Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu.

Par

S. Braun et W. Sierpiński (Varsovie).

1. Théorème I. *Les quatre propositions suivantes: (H), (P), (Q) et (R) sont équivalentes:*

Proposition (H): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$;

Proposition (P): *Il existe une famille F de puissance du continu de suites infinies de nombres réels, telle que $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ étant une suite infinie donnée quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les suites $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ de la famille F, telles que $y_i \neq x_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, est au plus dénombrable.*

Proposition (Q): *E désignant l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, il existe un système d'ensembles A_x^i, où i est un nombre naturel et x un nombre réel, tels que* 1°: *en désignant par X l'ensemble de tous les nombres réels, on a*

$$E = \sum_{x \in X} A_x^i, \quad \textit{pour } i = 1, 2, 3, \ldots,$$

2°: $A_x^i A_y^i = 0$ *pour* $x \neq y$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *et* 3°: *quelle que soit la suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de nombres réels, l'ensemble* $E - (A_{x_1}^1 + A_{x_2}^2 + A_{x_3}^3 + \ldots)$ *est au plus dénombrable* [1]).

[1]) On peut démontrer sans peine que la condition 3° est équivalente à la condition suivante 3'°: *N étant un ensemble non dénombrable donné quelconque contenu dans E, il existe un nombre naturel i, tel que pour tout nombre x réel l'ensemble $N \cdot A_x^i$ est non dénombrable.* C'est M. A. Lindenbaum qui a posé le problème d'équivalence des conditions 3° et 3'°.

Proposition (R): *Il existe une suite infinie de fonctions univoques* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ *définies pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *telle que, quel que soit l'ensemble non dénombrable* N *de nombres de l'intervalle* $(0, 1)$, *au moins une de fonctions de cette suite transforme* N *en l'ensemble de tous les nombres réels* [1]).

Pour démontrer le théorème I il suffit évidemment de prouver que $(H) \to (P) \to (Q) \to (R) \to (H)$. La démonstration se compose donc de quatre parties:

I. $(H) \to (P)$.

Lemme. $\{\sigma_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, \ldots)\}$ étant une infinité dénombrable de suites infinies de nombres réels, il existe toujours une suite infinie de nombres réels $\sigma = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, telle que 1) $\sigma \neq \sigma_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, et 2) il existe pour tout indice $i = 1, 2, 3, \ldots$ un indice k_i, tel que $x_{k_i} = x_{k_i}^i$.

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de poser $x_{2k} = x_{2k}^k$ et $x_{2k-1} = x_{2k-1}^k + 1$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Admettons maintenant la proposition (H), c'est-à-dire l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

La famille Φ de toutes les suites infinies de nombres réels étant de puissance $2^{\aleph_0}$, donc, d'après notre hypothèse, de puissance $\aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω (où Ω désigne le plus petit nombre transfini de la troisième classe)

$$(2) \qquad S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\omega, S_{\omega+1}, \ldots, S_\xi, \ldots \quad (\xi < \Omega)$$

formée de toutes les suites de la famille Φ.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de nombres ordinaux $< \Omega$ comme il suit.

Posons $\alpha_1 = 1$. Soit maintenant λ un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres α_ξ, où $\xi < \lambda$. Soit γ le plus petit nombre ordinal, tel que $\gamma > \alpha_\xi$, pour $\xi < \lambda$: d'après $\lambda < \Omega$ nous concluons que $\gamma < \Omega$. L'ensemble de toutes les suites S_ξ, où $\xi < \gamma$, est donc au plus dénombrable et, d'après notre lemme, il existe une suite infinie de nombres réels, donc un terme S_β de la suite (2), telle que $S_\beta \neq S_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et que, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \gamma$, il existe un nombre naturel k (dépendant de ξ), tel que les k-ièmes termes de suites S_ξ et S_β sont égaux. Nous poserons $\alpha_\lambda = \beta$.

De $S_\beta \neq S_\xi$ pour $\xi < \gamma$ résulte que $\beta \geqslant \gamma$, donc $\alpha_\lambda = \beta \geqslant \gamma > \alpha_\xi$ pour $\xi < \lambda$. Les nombres α_λ $(\lambda < \Omega)$ sont donc tous distincts.

La suite $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\Omega}$ étant ainsi définie par l'induction transfinie, désignons par F la famille formée de toutes les suites S_{α_λ}, où $\lambda < \Omega$.

Les nombres α_λ $(\lambda < \Omega)$ étant distincts, il en est de même des suites S_{α_λ} $(\lambda < \Omega)$: la famille F a donc la puissance du continu.

