $\omega_0(E^0)$, $\omega_1(E^0)$ et $\omega_2(E^0)$.

Si E^0 est un continu contenant plus d'un point, son ordre (par rapport à une propriété quelconque) est un nombre ordinal de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$.

On ne sait pas s'il existe un continu E^0 et une propriété W tels que la puissance $\omega_W(E^0)$ soit égale à $\mathfrak{c}$. Nous donnerons dans la deuxième partie de cet ouvrage (voir **13.**, p. 140) un exemple d'un continu R pour lequel on a $\omega_0(R) \geqslant \Omega$ (= le premier nombre ordinal de la troisième classe); l'hypothèse du continu implique donc la réponse affirmative à ce problème.

La propriété W_2 remplissant en vertu des théorèmes connus, la condition (λ) du théorème XX, on a le

Théorème XX': *On a* $0 \leqslant \omega_2(E^0) \leqslant 1$ *pour chaque espace* E^0.

9. Nous allons envisager à présent les propriétés W qui, outre les conditions (α), (β) et (γ), remplissent la condition suivante:

(δ) *Etant donnée dans un espace* E^0, *une suite d'ensembles* $\{M_n\}$ *à la propriété* W *convergeant vers un point* $x \in E^0$ [27]) *et formant une chaîne*[28]) *infinie, l'ensemble* $(x) + \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *possède aussi la propriété* W[29]).

En admettant que la propriété W satisfait à (δ), on a les théorèmes suivants.

Théorème XXI: *E^0 étant un espace métrique complet, il en est de même de l'espace $E^{W,\alpha}$ pour chaque α.*

D é m o n s t r a t i o n: Le théorème étant évident pour $\alpha = 0$, admettons qu'il est vrai pour chaque $\xi < \alpha$. Afin de le démontrer

[27]) voir la note [16]), p. 103.

[28]) c. à d. que $M_n \cdot M_{n+1} \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

[29]) La condition (β) résulte de (α) et (δ); c'est d'ailleurs la seule relation d'implication qui existe entre les conditions (α)—(δ). On montre p. ex. que (β) est indépendante de (γ) et (δ), en considérant la propriété suivante W_β de $M \subset E^0$: $M = E^0$ ou M est un sous-ensemble rrbitraire de E^0 ou enfin M est formé tout au plus de deux composantes et contient tous les points de non-connexité locale de E^0, suivant que E^0 n'est pas un continu ou est un continu Péanien ou enfin est un continu non-Péanien. La propriété W_β satisfait aux conditions (γ) et (δ) sans remplir (β).

pour α, considérons une suite de C a u c h y $\{x_n\}$ dans l'espace $E^{W,\alpha}$. Nous pouvons suppposer que cette suite remplit la condition

$$\rho^{W,\alpha}(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

puisque d'une suite quelconque de C a u c h y on peut facilement extraire une telle suite; d'autre part, la suite extraite étant convergente vers un point, on prouve sans peine la convergence de la suite entière vers le même point.

La formule $(\rho^{W,\alpha}) \lhd (\rho^{W,\xi})$ pour $\xi < \alpha$ a pour conséquence que la suite $\{x_n\}$ est aussi une suite de C a u c h y dans tout espace $E^{W,\xi}$ où $\xi < \alpha$; elle converge donc dans chacun de ces espaces vers un point x^ξ. Mais la transformation par coïncidence de $E^{W,\xi}$ en $E^{W,\beta}$ étant continue pour tout $\beta < \xi$, le point x^ξ se transforme en x^β, de sorte que tous les points x^ξ sont formés d'un même élément x de la base E de E^0. Nous allons démontrer que la suite $\{x_n\}$ dans l'espace $E^{W,\alpha}$ converge également vers x.

En effet, d'après (16) et 2. Déf. I, nous avons $\frac{1}{2^n} > \rho^{W,\alpha}(x_n, x_{n+1}) = \sup_{\xi<\alpha} \inf_{M^\xi} \delta^{W,\xi}(M^\xi)$ où $(x_n, x_{n+1}) \subset M^\xi$; il existe par conséquent pour tout $n = 1, 2, \ldots$, et $\xi < \alpha$ un ensemble M_n^ξ à la propriété W tel que $(x_n, x_{n+1}) \subset M_n^\xi \subset E^{W,\xi}$ et $\delta^{W,\xi}(M_n^\xi) < \frac{1}{2^n}$.

On voit donc immédiatement que pour chaque $\xi < \alpha$ et chaque k naturel la suite d'ensembles $\{M_n^\xi\}$ où $n = k, k+1, \ldots$, et le point x satisfont aux hypothèses de la condition (δ). En vertu de (δ) l'ensemble $(x) + \sum_{n=k}^{\infty} M_n^\xi = M_k^\xi$ contient donc les points x et x_k et possède la propriété W. D'autre part, on a $\delta^{W,\xi}(M_k^\xi) = \delta^{W,\xi}(\overline{\sum_{n=k}^{\infty} M_n^\xi}) = \delta^{W,\xi}(\sum_{n=k}^{\infty} M_n^\xi) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \delta^{W,\xi}(M_n^\xi) < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}$, d'où en vertu de 2. Déf. I: $\rho^{W,\alpha}(x, x_k) \leqslant \sup_{\xi<\alpha} \delta^{W,\xi}(M_n^\xi) < \frac{1}{2^{k-1}}$, donc $\lim_{k\to\infty} \rho^{W,\alpha}(x, x_k) = 0$, c. q. f. d.

Théorème XXII: *Si l'espace E^0 est un G_δ-absolu, tous les espaces $E^{W,\alpha}$ le sont aussi.*

D é m o n s t r a t i o n: E^0 étant un G_δ-absolu, on peut remplacer la métrique (ρ^0) de E^0 par une métrique complète, équivalente à (ρ^0).

On obtient de cette manière un espace métrique complet E_1^0. D'après le théorème XXI, les espaces $E_1^{W,\alpha}$ sont complets, donc des G_δ-absolus. Mais en vertu du corollaire V, les espaces $E^{W,\alpha}$ et $E_1^{W,\alpha}$ ont des métriques équivalentes; ils ne diffèrent donc pas au point de vue topologique. Il en résulte que $E^{W,\alpha}$ est aussi un G_δ-absolu, c. q. f. d.

Théorème XXIII: *Soient V et W deux propriétés remplissant les conditions (α), (β), (γ) et (δ) et telles que, pour les espaces G_δ-absolus, les propriétés locales V et W soient équivalentes. Alors, E^0 étant un espace G_δ-absolu, on a $(L^{V,*})=(L^{W,*})$.*

Démonstration: En vertu du théorème XXII, $E^{V,*}$ et $E^{W,\alpha}$ sont des G_δ-absolus; chacun d'eux possède donc par l'hypothèse les deux propriétés *locales* V et W; en vertu du théorème XVIII on a donc l'égalité q. f. d.

Théorème XXIV: *Dans les hypothèses du théorème XXIII, si V est plus faible que W, on a $\omega_V(E^0)\geqslant\omega_W(E^0)$.*

La démonstration est immédiate en vertu du théorème XIX.

9'. Nous allons démontrer que *les propriétés W_0, W_1 et W_2 remplissent la condition* (δ).

(a) Soient $\{M_n\}$ une chaîne d'ensembles dans l'espace E^0 et x le point de E^0 vers lequel converge cette chaîne. Admettons que chaque M_n possède la propriété W_0, c. à d. qu'il soit *connexe*. Il faut démontrer qu'il en est de même de l'ensemble $(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$. En effet, les ensembles M_n formant une chaîne, l'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ est aussi connexe, et comme $x\in\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n}$, on obtient encore un ensemble connexe, en lui ajoutant le point x.

(b) Dans les conditions de (a) supposons encore que chaque M_n soit *compact en soi*. Il faut démontrer qu'il en est de même de l'ensemble $(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$. En effet, soit $\{p_k\}$ une suite de points contenue dans cet ensemble. S'il existe une infinité de points p_k appartenant à un M_n ou identiques à x, la suite $\{p_n\}$ aura comme point limite soit un point de M_n, supposé compact en soi, soit le point x. Si, par contre, chaque M_n ne contient qu'un nombre fini de p_k et s'il n'y a qu'un nombre fini de points $p_k=x$, une infinité d'ensembles M_n contient des points p_k. Or, la suite $\{M_n\}$ convergeant vers le point x, celui-ci est alors le point limite de la suite $\{p_k\}$, c. q. f. d.

(c) Dans les conditions de (a) et (b) admettons encore que chaque M_n soit *localement connexe*; il faut démontrer qu'il en est de même de l'ensemble $M=(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$. Soit $p\in G\subset M$ où G est un ensemble ouvert dans M; il suffit de montrer qu'il existe un ensemble connexe $K\subset G$ contenant p dans son intérieur relatif à M.

Supposons d'abord que $p\neq x$. Dans ce cas, il existe deux ensembles ouverts G_1 et U tels que $p\in G_1\subset G$, $x\in U\subset M$ et $G_1\cdot U=0$. La suite $\{M_n\}$ convergeant vers x, presque tous les M_n sont contenus dans U, donc G_1 n'a des points communs qu'avec un nombre fini d'ensembles M_n. Soit M' leur somme. On a donc $G_1\subset M'$. Comme somme finie de continus Péaniens, M' est localement connexe. Il existe donc un ensemble connexe $K\subset G_1\subset M'$ contenant p dans son intérieur relatif à M', donc aussi relatif à G_1 et enfin à M, car G_1 est ouvert dans M.

Soit maintenant $p=x$. Dans ce cas tous les M_n à partir d'un $n=n_0$ sont contenus dans G. Posons $M'=\sum\limits_{n=1}^{n_0}M_n$. Si p n'appartient pas à M', nous poserons $K=(x)+\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}M_n$. Si par contre $p\in M'$, il existe dans l'ensemble M', qui est localement connexe, un ensemble connexe $K_1\subset M'\cdot G$ contenant x dans son intérieur relatif à M'. Nous poserons dans ce cas $K=K_1+\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}M_n$. Dans les deux derniers cas on montre aussitôt que K ainsi défini contient x dans son intérieur relatif à M, c. q f. d.

Nous avons observé dans **5'**. que les propriétés locales W_0, W_1 et W_2 sont équivalentes pour les espaces G_δ-absolus. En outre, chacune de ces propriétés W_i ($i=0$, 1 et 2) est plus faible que celle qui la suit. On obtient donc, en vertu du théorème XXIII, le

Théorème XXIII': *Si E^0 est un G_δ-absolu, les espaces $E^{0,*}$, $E^{1,*}$ et $E^{2,*}$ ont la même notion de limite*

et, d'après le théorème XXIV, on a le

Corollaire XXIV: *Si E^0 est un G_δ-absolu, on a*

$$\omega_0(E^0)\geqslant\omega_1(E^0)\geqslant\omega_2(E^0).$$

Les théorèmes XX′ et XXIII′ mettent en évidence ce fait curieux que l'*on obtient immédiatement* (pour les espaces E^0 étant des G_δ-absolus) *la notion de limite de* $E^{0,*}$, *en prenant la notion de limite de* $E^{2,1}$, *bien que* $\omega_0(E^0)$ *puisse être un nombre ordinal de la troisième classe.*

10. Soit $\mathfrak{A}$ une classe d'espaces et Φ une classe de fonctions (transformations). Une propriété P d'un espace E^0 est appelée *propriété invariante par rapport à la classe de fonctions* Φ *et à la classe d'espaces* $\mathfrak{A}$, si pour chaque espace $E^0 \epsilon \mathfrak{A}$ possédant la propriété P et pour chaque fonction $f \epsilon \Phi$ qui transforme E^0 en espace $f(E^0) \epsilon \mathfrak{A}$, l'espace $f(E^0)$ possède aussi la propriété P[30]).

Nous nous occuperons ici des propriétés invariantes par rapport à la classe Φ_c des fonctions continues, et à la classe $\mathfrak{A}_E$ de tous les espaces. Nous appellerons ces propriétés tout court *propriétés invariantes.*

Ces propriétés invariantes ne sont d'ailleurs — comme on l'aperçoit aussitôt — que des propriétés intrinsèques (d'un espace considéré comme son propre sous-ensemble) remplissant la condition (γ).

Soit τ une fonction qui fait correspondre à chaque espace E^0 un élément $\tau(E^0)$ d'un ensemble ordonné Z (p. ex. de nombres naturels, de nombres ordinaux, etc.). La fonction τ est dite *semi-invariante inférieurement*, resp. *supérieurement*[31]), lorsque pour chaque $\zeta \epsilon Z$ la propriété $\tau(E^0) \leqslant \zeta$ resp. $\tau(E^0) \geqslant \zeta$ est invariante.

Soit T une opération qui fait correspondre à chaque espace E^0 un espace $T(E^0)$. L'opération T est dite *invariante*, si E^0_1 étant une image continue de E^0, l'espace correspondant $T(E^0_1)$ est une image continue de $T(E^0)$.

A l'aide d'une opération invariante T nous obtenons tout de suite,

[30]) P. ex. soient $\mathfrak{A}_l$ la classe des continus irréductibles, Φ_c la classe des fonctions continues et $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal. La propriété P d'un continu irréductible de contenir $\leqslant \mathfrak{n}$ tranches de diamètre >0 est invariante par rapport à la classe Φ_c et à la classe $\mathfrak{A}_l$ (il y a d'ailleurs à ce sujet des théorèmes beaucoup plus précis, mais nous nous proposons de les publier ailleurs). Un autre exemple constitue la *connexité locale*, qui est une propriété invariante par rapport à la classe des fonctions ainsi dites *intérieures* et la classe de tous les espaces *topologiques* (cf. N. Aronszajn, Fund. Math. XVII, p. 96).

[31]) M. S. Mazurkiewicz (Comptes-Rendus du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Varsovie 1929, p. 67) appelle *semi-invariantes* les fonctions que nous appelons ici *semi invariantes inférieurement.*

à savoir par l'itération de cette opération, une suite des opérations invariantes $\{T^n\}$.

C'est le principe dont nous nous sommes servis pour obtenir les espaces $E^{W,\alpha}$ à l'aide de l'opération T transformant E^0 en $E^{W,1}$. Seulement, pour cette opération T, nous avons trouvé un procédé qui nous a permis de prolonger l'itération aux indices transfinis, ce que nous ne pouvons pas faire dans le cas général où T est une opération invariante quelconque.

Etant donnée une opération invariante T, on en obtient:

1° à l'aide d'une propriété invariante P une suite des propriétés invariantes $\{P^{T^n}\}$ d'un espace E^0 où $n = 1, 2, \ldots$; la propriété P^{T^n} de E^0 consiste en ce que l'espace $T^n(E^0)$ possède la propriété P.

2° à l'aide d'une fonction τ semi-invariante inférieurement ou supérieurement une suite des fonctions $\{\tau^n\}$ du même genre, où $\tau^n(E^0) = \tau(T^n(E^0))$.

Etant donnés deux espaces E^0_1 et E^0_2, on dit que le type de continuité de E^0_1 ne dépasse par celui de E^0_2, en symboles $c(E^0_1) \leqslant c(E^0_2)$, lorsqu'il existe une transformation continue de E^0_2 en E^0_1[32]). Si $c(E^0_1) \leqslant c(E^0_2)$, sans que $c(E^0_2) \leqslant c(E^0_1)$, on a $c(E^0_1) < c(E^0_2)$. Si les formules $c(E^0_1) \leqslant c(E^0_2)$ et $c(E^0_2) \leqslant c(E^0_1)$ se présentent simultanément, on dit que E^0_1 et E^0_2 *sont du même type c*, en symboles $c(E^0_1) = c(E^0_2)$. Enfin, s'il n'existe aucune transformation continue de E^0_1 en E^0_2, ni de E^0_2 en E^0_1, on dit que E^0_1 et E^0_2 sont *incomparables par transformations continues* ou qu'ils sont *incomparables c.*

Pour résoudre le problème mentionné dans l'Introduction et qui consiste à *trouver une classe* $\mathfrak{K}$ *de puissance* $\mathfrak{c}$ *de continus incomparables c* deux à deux, nous allons employer le procédé suivant:

A l'aide d'une opération invariante T (p. ex. l'opération transformant E^0 en $E^{0,1}$, envisagée dans **2.**, p. 197) et d'une fonction τ semi-invariante inférieurement (p. ex. la fonction $\tau(E^0) =$ *nombre de composantes de* E^0), nous obtiendrons une suite infinie de fonctions $\tau(T^n(E^0))$ du même genre. Ensuite, pour chaque suite *non-décroissante* de nombres naturels $\sigma = \{k_n\}$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $k_0 = 1$, nous construirons un continu C_σ tel que l'on ait $\tau(T^n(C_\sigma)) = k_n$ pour chaque n naturel.

Il est évident que si $c(C_{\sigma'}) \geqslant c(C_{\sigma''})$, où $\sigma' = \{k'_n\}$ et $\sigma'' = \{k''_n\}$,

[32]) La notion de type c a été introduite par M. W. Sierpiński (voir Fund. Math. XIV, p. 235).

on a $k_n' \geqslant k_n''$ pour chaque n naturel. Pour résoudre notre problème, il suffit donc de trouver une classe de puissance $\mathfrak{c}$ de suites σ de nombres naturels non-décroissantes telles qu'*aucun* couple σ' et σ'' de ces suites *ne remplisse* la condition $k_n' \geqslant k_n''$ pour toutes les valeurs de n à la fois.

Or, on peut facilement trouver une telle classe de suites, p. ex. la classe de toutes les suites $\{k_n\}$ avec $k_{2n} = 2n - i_n$ et $k_{2n+1} = 2n + i_n$ où $\{i_n\}$ est une suite infinie quelconque formée d'éléments 0 et 1.

En effet, toutes ces suites $\{k_n\}$ sont évidemment non-décroissantes et, la correspondance entre les suites $\{i_n\}$ et $\{k_n\}$ étant biunivoque, la classe des suites $\{k_n\}$ est de puissance $\mathfrak{c}$ comme celle des $\{i_n\}$. D'autre part, à deux suites différentes $\{k_n'\}$ et $\{k_n''\}$ viennent correspondre des suites différentes $\{i_n'\}$ et $\{i_n''\}$. Pour ces dernières, il existe donc un indice n tel que $i_n' \neq i_n''$. Nous pouvons supposer par raison de symétrie que $i_n = 0$ et $i_n'' = 1$. Il en résulte immédiatement que $k_{2n}' = 2n > k_{2n}'' = 2n - 1$ et $k_{2n+1}' = 2n < k_{2n+1}'' = 2n + 1$, c. q. f. d.

Revenons maintenant aux espaces $E^{W,\alpha}$. Nous voyons immédiatement que, étant donnée une propriété W remplissant les conditions (α), (β) et (γ), nous obtenons à l'aide de l'opération $T^\alpha(E^0) = E^{W,\alpha}$ pour α fini ou transfini:

1) de chaque propriété *invariante* P une suite transfinie des propriétés invariantes $P^{W,\alpha}$ de l'espace E^0, où $P^{W,\alpha} = P^{T^\alpha}$, donc exprime le fait que l'espace $E^{W,\alpha}$ possède la propriété P;

2) de chaque fonction τ *semi-invariante* inférieurement ou supérieurement une suite transfinie des fonctions $\tau^{W,\alpha}(E^0) = \tau(E^{W,\alpha})$ du même genre;

3) de chaque propriété V (d'un ensemble $M \subset E^0$) assujettie aux conditions (α), (β) et (γ) une suite transfinie des propriétés $V^{W,\alpha}$ assujetties aux mêmes conditions; la propriété $V^{W,\alpha}$ d'un ensemble $M \subset E^0$ exprime le fait que l'ensemble M, considéré comme sous-ensemble de l'espace $E^{W,\alpha}$, possède la propriété V;

4) de chaque propriété P, resp. de chaque fonction τ, resp. de chaque propriété V, une propriété $P^{W,*}$, resp. fonction $\tau^{W,*}$, resp. propriété $V^{W,*}$ définies comme dans 1), resp. 2), resp. 3), en remplaçant α par un astérisque (voir 8., p. 112);

5) de chaque propriété *invariante* P la fonction *semi-invariante supérieurement* $\tau_P(E^0)$, en posant $\tau_P(E^0) =$ le premier nombre ordinal α, s'il en existe, pour lequel $E^{W,\alpha}$ cesse d'avoir la propriété P et $\tau_P(E^0) = \infty$, si un tel α n'existe pas (nous convenons ici de

considérer le symbole ∞ comme plus grand que tous les nombres ordinaux [33])).

Remarque 1: En procédant comme dans le cas 3), nous pouvons obtenir des propriétés $V^{W,\alpha}$ *non*-intrinsèques, même pour les propriétés W et V intrinsèques. Tel est p. ex. le cas où $V = W = W_0$.

Nous appelons une propriété W *quasi-intrinsèque*, si chaque ensemble M qui la possède par rapport à un espace $E_1^0 \supset M$, la possède également par rapport à chaque espace $E_2^0 \supset E_1^0$.

Or, si V est quasi-intrinsèque et remplit les conditions (α), (β) et (γ), il en est de même de toutes les propriétés $V^{W,\alpha}$, quel que soit α.

Parmi les théorèmes que nous avons démontrés pour les propriétés intrinsèques, il y a plusieurs qui restent vrais pour les propriétés quasi-intrinsèques (p. ex. théorème XI, théorème XII, corollaire XV).

Remarque 2: Si $V = W$ et si W remplit la condition (δ), il en est de même de toutes les $V^{W,\alpha}$, quel que soit α.

10'. Par le procédé décrit au **10.** on peut définir une grande quantité de propriétés et de fonctions *invariantes*, en ne se servant que des trois propriétés W_0, W_1 et W_2. Nous en allons indiquer quelques-unes, qui serons étudiées de plus près dans la deuxième partie de cet ouvrage.