Soit maintenant $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ une suite infinie donnée quelconque de nombres réels: d'après la propriété de la suite (2) il existe donc un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que $S_\mu = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Soit ν un nombre ordinal $< \Omega$, tel que $\alpha_\nu \geqslant \mu$ (un tel nombre ν existe, puisque la suite transfinie $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\Omega}$ est croissante), et soit λ un nombre ordinal donné quelconque, tel que $\nu < \lambda < \Omega$. Désignons par γ le plus petit nombre ordinal, tel que $\gamma > \alpha_\xi$ pour $\xi < \lambda$: d'après $\lambda < \Omega$ on a évidemment $\gamma < \Omega$. On a $\gamma > \alpha_\nu \geqslant \mu$ (puisque $\nu < \lambda$), donc $\mu < \gamma$, ce qui entraîne, d'après la définition du nombre α_λ, qu'il existe un nombre naturel k (dépendant de λ), tel que les k-ièmes termes des suites S_μ et S_{α_λ} sont égaux. Le k-ième terme de la suite S_{α_λ} est donc x_k. Il en résulte que si pour une suite $S_{\alpha_\lambda} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ de la famille F on a $y_i \neq x_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, on a nécessairement $\lambda \leqslant \nu$: l'ensemble des telles suites S_{α_λ} est donc au plus dénombrable.

La famille F satisfait donc aux conditions de la proposition (P). Il est ainsi établi que $(H) \to (P)$.

II. $(P) \to (Q)$ [1]).

Admettons la proposition (P). La puissance de la famille F étant égale à celle de l'ensemble E, on peut représenter les suites qui lui appartiennent par S_x, où $x \in E$, de sorte que si $x \neq y$, $S_x \neq S_y$. Soit $S_x = (t_1^x, t_2^x, t_3^x, \ldots)$.

[1]) On peut ajouter de plus que cette fonction prend, dans N, chaque nombre réel une infinité non dénombrable de fois.

[1]) Cette démonstration est tout à fait analogue à celle de MM. Banach et Kuratowski (*Fund. Math.*, t. XIV, p. 130—131) que leur proposition (II′) entraîne leur théorème II.

Définissons les ensembles A_x^i de la proposition (P) de la façon suivante:

(1) *y appartient à A_x^i, lorsque $t_i^y = x$.*

On voit tout de suite que les conditions 1° et 2° de la proposition (Q) sont réalisées. Soit maintenant $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ une suite infinie donnée quelconque de nombres réels et soit y un élément de l'ensemble $E - \sum_{i=1}^{\infty} A_{x_i}^i$. On a donc y non $\epsilon\, A_{x_i}^i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, donc, d'après (1): $t_i^y \neq x_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ D'après la propriété de la famille F, l'ensemble de toutes les suites S_y de cette famille, telles que $t_i^y \neq x_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ est au plus dénombrable. Il en résulte tout de suite que l'ensemble $E - \sum_{i=1}^{\infty} A_{x_i}^i$ est au plus dénombrable. La condition 3° de la proposition (Q) est donc aussi réalisée.

La formule $(P) \rightarrow (Q)$ est ainsi démontrée.

III. $(Q) \rightarrow (R)$.

Admettons la proposition (Q) et soit A_x^i le système d'ensembles satisfaisant aux conditions de cette proposition. Soit i un nombre naturel, x — un nombre de l'intervalle E $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. D'après les conditions 1° et 2° de la proposition (Q), il existe un et un seul nombre réel y, tel que $x \,\epsilon\, A_i^y$: nous poserons $f_i(x) = y$. La suite infinie de fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ est ainsi définie.

Soit maintenant N un sous-ensemble de E non dénombrable donné quelconque, et admettons que $f_i(N) \neq X$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ (X désigne ici l'ensemble de tous les nombres réels, et $f_i(N)$ — l'ensemble de tous les nombres $f_i(x)$, où $x \,\epsilon\, N$).

Il existe donc pour tout indice i un nombre réel y_i, tel que y_i non $\epsilon\, f_i(N)$, et il en résulte tout de suite, d'après la définition de la fonction $f_i(x)$ que $NA_{y_i}^i = 0$. On a donc $NA_{y_i}^i = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, d'où, d'après $N \subset E$, $N \subset E - \sum_{i=1}^{\infty} A_{y_i}^i$, ce qui est impossible d'après la condition 3° de la proposition (Q), puisque l'ensemble N est non dénombrable.

La formule $f_i(N) \neq X$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ implique donc une contradiction. Il existe donc un indice i tel que $f_i(N) = X$. La suite des fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfait donc aux conditions de la proposition (R). L'implication $(Q) \rightarrow (R)$ est ainsi démontrée.

IV. $(R) \rightarrow (H)$.

Admettons que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, et soit N un ensemble de nombres de l'intervalle E de puissance $\aleph_1$. Toute fonction univoque définie dans E transforme évidemment l'ensemble N en un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_1$, donc, d'après notre hypothèse, de puissance $< 2^{\aleph_0}$. La proposition (R) ne peut donc pas être vraie.