Désignons par $\tau^{i,\alpha}(E^0)$ où $i = 0, 1$ et 2 le nombre (cardinal) de composantes de l'espace $E^{i,\alpha}$, par $\tau^{i,*}(E^0)$ le nombre de composantes de $E^{i,*}$ et par $\lambda_i(E^0)$ le premier nombre ordinal α pour lequel $E^{i,\alpha}$ cesse d'être connexe ou, si un tel nombre n'existe pas, le symbole ∞.

Les fonctions $\tau^{i,\alpha}$ et $\tau^{i,*}$ sont évidemment semi-invariantes inférieurement, tandis que les fonctions λ_i sont semi-invariantes supérieurement.

D'après le théorème X (voir aussi 6'., p. 107) l'espace $E^{0,\alpha}$ est pour chaque α une image continue de l'espace $E^{1,\alpha}$, qui à son tour est une image continue de $E^{2,\alpha}$. Par conséquent, il en est encore de

[33]) Nous avons employé à plusieurs reprises dans les énoncés des théorèmes l'expression „pour chaque nombre ordinal α" et nous venons d'employer l'expression „plus grand que tous les nombres ordinaux" uniquement pour ne pas compliquer les énoncés; tout danger d'antinomie est en effet évitable par la réduction des raisonnements à une classe d'espaces de puissance $< \mathfrak{m}$, ce qui permet de ne considérer que les nombres ordinaux de puissance $< \mathfrak{m} \cdot \aleph_0$ et de désigner par ∞ le premier nombre ordinal de puissance $= \mathfrak{m} \cdot \aleph_0$ (cf. **8**, p. 111).

même pour les espaces $E^{i,*}$ (il faut seulement mettre $\alpha = \max\limits_{i=0,1,2} \omega_i(E^0)$).
Il en résulte pour nos fonctions semi-invariantes inférieurement que

(17) $$\tau^{0,\alpha}(E^0) \leqslant \tau^{1,\alpha}(E^0) \leqslant \tau^{2,\alpha}(E^0) \quad \textit{pour tout } \alpha$$

et

(17′) $$\tau^{0,*}(E^0) \leqslant \tau^{1,*}(E^0) \leqslant \tau^{2,*}(E^0).$$

D'autre part, pour chaque $i = 0$, 1 et 2, l'espace $E^{i,\alpha}$ est une image continue de chaque $E^{i,\beta}$ où $\alpha < \beta$. On obtient donc

(18) $$\tau^{i,0}(E^0) \leqslant \tau^{i,1}(E^0) \leqslant \ldots \leqslant \tau^{i,\alpha}(E^0) \leqslant \ldots \leqslant \tau^{i,*}(E^0).$$

Pour tout espace E^0 qui est un G_δ-absolu, on obtient selon le théorème XXIII′

(19) $$\tau^{0,*}(E^0) = \tau^{1,*}(E^0) = \tau^{2,*}(E^0).$$

Pour les fonctions $\tau^{2,*}$ on a de plus selon le théorème XX′

(20) $$\tau^{2,0}(E^0) \leqslant \tau^{2,1}(E^0) = \tau^{2,2}(E^0) = \ldots = \tau^{2,\alpha}(E^0) = \ldots = \tau^{2,*}(E^0).$$

Nous disons que l'ensemble $M \subset E^0$ est une *L-composante* [34]) de E^0, lorsqu'il est „arcwise connected" [35]) sans être situé dans un autre sous-ensemble de E^0 qui le soit également.

M_1 et M_2 étant deux L-composantes de E^0, on a soit $M_1 = M_2$, soit $M_1 \cdot M_2 = 0$.

On voit facilement que le nombre de L-composantes de $E^{2,1}$ est le même que de $E^{2,0} = E^0$.

En effet, il suffit de montrer que chaque arc simple de $L^{2,1}$, regardé comme sous-ensemble de E^0, est aussi un arc simple et, réciproquement, que chaque arc simple de E^0 en forme aussi un, comme sous-ensemble de $E^{2,1}$. Or, cela résulte immédiatement du théorème I et du théorème XII.

On sait que, dans les espaces G_δ-absolus localement connexes les composantes et les L-composantes coïncident. Par conséquent, pour un espace E^0 qui est un G_δ-absolu, $\tau^{2,1}(E^0)$ désigne le nombre de L-composantes de E^0 (car ce symbole désigne par definition le nombre de composantes de l'espace $E^{2,1}$ localement connexe). Il en résulte selon (19) et (20) que $\tau^{0,*}(E^0) = \tau^{1,*}(E^0) = \tau^{2,*}(E^0) = \tau^{2,1}(E^0)$ désigne également le nombre de L-composantes de E^0.

[34]) Je dois cette notion à M. A. Lindenbaum.
[35]) voir note [18]) p. 106.

Envisageons maintenant les fonctions λ_i. Leur définition implique immédiatement les propriétés suivantes:

(21) *Pour que $\lambda_i(E^0) = \alpha$ où α est un nombre ordinal, il faut et il suffit que l'on ait $\tau^{i,\alpha}(E^0) > 1$ et $\tau^{i,\xi}(E^0) = 1$ pour chaque $\xi < \alpha$,*

(22) *Pour que $\lambda_i(E^0) = \infty$, il faut et il suffit que l'on ait $\tau^{i,*}(E^0) = 1$,*

(23) *E^0 étant un G_δ-absolu, pour que $\lambda_i(E^0) = \infty$, il faut et il suffit que E^0 soit „arcwise connected"* (c. à d. que E^0 coïncide avec sa L-composante unique).

Remarquons d'autre part, que *pour tout* $i = 0$, 1 *et* 2:

(24) *E^0 étant „arcwise connected" et d'ailleurs quelconque, on a $\tau^{i,\alpha}(E^0) = \tau^{i,*}(E^0) = 1$, quel que soit α, et $\lambda_i(E^0) = \infty$.*

(25) *Si $\lambda_i(E^0) \neq \infty$, on a $\lambda_i(E^0) \leqslant \omega_i(E)$.*

Deuxième Partie.

11. Nous allons construire à présent pour chaque nombre ordinal α de la première ou deuxième classe un continu A_α et un continu B_α situés dans le plan euclidien et tels que

(1) $$\lambda_0(A_\alpha) = \omega_0(A_\alpha) = \alpha.$$

(1′) $$\lambda_1(B_\alpha) = \omega_1(B_\alpha) = \alpha,$$

(2) $$\tau^{0,*}(A_\alpha) = 2,$$

(2′) $$\tau^{1,*}(B_\alpha) = 2.$$

A cet effet nous choisissons:

1° dans le plan euclidien la direction verticale et la direction de gauche à droite,

2° un segment vertical S de longueur $\frac{1}{2}$ aux sommets: supérieur s et inférieur s' et désignons: par I le carré ayant S comme son coté gauche, par T le coté droit de I et par t le sommet supérieur de T,

3° pour chaque nombre ordinal $\alpha > 1$ de la première ou deuxième classe, une suite dénombrable $\{\xi_n^{(\alpha)}\}$ de nombres ordinaux telle que pour tout $n = 1, 2, \ldots$:

a) $\xi_n^{(\alpha)} \leqslant \xi_{n+1}^{(\alpha)} < \alpha$,

b) *il n'existe aucun β tel que $\xi_n^{(\alpha)} < \beta < \alpha$, pour tout n.*

c) *si α est de première espèce, on a $\xi_n^{(\alpha)} = \alpha - 1$.*

Du choix effectif des suites $\{\xi_n^{(\alpha)}\}$ dépendra l'effectivité des continus A_α et B_α; plus précisément, en déterminant effectivement les suites $\{\xi_n^{(\alpha)}\}$ pour chaque $\alpha \leqslant \alpha_0$, nous obtiendrons une définition effective des continus A_α et B_α pour $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Nous assujettissons en outre les continus à construire aux conditions suivantes:

(3) $\quad S \subset A_\alpha \subset I, \quad A_\alpha \cdot T = (t),$

(3') $\quad S \subset B_\alpha \subset I, \quad B_\alpha \cdot T = (t),$

(4) $\quad$ *S est une L-composante de A_α,*

(4') $\quad$ *S est une L-composante de B_α.*

Nous définirons A_α et B_α par l'induction transfinie.

Déf. II: A_1) Désignons pour tout $n = 1, 2, \ldots$: par t_n les points situés sur le coté supérieur de I tels que, (ϱ) désignant la métrique du plan euclidien,

$$\varrho(s, t_{2n-1}) = \frac{1}{3^n} \quad et \quad \varrho(s, t_{2n}) = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

et par t'_n les points situés sur le coté inférieur de I tels que:

$$\varrho(s', t'_{2n-1}) = \frac{1}{3^n} \quad et \quad \varrho(s', t'_{2n}) = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

$[a; b]$ désignant d'une façon générale le segment réctiligne à extrémités a et b, posons (voir fig. 1., p. 125):

$$A_1 = S + [t; t_1] + \sum_{n=1}^{\infty} [t_{2n}; t_{2n+1}] + \sum_{n=1}^{\infty} [t'_{2n-1}; t'_{2n}] + \sum_{n=1}^{\infty} [t_n; t'_n]. \tag{5}$$

On voit immédiatement que les conditions (1)—(4) se trouvent remplies. P. ex. on vérifie la condition (1), en remarquant que l'espace $A_1^{0,1}$ est localement connexe.

A_α) Admettons que pour chaque $\alpha < \alpha_0$ les continus A_α remplissant les conditions (1)—(4) soient déjà construits.

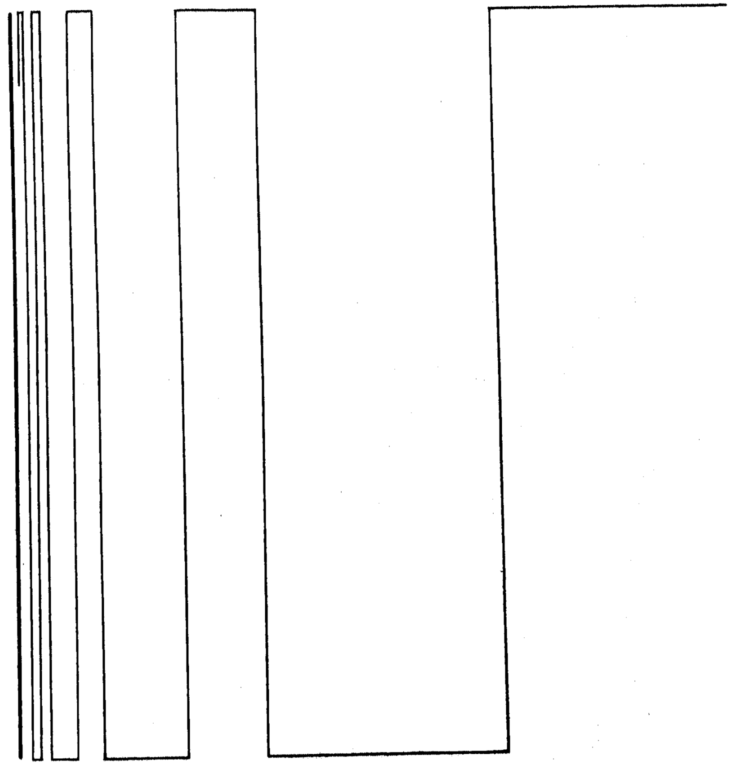

Fig. 1.

Prenons sur chaque segment $[t_n; t'_n]$ pour $n = 2, 3, \ldots$ du continu A_1 le segment moyen de longueur $\varrho(t_n, t_{n-1})$. Soient s_n resp. s'_n les sommets supérieur resp. inférieur de ce segment, donc

$$[s_n; s'_n] \subset [t_n; t'_n], \quad \varrho(s_n, s'_n) = \varrho(t_n, t_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2} 3^{-\frac{n}{2}} \tag{6}$$

et

$$\varrho(s_n, t_n) = \varrho(s'_n, t'_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \varrho(t_n, t_{n-1}). \tag{7}$$

Soient maintenant I^k le carré de coté gauche $[s_k; s'_k]$, T^k le coté droit de I^k, t^k le sommet supérieur de T^k. On a évidemment

$$I^k \cdot A_1 = [s_k; s'_k] + T^k. \tag{8}$$

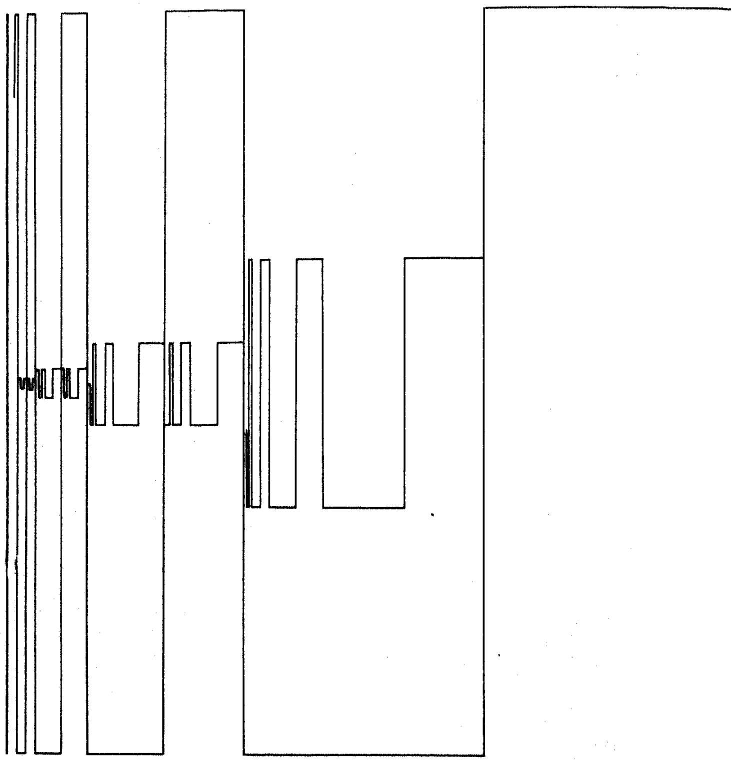

Fig 2.

Par la transformation homothétique de I en I^k qui fait correspondre le segment $[s_k; s_k']$ à S, T^k à T, et t^k à t, le continu $A_{\xi_k^{(\alpha_0)}}$ donne un continu que nous désignons par C_k. Posons (voir fig. 2 pour $\alpha_0 = 2$ et fig. 3, p. 127, pour $\alpha_0 = 3$):

(9) $$A_{\alpha_0} = A_1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k.$$

Nous allons démontrer que la formule (9) détermine un continu A_{α_0} remplissant les conditions (1)—(4). On voit immédiatement que A_{α_0} est un continu et qu'il remplit la condition (3). Pour établir la formule (4), il suffit de prouver qu'il n'existe aucun arc simple $L \subset A_{\alpha_0}$ unissant un point $p \in A_{\alpha_0} - S$ au point $q = S \cdot L$.

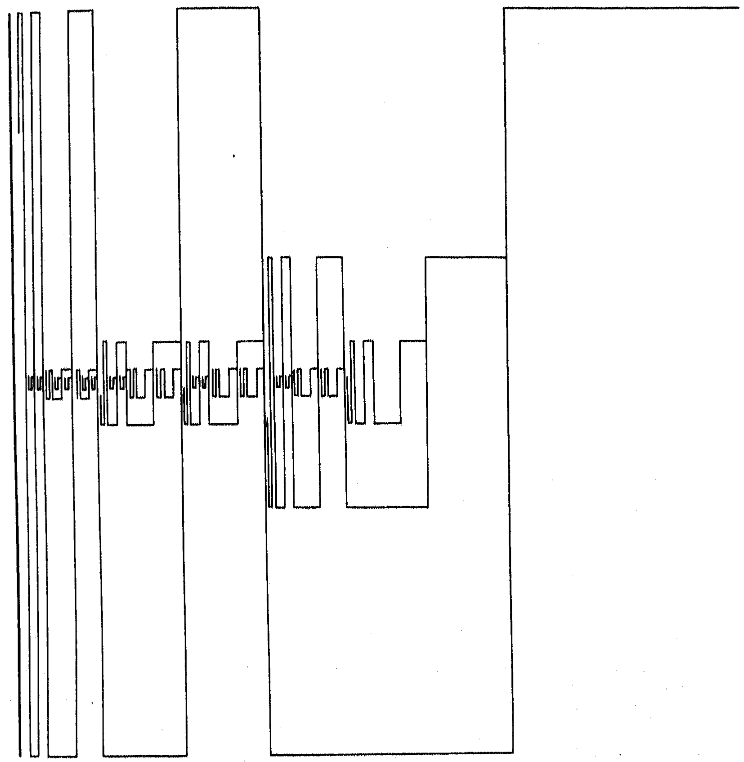

Fig. 3.

En effet, dans le cas contraire, soit L_1 un arc de diamètre $\delta(L_1) < \frac{1}{4}$ à extrémités q et p_1 et contenu dans L. Soit n un entier tel que $3^{-n} < \varrho(p_1, S)$. On voit tout de suite que les segments $[t_{2n-1}; t'_{2n-1}]$ et $[t_{2n}; t'_{2n}]$ coupent le carré I, et à plus forte raison l'arc L_1, entre p_1 et q. Il existe donc un arc L_2 contenu dans L_1 et tel que chacun des ensembles $L_2 \cdot [t_{2n-1}; t'_{2n-1}]$ et $L_2 \cdot [t_{2n}; t'_{2n}]$ se compose d'un seul point.

Par définition de A_{α_0} chaque sous-continu de A_{α_0} qui unit un point de $[t_{2n-1}; t'_{2n-1}]$ à un point de $[t_{2n}; t'_{2n}]$ doit contenir soit le segment $[t'_{2n-1}; t'_{2n}]$ soit un sous-continu de C_{2n} unissant le point t_{2n} à un point du segment $[s_{2n}; s'_{2n}]$. Mais pour L_2 ce deuxième cas est impossible, car, d'après la homothétie entre C_{2n} et $A_{\xi_{2n}^{(\alpha_0)}}$ et d'après (4) pour $\xi_{2n}^{(\alpha_0)} < \alpha_0$, le point t^{2n} ne peut être uni à un point de $[s_{2n}; s'_{2n}]$

par un arc contenu dans C_{2n}. On obtient par conséquent $[t'_{2n-1}; t'_{2n}] \subset \subset L_2 \subset L_1$ et d'une façon analogue $[t_{2n}; t_{2n+1}] \subset L_1$, donc $\delta(L_1) \geqslant \geqslant \varrho(t_{2n}, t'_{2n}) = \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas compatible avec $\delta(L_1) < \frac{1}{4}$. La formule (4) se trouve ainsi établie.

D'autre part, $A_{\xi_k^{(\alpha_0)}}$ étant un continu, donc un G_δ-absolu, il n'existe d'après (2) dans $A_{\xi_k^{(\alpha_0)}}$ que deux L composantes. Par homothétie, il en est de même de C_k, dont le segment $[s_k; s'_k]$ constitue donc l'une et, par conséquent, l'ensemble $C_k - [s_k; s'_k]$ l'autre L-composante. L'ensemble $A_1 - S$ étant „arcwise connected", en vertu de la formule $(A_1 - S)\cdot(C_k - [s_k; s'_k]) = t^k$, l'ensemble

$$A_{\alpha_0} - S = (A_1 - S) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k = (A_1 - S) + \sum_{k=2}^{\infty}(C_k - [s_k; s'_k])$$

est aussi „arcwise connected". Mais S étant une L-composante de A_{α_0}, il en résulte que $A_{\alpha_0} - S$ l'est également; on a donc $\tau^{0,*}(A_{\alpha_0}) = 2$. De cette manière le formule (2) se trouve aussi établie.

Il reste à établir la formule (1). Nous allons démontrer d'abord que

$$(10) \qquad \tau^{0,\alpha}(A_{\alpha_0}) = 1 \quad \textit{pour tout} \quad \alpha < \alpha_0.$$

Il s'agit donc de montrer que l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\alpha}$ est connexe. Les ensembles S et $A_{\alpha_0} - S$ étant „arcwise connected" (comme sous-ensembles de $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$ pour chaque β), il suffit de prouver que S contient un point limite de $A_{\alpha_0} - S$ dans l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\alpha}$.

En effet, il existe, d'après 3⁰, a) et b), p. 124, un k_0 tel que pour tout $k > k_0$ on a $\alpha \leqslant \xi_k^{(\alpha_0)} < \alpha_0$. Considérons les points t^k et t^{k+1} pour $k > k_0$. On a $(t^k, t^{k+1}) \subset C_k$. La frontière de C_k par rapport à A_{α_0} se composant de trois points s_k, s'_k et t^k, l'espace $C_k^{0,\beta}$, donc aussi l'espace $A_{\xi_k^{(\alpha_0)}}^{0,\beta}$, est d'après le corollaire XIV homéomorphe pour chaque β avec l'ensemble C_k considéré comme sous-ensemble de $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$. Par conséquent, d'après (1) pour $\beta < \alpha \leqslant \xi_k^{(\alpha_0)}$, l'ensemble C_k dans l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$ est connexe, ce qui donne en vertu du théorème I:

$$\delta^{0,\beta}(C_k) = \delta(C_k) \leqslant \delta(I^k) \leqslant 3^{-\frac{k}{2}}$$

et enfin

$$\varrho^{0,\alpha}(t^k, t^{k+1}) \leqslant \sup_{\beta<\alpha} \delta^{0,\beta}(C_k) \leqslant 3^{-\frac{k}{2}}.$$

Il en résulte que les points t^k forment dans l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\alpha}$ une suite de Cauchy. Selon le théorème XXI, $A_{\alpha_0}^{0,\alpha}$ étant un espace complet, cette suite est convergente et elle converge dans l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\alpha}$ vers le même point que dans le continu A_{α_0}, à savoir vers le milieu du segment S. Ainsi la formule (10) est démontrée.

Nous allons démontrer ensuite que

$$(11) \qquad \omega_0(A_{\alpha_0}) \leqq \alpha_0.$$

Il s'agit donc de montrer que les espaces $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0}$ et $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0+1}$ ont la même notion de limite. Il suffit à ce but de prouver qu'il n'existe aucune suite $\{x_n\}$ convergente dans le premier de ces espaces et qui ne possède aucun point-limite dans le second.

En effet, on a d'après (9):

$$(12) \qquad A_{\alpha_0} = S + (A_1 - S) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k.$$

Les ensembles S et $A_1 - S$ étant localement connexes comme sous-ensembles de A_{α_0}, ils ont d'après le théorème XII la même notion de limite dans tout $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$, donc à plus forte raison dans $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0}$ et $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0+1}$. D'autre part, l'ensemble C_k, considéré comme sous-ensemble de l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$, étant homéomorphe à l'espace $A_{\xi_k^{(\alpha_0)}}^{0,\beta}$, il en résulte d'après (1) et (2) que

(13) *pour tout $\beta \geqslant \xi_k^{(\alpha_0)}$ l'ensemble C_k, comme sous-ensemble de $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$, est localement connexe et est constitué de deux composantes, à savoir de $[s_k; s'_k]$ et $(C_k - [s_k; s'_k])$.*

La notion de limite de C_k dans $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0}$ coïncide donc avec celle de C_k dans $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0+1}$. Ainsi tous les sommandes du membre droit de l'égalité (12) ont la même notion de limite dans les deux espaces. Il s'ensuit qu'une suite donnée $\{x_n\}$, supposé convergente dans $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0}$ vers un point x et n'ayant aucun point limite dans $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0+1}$, ne peut contenir qu'un nombre fini de points appartenant à celui des ensembles S, $A_1 - S$ et C_k où $k = 2, 3, \dots$ qui contient le point x. Or, la suite $\{x_n\}$ convergeant vers x aussi dans A_{α_0} (puisque la transformation par coïncidence de $A_{\alpha_0}^{0,\alpha_0}$ en A_{α_0} est continue) et S et C_k étant dans A_{α_0} des continus, aucun des ensembles S et C_k ne contient une infinité de points x_n. D'après (12) il y a par conséquent soit une infinité d'ensembles C_k contenant des points x_n, soit une infinité de points x_n contenus dans $A_1 - S$. Dans les deux cas on en conclut immédiatement que $x \epsilon S$ et qu'il y a une infinité de points $x_n \epsilon A_{\alpha_0} - S$, donc, comme $\lim_{n\to\infty} \varrho^{0,\alpha_0}(x, x_n) = 0$, qu'il existe un $x_n \epsilon A_{\alpha_0} - S$ tel que $\varrho^{0,\alpha_0}(x, x_n) < \frac{1}{2}$.

Comme $x \epsilon S$ et $x_n \epsilon A_{\alpha_0} - S$, il existe un k_0 tel que chaque segment $[t_k, t'_k]$ où $k > k_0$ coupe A_{α_0}, et à plus forte raison tout $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$, entre x_n et S.

Posons pour abréger $\beta = \xi_{2k_0+2}^{(\alpha_0)}$. On a donc selon 3° a) et d'après **2**. Déf. I et Rem.: $\frac{1}{2} > \varrho^{0,\alpha_0}(x, x_n) \geqslant \varrho^{0,\beta+1}(x, x_n) = \inf_{M^\beta} \delta^{0,\beta}(M^\beta)$, donc pour un ensemble M^β connexe dans $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$ et unissant x à x_n:

(14) $$\delta^{0,\beta}(M^\beta) < \tfrac{1}{2}.$$

L'ensemble M^β contient donc pour tout $k > k_0$ des points de chacun de ces segments. Or, les segments $[t_{2k}; t'_{2k}]$ et $[t_{2k+1}; t'_{2k+1}]$ sont unis dans l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$ seulement par le segment $[t_{2k}; t_{2k+1}]$, car C_{2k+1} dans l'espace $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$ est formé d'après (13) de deux composantes dont chacune n'a des points communs qu'avec un des segments $[t_{2k}; t'_{2k}]$ ou $[t_{2k+1}; t'_{2k+1}]$. Ceux-ci étant unis par l'ensemble M^β connexe dans $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$, le segment $[t_{2k}; t_{2k+1}]$ serait contenu dans M^β. De même, les segments $[t_{2k+1}; t'_{2k+1}]$ et $[t_{2k+2}; t'_{2k+2}]$ n'étant unis dans $A_{\alpha_0}^{0,\beta}$ que par le segment $[t'_{2k+1}; t'_{2k+2}]$, celui-ci serait également contenu dans M^β, d'où $\delta^{0,\beta}(M^\beta) \geqslant \varrho^{0,\beta}(t_{2k+1}, t'_{2k+1}) \geqslant \varrho(t_{2k+1}, t'_{2k+1}] = \frac{1}{2}$, contrairement à (14). Ainsi la formule (11) se trouve également établie.

Les formules (10) et (11) entraînent d'après (2) et selon les propriétés (22) et (25) de la fonction λ_0 (voir **10'**, p. 123) que $\alpha_0 \leqslant \lambda_0(A_{\alpha_0}) \leqslant \omega_0(A_{\alpha_0}) \leqslant \alpha_0$; ce qui achève la démonstration de la formule (1) pour $\alpha = \alpha_0$.

Il est prouvé que le continu A_{α_0} obtenu suivant Déf. II remplit toutes les conditions (1)—(4); la définition des continus A_α par induction transfinie est ainsi établie.

Passons maintenant à la définition des continus B_α. Nous les construirons de manière qu'ils remplissent, en dehors des conditions (1')—(4'), la condition suivante:

(15) *Pour chaque $\beta < \alpha$ l'espace $B_\alpha^{1,\beta}$ est un semi-continu.*

Déf. II'. B_1) Posons

(16) $$B_1 = A_1.$$

On vérifie aisément que B_1 remplit les conditions (1')—(4') et (15).

B_α) Supposons que pour chaque $\alpha < \alpha_0$ les continus B_α assujettis aux conditions (1')—(4') et (15) soient déjà définis.

Considérons le continu A_1. Divisons chaque segment $[t_n; t'_n]$ où $n > 1$ du continu A_1 en segments de longueur $\varrho(t_n, t_{n-1})$. Pour n impair on obtiendra donc $3^{\frac{n+1}{2}}$, et pour n pair $3^{\frac{n}{2}}$ de ces segments. Désignons par S_n^i le $2i$-ème segment obtenu par la division de $[t_n; t'_n]$, en les comptant de haut en bas, et par I_n^i le carré ayant S_n^i pour le coté gauche. Par transformation homothétique de I en I_n^i qui fait correspondre S_n^i à S on obtiendra du continu $B_{\xi_n^{(\alpha_0)}}$ un continu $C_n^i \subset I_n^i$ tel que

(17) $$C_n^i \cdot A_1 = S_n^i + (p_n^i) \quad \text{où} \quad p_n^i \epsilon [t_{n-1}; t'_{n-1}]$$

et

(18) $$\delta(C_n^i) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} 3^{-\frac{n}{2}}.$$

Posons (voir fig. 4, p. 132, pour $\alpha_0 = 2$):

(19) $$B_{\alpha_0} = B_1 + \sum_{\substack{n=1 \\ i=1}}^{\infty} C_n^i.$$

On voit tout de suite que B_{α_0} est un continu et qu'il remplit la condition (3'). Pour montrer qu'il remplit les conditions (2') et (4'), on procédera de la manière analogue à celle pour les conditions (2) et (4) de A_{α_0}.

Démontrons maintenant la condition (15). Les ensembles S et $B_{\alpha_0} - S$ étant des L-composantes de chaque espace $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$ où $\beta < \alpha_0$, il suffit de trouver dans chacun de ces espaces un continu unissant S à $B_{\alpha_0} - S$. Nous allons prouver à ce but que A_1, considéré comme sous-ensemble de $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$, est un continu. Nous montrerons notamment que la notion de limite de A_1 est la même dans $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$ que dans B_{α_0} ou, ce qui revient au même, que chaque suite $\{x_n\} \subset A_1$ convergente dans B_{α_0} vers un point q converge vers le même point dans $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$. Or, on remarque facilement que l'on peut se borner aux suites $\{x_n\} \subset A_1 - S$ convergentes dans B_{α_0} vers un $q \epsilon S$, car d'une part les ensembles S et $A_1 - S$, comme localement connexes dans B_{α_0}, ont dans B_{α_0} et dans $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$ les mêmes notions de limite et d'autre part l'ensemble S et compact en soi et l'ensemble $A_1 - S$ est localement compact [36]).

[36]) Un espace, ou un ensemble M considéré comme espace, est dit *localement compact*, lorsque pour tout point $p \epsilon M$ il existe un ensemble $Q \subset M$ compact en soi et contenant p dans son intérieur relatif à M (cf. M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, p. 223).

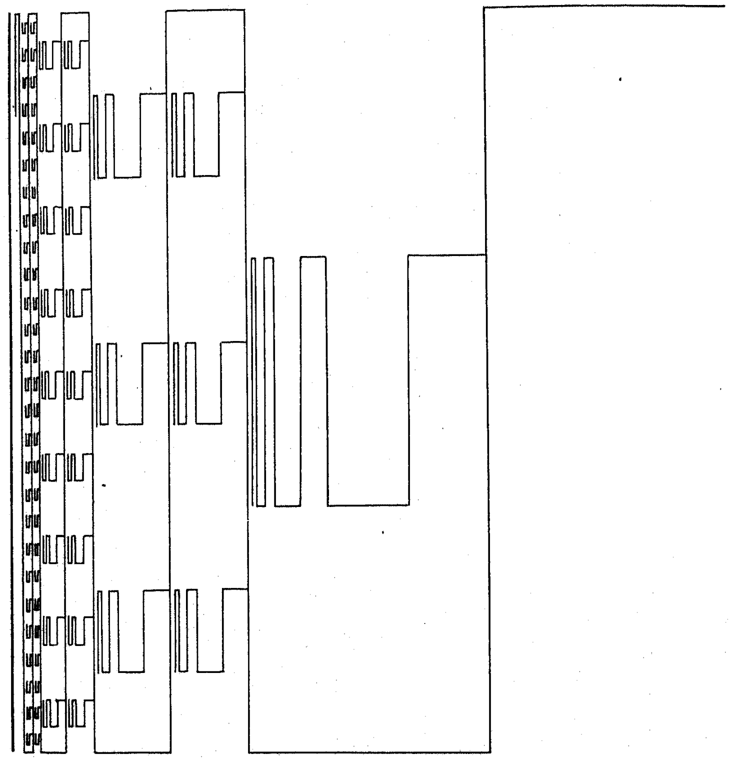

Fig. 4.

Or, considérons les points $y_n \in [t_n; t_n']$ situés sur la même ligne horizontale que q. Par définition de A_1 il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un N_ε naturel tel que

(20) *Pour tout* $n > N_\varepsilon$ *le point* x_n *peut être lié avec un* y_{k_n} *par un arc simple* $L_n \subset A_1 - S$ *de diamètre* $\delta(L_n) < \varepsilon$.

Mais les arcs L_n ont la même notion de limite dans chacun des espaces $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$; on a donc, d'après le théorème I, $\varrho^{1,\beta}(x_n, y_{k_n}) \leqslant \delta^{1,\beta}(L_n) = \delta(L_n) < \varepsilon$. Il s'ensuit que la démonstration de la convergence de la suite $\{x_n\}$ vers q dans $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$ se réduit à celle de la suite $\{y_n\}$.

Or, par la définition de B_{α_0} (cf. aussi (17)) il existe pour chaque $n > 1$ un continu $C_n^{l_n} \subset B_{\alpha_0}$ tel que, s_n désignant le sommet supérieur de $S_n^{l_n}$, on a

$$(21) \qquad \varrho(y_n, s_n) = \varrho(y_{n-1}, p_n^{l_n}) < \varrho(t_n, t_{n-1}) \leqslant \tfrac{1}{2}\, 3^{-\frac{n}{2}}.$$

D'après 3° a) et b) il existe un n_0 tel que

$$(22) \qquad \xi_n^{(\alpha_0)} \geqslant \beta \quad \textit{pour tout} \quad n > n_0.$$

La frontière de $C_n^{l_n}$ relative à B_{α_0} ne contenant qu'un nombre fini de points, l'ensemble $C_n^{l_n}$, regardé comme sous-ensemble de $B_{\alpha_0}^{1,\gamma}$ quel que soit γ, a la même notion de limite que l'espace $(C_n^{l_n})^{1,\gamma}$. Mais celui-ci étant en raison de la homothétie entre $C_n^{l_n}$ et $B_{\xi_n^{(\alpha)}}$ homéomorphe à l'espace $B_{\xi_n^{(\alpha_0)}}^{1,\gamma}$, on conclut de (15) et (22) que pour tout $n > n_0$ et $\gamma < \beta$ l'ensemble $(C_n^{l_n})^{1,\gamma}$ est un semicontinu et par suite qu'il contient un continu K_n^γ qui unit les points s_n et $p_n^{l_n}$ et qui est un continu également dans l'espace $B_{\alpha_0}^{1,\gamma}$. En vertu du théorème I, il en résulte que $\delta^{1,\gamma}(K_n^\gamma) = \delta(K_n^\gamma)$, donc, d'après **2**. Déf. I et (18), on a

$$(23) \quad \varrho^{1,\beta}(s_n, p^{l_n}) \leqslant \sup_{\gamma<\beta} \delta^{1,\gamma}(K_n^\gamma) = \sup_{\gamma<\beta} \delta(K_n^\gamma) \leqslant \delta(C_n^{l_n}) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\, 3^{-\frac{n}{2}}.$$

D'autre part, d'après (21), on a immédiatement

$$\varrho^{1,\beta}(y_n, s_n) \leqslant \delta^{1,\beta}([y_n; s_n]) = \delta([y_n; s_n]) = \varrho(y_n, s_n) < \frac{1}{2}\, 3^{-\frac{n}{2}}$$

et de même

$$\varrho^{1,\beta}(y_{n-1}, p_n^{l_n}) < \frac{1}{2}\, 3^{-\frac{n}{2}},$$

ce qui nous donne avec (23) l'inégalité

$$\varrho^{1,\beta}(y_n, y_{n-1}) \leqslant \varrho^{1,\beta}(y_n, s_n) + \varrho^{1,\beta}(s_n, p_n^{l_n}) + \varrho^{1,\beta}(y_{n-1}, p_n^{l_n}) < \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 3^{-\frac{n}{2}}.$$

Par conséquent, les points y_n forment une suite de Cauchy; donc, l'espace $B_{\alpha_0}^{1,\beta}$ étant complet, la suite $\{y_n\}$ est convergente et elle y converge vers le points q comme dans l'espace $B_{\alpha_0}^{1,0} = B_{\alpha_0}$. La condition (15) se trouve ainsi démontrée pour tout $\beta < \alpha_0$.

Il en résulte immédiatement que

$$(24) \qquad \tau^{1,\beta}(B_{\alpha_0}) = 1 \quad \textit{pour tout} \quad \beta < \alpha_0.$$

D'autre part, on démontrera la formule

$$(25) \qquad \omega_1(B_{\alpha_0}) \leqslant \alpha_0$$

de la même façon que la formule (11) pour A_{α_0}.

Les formules (24) et (25) donnent la condition (1′) pour tout $\alpha = \alpha_0$. Ainsi la définition des continus B_α est achevée.

Remarque. Comme la suite $\{\xi_n^{(\alpha)}\}$ est donnée effectivement pour chaque $\alpha > 1$ naturel par la formule 3° c), les continus A_k, resp. B_k, se trouvent déterminés pour tout k naturel par la Déf. II, resp. par la Déf. II′, d'une manière tout à fait effective.

12. Nous allons construire maintenant une classe $\mathfrak{K}$ de puissance $\mathfrak{c}$ de continus incomparables c.

Il est à remarquer que déjà les continus A_α, resp. B_α, sont incomparables c deux à deux, ce qui ne nous donne cependant qu'une classe de puissance $\aleph_1$.

En effet, A_α n'est pas une image continue d'aucun A_β où $\alpha < \beta$, puisque $\tau^{0,\alpha}(A_\alpha) = 2 > 1 = \tau^{0,\alpha}(A_\beta)$, la fonction $\tau^{0,\alpha}$ étant semi-invariante inférieurement.

Pour démontrer que, réciproquement, A_β n'est pas une image continue de A_α, envisageons la classe des continus C assujettis à la condition suivante:

(26) *$N(C)$ désignant l'ensemble de points de non-connexité locale de C, toutes les composantes de la fermeture $\overline{N(C)}$ relative à C sont des continus Péaniens, tandis que tout continu $K \subset C$ qui en contient une infinité est non-Péanien.*

Les composantes de $\overline{N(C)}$ formant une décomposition semi-continue de $\overline{N(C)}$, considérons l'hyperespace de cette décomposition[37]) et désignons par $\nu(C)$ le premier indice ν_0 à partir duquel le ν-ème dérivé[38]) de cet hyperespace est dense en soi. Etant donné un α ordinal, on démontre que la propriété d'un continu C de donner $\nu(C) \leqslant \alpha$ est invariante par rapport à la classe des continus remplissant la condition (26) et à la classe Φ_c des fonctions continues. Or, il est facile de vérifier que tout continu A_α et B_α remplit la condition (26) et que l'on a en outre $\nu(A_\alpha) = \nu(B_\alpha) = \alpha - 1$ pour tout α naturel et $\nu(A_\alpha) = \nu(B_\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \geqslant \omega$. Il s'ensuit que A_α ne peut pas être transformé d'une manière continue en A_β, car l'inégalité $\alpha < \beta$ entraîne $\nu(A_\alpha) < \nu(A_\beta)$.

Suivant la méthode génerale décrite dans **10.**, il suffit pour cela de construire les continus C_σ pour chaque suite $\sigma = \{k_n\}$ où $1 = k_0 \leqslant \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dots$

Considérons à ce but un segment vertical L de longueur $\frac{1}{2}$ et désignons par p resp. par p' les sommets supérieur resp. inférieur

[37]) Pour la notion de décomposition semicontinue et de son hyperespace voir p. ex. C. Kuratowski, Fund. Math. **XI**, p. 169; ce que nous appelons ici *décomposition semicontinue* y est appelée *décomposition semicontinue supérieurement*.

[38]) Pour les dérivés d'espaces cf. F. Hausdorff, l. c., p. 166.

de L et par p_n le point de L tel que $\varrho(p', p_n) = \frac{1}{2^n}$ où $n = 1, 2, \dots$ et $p_1 = p$. Posons ensuite $L_n = [p_{2n-1}; p_{2n}]$ et $K_n =$ le carré ayant L_n pour le coté gauche. Soit pour tout n naturel, de même que pour tout indice i (s'il en existe) tel que $k_{n-1} \leqslant i < k_n$, F_i le continu qui s'obtient de A_n par la transformation homothétique du carré I en carré K_i qui fait correspondre le segment L_i au segment S. La suite $\{F_i\}$ des continus ainsi obtenus sera finie ou infinie suivant que la suite $\{k_n\}$ est bornée ou non. Posons:

$$C_\sigma = L + \sum_i F_i,$$

où la somme s'étend à tous les F_i définis ci-dessus.

On voit aussitôt que C est un continu, car, s'il y a une infinité de F_i, ils convergent vers le point p'. D'autre part, dans chaque espace $C_\sigma^{0,\alpha}$ le segment L est un arc simple et F_i est homéomorphe à l'espace $A_n^{0,\alpha}$ tel que $k_{n-1} \leqslant i < k_n$, car la frontière de F_i relative à C_σ se compose de deux points p_{2i-1} et p_{2i}.

Il en résulte en vertu des propriétés (1), (2) et (4) de A_n que

$$\tau^{0,n}(C_\sigma) = 1 + \sum_i (\tau^{0,n}(F_i) - 1).$$

Mais $\tau^{0,n}(F_i) = 1$ pour tout $i \geqslant k_n$ et $\tau^{0,n}(F_i) = 2$ pour tout $1 \leqslant i < k_n$; par conséquent, $\tau^{0,n}(C_\sigma) = 1 + (k_n - 1) = k_n$.

Les continus C_σ possèdent donc en effet par rapport aux fonctions $\tau^{0,n}$ la propriété exigée dans **10.** p. 119. La construction de la classe $\mathfrak{K}$ se trouve ainsi réalisée.

Les continus C_σ peuvent servir encore pour résoudre (par affirmative) le problème suivant: *construire une infinité de continus $C^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, dont les types de continuité forment une suite croissante* resp. *décroissante*, c. à d. telle que l'on ait pour chaque n naturel

$$c(C^{(n)}) < c(C^{(n+1)}), \quad \text{resp.} \quad c(C^{(n)}) > c(C^{(n+1)}).$$

Il est en effet évident de la construction des continus C_σ que les inégalités

$$(27) \qquad k'_n - k'_{n-1} \geqslant k_n - k_{n-1} \quad pour \quad n = 1, 2, \dots$$

entraînent l'inégalité $c(C_\sigma) \leqslant c(C_{\sigma'})$ où $\sigma = \{k_n\}$ et $\sigma' = \{k'_n\}$. D'autre part, si les inégalités (27) ont lieu, mais si pour l'une d'elles le signe d'égalité est exclu, alors $c(C_\sigma) < c(C_{\sigma'})$.

Par conséquent, pour résoudre le problème considéré, il suffit de prendre une suite de continus $\{C_{\sigma_i}\}$ où $\sigma_i = \{k_n^{(i)}\}$ et de poser p. ex.: $k_0^{(i)} = 1$ et $k_n^{(i)} = n + i$ pour tout $n > 0$, lorsqu'il s'agit d'obtenir les types de continuité croissants, resp. $k_n^{(i)} = 1$ pour $n \leqslant i$ et $k_n^{(i)} = n - i + 1$ pour $n > i$, lorsqu'il s'agit d'obtenir les types c décroissants.

Le problème s'impose: *existe-t-il une classe de puissance* $> \aleph_0$ *de continus dont les types c forment un ensemble ordonné*, c. à d. ne contenant aucun couple de continus incomparables c?

La solution affirmative du problème ainsi formulé peut être donnée facilement par la construction de $\aleph_1$ continus $A_{\alpha,1}$ où $\alpha < \Omega$, dont les types c forment donc un ensemble ordonné du type Ω. Ces continus $A_{\alpha,1}$ s'obtiennent des A_α, en ajoutant à ces derniers le coté inférieur du carré I.

Reste ouverte la question *quels sont les types des ensembles ordonnés que peuvent former les types de continuité des continus*? En particulier, peuvent ils former des ensembles ordonnés du type Ω^*, du type η (type de l'ensemble des nombres rationnels) et du type λ (celui de l'ensemble des nombres réels)? [39]).

13. Nous allons construire à present un continu R tel que

(28) *quel que soit le continu* C, *on a* $\omega_i(R) \geqslant \omega_i(C)$ *pour* $i = 0$ *et* 1.

Avant d'aborder la construction de R, nous démontrerons le lemme suivant:

Lemme A: *Soit* E^0 *un espace métrique à la métrique* (ϱ^0). *Si pour un sous-ensemble* P^0 *de* E^0 *il existe un nombre réel positif* $\eta < 1$ *tel que pour chaque ensemble connexe* $M \subset E^0$ *les inégalités*

$$M \cdot P^0 \neq 0 \neq M - P^0$$

entraînent l'inégalité

$$\delta^0(M) \geqslant \eta,$$

on a pour $i = 0$ *et* 1

$$\omega_i(E^0) \geqslant \omega_i(P^0). \tag{29}$$

[39]) Les deux derniers cas ont été réalisés positivement par M. Z. Waraszkiewicz, Fund. Math. XVIII, p. 308.

Démonstration: Par définition, $\omega_i(E^0)$ est le premier nombre ordinal α à partir duquel la notion de limite des espaces $E^{i,\alpha}$ reste invariable. Par conséquent, la notion de limite de l'ensemble P^0, considéré comme sous-ensemble de $E^{i,\alpha}$, reste invariable pour tout $\alpha \geqslant \omega_i(E^0)$. Nous obtiendrons donc immédiatement l'inégalité (29), si nous démontrons que, quel que soit α, l'ensemble P^0, considéré comme sous-ensemble de l'espace $E^{i,\alpha}$, possède la même notion de limite que l'espace $P^{i,\alpha}$. En désignant, comme dans le théorème XI, par P^α l'ensemble P^0 considéré comme sous-ensemble de $E^{i,\alpha}$ et par $(\varrho_P^{i,\alpha})$ la métrique de l'espace $P^{i,\alpha}$, il suffit, d'après le théorème XI, d'établir la proposition suivante:

(30) *Si* $(x, y) \subset P^\alpha$ *et* $\varrho^{i,\alpha}(x, y) < \eta$, *alors* $\varrho_P^{i,\alpha}(x, y) \leqslant \varrho^{i,\alpha}(x, y)$.

Cette proposition étant évidente pour $\alpha = 0$, admettons qu'elle soit vraie pour tout $\xi < \alpha$ et considérons deux points $(x, y) \subset P^\alpha$ où $\varrho^{i,\alpha}(x, y) < \eta < 1$. On a d'après 2. Déf. I:

$$\varrho^{i,\alpha}(x, y) = \sup_{\xi<\alpha} \inf_{M^\xi} \delta^{i,\xi}(M^\xi) < \eta$$

et on peut évidemment supposer dans cette formule que M^ξ parcourt seulement des sous-ensembles de $E^{i,\xi}$ tels que $\delta^{i,\xi}(M^\xi) < \eta$. Il en résulte que M^ξ, comme sous-ensemble de E^0, a le diamètre $\delta^0(M^\xi) < \eta$. D'autre part, l'ensemble M^ξ dans l'espace E^0 est connexe, car d'après le théorème I, il possède dans E^0 la propriété W_i. Il en résulte par l'hypothèse du lemme que l'on a $M^\xi \subset P^\xi$ et en vertu de la validité de (30) pour tout $\xi < \alpha$, l'ensemble P^ξ possède la même notion de limite que $P^{i,\xi}$. Par conséquent M^ξ, regardé comme sous-ensemble de $P^{i,\xi}$, possède encore la propriété W_i et en outre on a d'après (30) pour tout $\xi < \alpha$: $\delta_P^{i,\xi}(M^\xi) \leqslant \delta^{i,\xi}(M^\xi)$. On en conclut en raison de 2. Déf. I que

$$\varrho_P^{i,\alpha}(x, y) = \sup_{\xi<\alpha} \inf_{M_P^\xi} \delta_P^{i,\xi}(M_P^\xi) \leqslant \sup_{\xi<\alpha} \inf_{M^\xi} \delta_P^{i,\xi}(M^\xi) \leqslant \sup_{\xi<\alpha} \inf_{M^\xi} \delta^{i,\xi}(M^\xi) = \varrho^{i,\alpha}(x, y),$$

c. q. f. d.

Ceci établi, passons à la construction du continu R.

Considérons le cube fondamental de l'espace de Hilbert, à savoir l'ensemble H de toutes les suites $X = \{x_n\}$ où $n = 1, 2, \ldots$ et $0 \leqslant x_n \leqslant 3^{-n}$. On pose dans H: $\varrho(X', X'') = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n' - x_n'')^2}$ où

$X' = \{x'_n\}$ et $X'' = \{x''_n\}$. On obtient ainsi un espace métrique H à la métrique (ϱ).

On sait que H est un continu et qu'il contient parmi ses sous-ensembles des images homéomorphes de tous les continus [40]). Il est facile de montrer que ces images homéomorphes peuvent être choisies de la sorte qu'elles contiennent deux points donnés d'avance p. ex. les points

$$a_1 = (0, 0, \ldots) \quad et \quad a_2 = (\tfrac{1}{3}, 0, 0, \ldots).$$

Considérons la classe $\mathfrak{H}_F$ de tous les sous-ensembles fermés de H, métrisée par la métrique de Hausdorff [41]). On sait que $\mathfrak{H}_F$ est un espace compact en soi [42]). La classe $\mathfrak{H}$ de tous les sous-continus de H qui passent par a_1 et a_2 forme un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{H}_F$; elle est donc compacte en soi.

Considérons d'autre part l'ensemble P de Cantor, parfait et ponctiforme, sur le segment $[0; \frac{1}{2}]$ de l'axe réelle; c'est donc l'ensemble des nombres $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{3^k}$ où $i_k = 0$ ou 1. Tout intervalle (ouvert) de $[0; \frac{1}{2}]$ contigu à P est de longueur $\frac{1}{2} 3^{-n}$ pour un n naturel. Appelons ces intervalles *pairs* ou *impairs*, suivant que pour un n leur longueur est $\frac{1}{2} 3^{-2n}$ ou $\frac{1}{2} 3^{-2n+1}$. Les extrémités des intervalles contigus impairs, resp. pairs, forment l'ensemble $P_1 \subset P$, resp. $P_2 \subset P$. Posons

$$(31) \qquad P_0 = P - (P_1 + P_2).$$

D'après un théorème connu [43]), $\mathfrak{H}$ comme ensemble compact en soi, est une image continue de P, c. à d. qu'il existe une transformation continue f faisant correspondre à chaque point $\xi \in P$, un continu $f(\xi) \in \mathfrak{H}$ et telle que $f(P) = \mathfrak{H}$.

Soit maintenant G le produit combinatoire du segment $[0 \frac{1}{2}]$ par l'espace H. Ainsi défini, G est donc l'espace des couples ordonnés (ξ, X), où $\xi \in [0; \frac{1}{2}]$ et $X \in H$, ayant une métrique $(\varrho_\times)$ definie comme il suit:

$$\varrho_\times(p', p'') = \sqrt{(\xi' - \xi'')^2 + \varrho(X', X'')^2} \text{ pour } p' = (\xi', X') \text{ et } p'' = (\xi'', X'').$$

[40]) C'est une conséquence d'un théorème de P. Urysohn, C. R. Ac. Sc. 178, p. 65.

[41]) cf. F. Hausdorff, l. c., p. 146.

[42]) car H_F est compact en soi; cf. F. Hausdorff, l. c., p. 156, VI.

[43]) Voir p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 197, V.

Pour chaque $\xi \in [0; \frac{1}{2}]$ nous allons définir un ensemble $T(\xi) \subset G$ par les conventions:

$T(\xi) =$ *l'ensemble de tous les points* $(\xi, X) \in G$ *où* $X \in f(\xi)$, *lorsque* $\xi \in P$,

$T(\xi) = (\xi, a_1)$, *lorsque* ξ *appartient á un intervalle contigu impair,*

$T(\xi) = (\xi, a_2)$, *lorsque* ξ *appartient à un intervalle contigu pair.*

Ceci dit, posons

$$(32) \qquad R = \sum_{\xi \in [0; \frac{1}{2}]} T(\xi).$$

Les ensembles $T(\xi)$ seront appelés *tranches de* R [44]).

Ainsi défini, R est un continu par suite de la continuité de la fonction f.

On vérifie sans peine les propositions suivantes:

(33) *Les tranches* $T(\xi)$ *forment une décomposition semicontinue de* R,

(34) *Pour chaque* $0 < \xi_0 < 1$ *la tranche* $T(\xi_0)$ *coupe* R *en deux composantes, à savoir* $\sum_{\xi < \xi_0} T(\xi)$ *et* $\sum_{\xi > \xi_0} T(\xi)$,

(35) *Pour tout* $\xi \in P$ *la tranche* $T(\xi)$ *est homéomorphe à* $f(\xi)$,

(36) *Pour* $i = 1$ *et* 2, *si le nombre* $\xi_0 \in P_i$ *est une extrémité gauche resp. droite d'un intervalle contigu à* P, *la frontière relative à* R *du continu* $\sum_{\xi \leqslant \xi_0} T(\xi)$, *resp.* $\sum_{\xi \geqslant \xi_0} T(\xi)$, *se réduit à un seul point, à savoir au point* (ξ_0, a_i) *de* R.

D'après (35) et par définition de la fonction f et de la classe $\mathfrak{H}$, *il existe parmi les tranches* $T(\xi)$ *une image homéomorphe de chaque continu.* Pour prouver la propriété (28) de R, il suffit donc de montrer que

(37) *on a* $\omega_i(R) \geqslant \omega_i(T(\xi))$ *pour* $i = 1$ *et* 2 *et pour chaque* $\xi \in P$.

[44]) La notion de *tranche* du continu irréductible a été introduite dans la théorie de ces continus par M. C. Kuratowski, Fund. Math. X, p. 250. Cette notion se laisse généraliser sur une classe plus vaste de manière à en conserver quelque propriétés caractéristiques (à publier ailleurs). Les ensembles $T(\xi)$ sont justement des tranches généralisées de R, car R dépendant du choix de la fonction f, il n'est pas nécessaire que R soit un continu irréductible.

Considérons à ce but un $\xi \in P$. Deux cas sont à distinguer:

1° $\xi \in P_0$. Soit dans ce cas $M \subset R$ un ensemble connexe unissant un point de la tranche $T(\xi)$ avec un point d'une autre tranche $T(\xi')$ où p. ex. $\xi < \xi'$. Il existe donc selon (31) deux nombres ξ_1 et ξ_2 appartenant respectivement à un intervalle contigu impair et pair et tels que $\xi < \xi_1 < \xi_2 < \xi'$. D'après (34) et par définition de $T(\xi)$ l'ensemble M contient les points (ξ_1, a_1) et (ξ_2, a_2); on a donc

$$\delta(M) \geqslant \varrho_\times[(\xi_1, a_1), (\xi_2, a_2)] \geqslant \varrho(a_1, a_2) = \tfrac{1}{3}.$$

Les hypothèses du lemme A se trouvent donc remplies pour $E^0 = R$, $P^0 = T(\xi)$ et $\eta = \frac{1}{3}$ et, en vertu de ce lemme, la proposition (37) est par conséquent vraie dans le cas en question.

2° $\xi \in P_1 + P_2$. Par raison de symétrie, nous pouvons évidemment admettre que l'on a p. ex. $\xi \in P_1$ et que ξ est l'extrémité gauche d'un intervalle contigu. Considérons le continu $R_1 = \sum_{\zeta \leqslant \xi} T(\zeta)$. Selon (36) et en vertu du corollaire XIV, le continu R_1, regardé comme sous-ensemble de l'espace $R^{\iota,\alpha}$, possède la même notion de limite que l'espace $R_1^{\iota,\alpha}$. On a donc

$$\omega_\iota(R) \geqslant \omega_\iota(R_1). \tag{38}$$

Si l'on regarde maintenant R_1 comme un espace pour lui même et $T(\xi)$ comme un sous-ensemble de R_1, on démontre tout comme dans le cas 1° que les hypothèses du lemme A, sont réalisées pour $E^0 = R_1$, $P^0 = T(\xi)$ et $\eta = \frac{1}{3}$. La formule (38) donne donc en vertu de ce lemme $\omega_\iota(R) \geqslant \omega_\iota(R_1) \geqslant \omega_\iota(T(\xi))$, de sorte que la proposition (37) est vraie aussi dans le cas considéré. Ainsi la propriété (28) du continu R se trouve démontrée.

Les propriétés des continus A_α et B_α impliquent en vertu de (28) pour chaque nombre ordinal α de la première ou deuxième classe que

$$\omega_0(R) \geqslant \omega_0(A_\alpha) = \alpha \quad \textit{et} \quad \omega_1(R) \geqslant \omega_1(B_\alpha) = \alpha.$$

Il s'ensuit que

$$\omega_\iota(R) \geqslant \Omega \quad \textit{pour} \quad \iota = 0 \textit{ et } 1,$$

où Ω désigne le premier nombre ordinal de la troisème classe.

On ne connait pas la valeur exacte de $\omega_\iota(R)$: il est probable que $\omega_\iota(R) = \Omega$.

Remarque: Si l'on veut construire un continu R' d'ordre $\omega_\iota(R') \geqslant \Omega$ sans exiger qu'il remplisse la condition (28), on peut le trouver dans l'espace euclidien à 3 dimensions. Il suffit pour cela de prendre comme point de départ, au lieu du cube fondamental de l'espace Hilbertien, le continu 1-dimensionnel „universel" S de M. W. Sierpiński[45]), situé sur le plan et contenant une image homéomorphe de chaque continu 1-dimensionnel plan. Le reste de la construction étant effectué comme plus haut, on obtient un continu R' situé dans l'espace à 3 dimensions et ayant parmi ses tranches $T(\xi)$ des images homéomorphes de tous les continus plans 1-dimensionnels, en particulier de tous les continus A_α et B_α. Or, ceci nous donne, comme plus haut, que $\omega_\iota(R') \geqslant \Omega$ pour $\iota = 0$ et 1.

14. Toutes les fonctions semi-invariantes que nous avons définies dans **10'**. ont un défaut commun: pour les espaces E^0 „arcwise connected" elles prennent une valeur constante, p. ex.

$$\tau^{\iota,\alpha}(E^0) = \tau^{\iota,*}(E^0) = 1.$$

Nous allons maintenant définir, à l'aide des espaces $E^{\iota,\alpha}$, des fonctions semi-invariantes n'étant pas constantes pour les espaces „arcwise connected".

Désignons par $\varphi^{\iota,\alpha}(E^0)$ la puissance minimum d'un sous-ensemble de l'espace $E^{\iota,\alpha}$ dense dans $E^{\iota,\alpha}$ et définissons, tout comme auparavant, $\varphi^{\iota,*}(E^0)$, en remplaçant α par un astérisque (voir p. 112).

Soit $\varphi_\iota(E^0)$ le premier nombre ordinal α pour lequel l'espace $E^{\iota,\alpha}$ cesse d'être séparable et posons $\varphi_\iota(E^0) = \infty$, si un tel nombre n'existe pas. Il est évident que les fonctions $\varphi^{\iota,\alpha}$ et $\varphi^{\iota,*}$ sont semi-invariantes inférieurement, tandis que φ_ι sont semi-invariantes supérieurement[46]).

A l'aide des continus A_α et B_α on peut construire facilement, pour $\iota = 0$ et 1 et pour tout $\alpha < \Omega$, des continus C „arcwise connected" et tels que

$$\omega_\iota(C) = \varphi_\iota(C) = \alpha. \tag{39}$$

P ex. pour $\iota = 1$, on n'a qu'à considérer sur le plan un système $x\,0\,y$ des axes rectangulaires, de prendre sur le segment $[0; \frac{1}{2}]$ de

[45]) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences (Paris), vol. 162, p. 629.

[46]) On montre aisément que $\varphi_\iota(E^0)$ est soit $\leqslant \Omega$, soit $= \infty$. Dans ce dernier cas on a $\omega_\iota(E^0) < \Omega$. Il serait intéressant de construire un continu K tel que $\varphi_\iota(K) = \omega_\iota(K) = \Omega$.

l'axe $0x$ l'ensemble parfait P de Cantor et, pour chaque $\xi \in P$, le segment S_ξ à extrémités $(\xi, 0)$ et $(\xi, \frac{1}{2})$, parallèle à $0y$. Soit $[\xi_1; \xi_2]$ un segment contigu à l'ensemble P et $\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{2} 3^{-n}$. Prenons à présent la partie du continu B_α située entre les segments S et $[t_{2n}; t'_{2n}]$ (cf. **11.**, p. 131), y compris ces segments, et transportons la par translation de sorte que S coïncide avec S_{ξ_1} et $[t_{2n}; t'_{2n}]$ avec S_{ξ_2}. Pour chaque segment contigu $[\xi_1; \xi_2]$ on obtient ainsi un continu $C(\xi_1, \xi_2)$ unissant les segments S_{ξ_1} et S_{ξ_2}.

Le continu cherché C est formé de la somme de tous ces continus $C(\xi_1, \xi_2)$, de tous les segments S_ξ et du segment $[0; \frac{1}{2}]$ de l'axe $0x$.

15. Nous avons déjà mentionné quelques problèmes se rattachant aux considérations de ce travail. Signalons en encore les suivants:

1) *Quel est le plus grand ordre $\omega_i(C)$ d'un continu C*, c. à d. l'ordre du continu R de **13.**?

2) *Existe-t-il une classe de puissance $\mathfrak{c}$ de continus „arcwise connected“ incomparables c deux à deux?*

Remarquons que les types c des continus C „arcwise connected“, définis dans **14.**, forment une suite qui, en vertu de (39), n'est pas croissante. Si l'on démontre qu'elle n'est pas en même temps décroissante, on sera en présence de $\aleph_1$ continus „arcwise connected“ incomparables c. Si on démontre au contraire que cette suite est décroissante, on aura un ensemble ordonné du type Ω^* des continus C, c. à d. la réponse affirmative à un des problèmes posés dans **12.**, p. 136.

3) *Les fonctions $\tau^{i,\alpha}$ sont-elles indépendantes* (en dehors des conditions de 10!)? Plus précisément: étant données deux suites $\{\mathfrak{m}_\alpha^0\}$ et $\{\mathfrak{m}_\alpha^1\}$ de nombres cardinaux, où $\alpha < \Gamma$ et Γ est un nombre ordinal, assujetties aux conditions:

$$\mathfrak{m}_\alpha^0 \leqslant \mathfrak{m}_\alpha^1 \quad \textit{et} \quad \mathfrak{m}_\alpha^i \leqslant \mathfrak{m}_\beta^i \quad \textit{pour} \quad \alpha < \beta \quad \textit{et} \quad i = 0 \quad \textit{où} \quad 1,$$

existe-t-il toujours un espace (un continu?) E^0 tel que l'on ait

$$\tau^{i,\alpha}(E^0) = \mathfrak{m}_\alpha^i \quad \textit{pour tout} \quad \alpha < \Gamma \quad \textit{et} \quad i = 0 \quad \textit{où} \quad 1?$$

Sur la deuxième définition des ensembles finis donnée par Dedekind.

Par

J. Cavaillès (Paris).

On connaît le passage de la préface de la deuxième édition de *„Was sind und was sollen die Zahlen“*, où Dedekind après avoir énoncé sa seconde définition des ensembles finis (un ensemble S est dit fini lorsqu'on peut l'appliquer en lui-même de telle sorte qu'aucune vraie partie de S ne soit appliquée en elle-même) ajoute: „Nun mache man einmal den Versuch auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu errichten“, promettant les plus grandes difficultés à celui qui voudrait développer cette définition sans le secours de la suite des nombres naturels.

Dans son ouvrage sur les ensembles finis (*Fund. Math.* T. VI p. 45) M. Tarski, après avoir cité ce texte, écrit: „nos recherches nous conduisent à une conclusion bien différente; si on admet le théorème 52 (où il démontre l'équivalence avec la définition dont il est parti) comme définition d'ensemble fini, on en déduit sans difficulté les théorèmes les plus importants sur les ensembles finis et on prouve son équivalence à la définition habituelle arithmétique“ (ibid. p. 92).

Dedekind avait pourtant fait la tentative ainsi qu'en témoigne un opuscule resté manuscrit et que publie Mlle Noether dans le tome III des Oeuvres complètes. Il n'y atteint aucune des propriétés essentielles des ensembles finis, mais les notions qu'il y introduit et les théorèmes qu'il y démontre permettent d'en retrouver sans effort quelques-unes.

Supposons établie la correspondance qui applique d'une façon univoque l'ensemble fini S en lui-même et aucun vrai sous-ensemble