Nous avons donc démontré que la proposition (R) est incompatible avec l'hypothèse que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Il en résulte que $(R) \rightarrow (H)$, c. q. f. d.

Le théorème I est ainsi démontré complètement.

2. La proposition (Q) entraîne, comme on voit sans peine, la proposition (Q_1) suivante:

Proposition (Q_1): *E désignant l'intervalle* $(0, 1)$ *il existe une suite double d'ensembles B_k^i, telle que* 1°: $E = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^i$, *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots$; $B_k^i B_l^i = 0$ *pour* $k \neq l$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *et* 3°: *quelle que soit la suite infinie de nombres naturels* $k_1, k_2, k_3, \ldots$, *l'ensemble* $E - \sum_{i=1}^{\infty} B_{k_i}^i$ *est au plus dénombrable.*

En effet, les ensembles A_x^i vérifiant la proposition (Q), il suffit évidemment de poser $B_k^i = A_k^i$ pour $k = 2, 3, 4, \ldots$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, et $B_1^i = E - \sum_{k=2}^{\infty} A_k^i$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$

La proposition (Q_1) (qui est ainsi établie en admettant l'hypothèse (H)) implique évidemment le théorème II de MM. Banach et Kuratowski [1]), dont ces auteurs ont déduit la solution négative du probleme de la mesure posé par M. Lebesgue.

La proposition (Q_1) entraîne donc à plus forte raison la solution négative de ce problème.

Il est à remarquer que M. S. Ulam a donné une solution négative du problème de la mesure en admettant une hypothèse moins restrictive que l'hypothèse

[1]) *Fund. Math.*, t. XIV, p. 128; cf. t. XIV, p. 277. Le théorème de MM. Banach et Kuratowski diffère de notre proposition (Q_1) par ce que la condition 3° y est remplacée par la condition suivante: Quelle que soit la suite infinie de nombres naturels $k_1, k_2, k_3, \ldots$, l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty}(B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ est au plus dénombrable. Cette propriété résulte évidemment des conditions 1°, 2° et 3° de la proposition (Q_1).

du continu[1]). M. Ulam a démontré aussi[2]) qu'il existe un système d'ensembles A^i_ξ, où i est un nombre naturel et ξ un nombre ordinal $< \Omega$, tels que 1°: $E = \sum_{\xi<\Omega} A^i_\xi$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, 2°: $A^i_\xi A^i_\eta = 0$ pour $\xi \neq \eta$, $\xi < \Omega$, $\eta < \Omega$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, 3°: quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$, l'ensemble $E - \sum_{i=1}^{\infty} A^i_\xi$ est au plus dénombrable. Dans cet ordre d'idées il est à remarquer qu'on peut démontrer sans peine que la proposition suivante est équivalente à la proposition (H):

Il existe un système d'ensembles A^i_x satisfaisant aux conditions 1° et 2° de la proposition (Q) et à la condition suivante: Quel que soit le nombre réel donné x, l'ensemble $E - \sum_{i=1}^{\infty} A^i_x$ est au plus dénombrable.

3. Notre théorème I peut être généralisé comme il suit:

Théorème II. *Quel que soit le nombre cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, les quatre propositions suivantes sont équivalentes:*

Proposition $(\mathscr{H})$: Il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$, tel que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.

Proposition $(\mathscr{P})$: M étant un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ et N un ensemble de puissance $2^{\mathfrak{m}}$, il existe une famille F de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ de fonctions $f(m)$ définies pour $m \in M$, dont les valeurs appartiennent à N, telle que, $\varphi(m)$ étant une fonction donnée quelconque, définie pour $m \in M$, dont les valeurs appartiennent à N. l'ensemble de toutes les fonctions $f(m)$ de la famille F, telles que $f(m) \neq \varphi(m)$ pour $m \in M$, est de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$.

Proposition $(\mathscr{Q})$[3]): M étant un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ et N un ensemble de puissance $2^{\mathfrak{m}}$, il existe un système d'ensembles A^m_n, où $m \in M$ et $n \in N$, tel que 1°: $N = \sum_{n \in N} A^m_n$, pour $m \in M$; 2°: $A^m_n A^m_{n_1} = 0$ pour $n \neq n_1$, $m \in M$, $n \in N$, $n_1 \in N$, et 3°: quelle que soit la fonction $f(m)$ définie pour $m \in M$, dont les valeurs appartiennent à N, l'ensemble $N - \sum_{m \in M} A^m_{f(m)}$ est de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$.

Proposition $(\mathscr{R})$: N étant un ensemble de puissance $2^{\mathfrak{m}}$, il existe une famille Φ de puissance $\mathfrak{m}$, formée de fonctions $\varphi(n)$ définies pour $n \in N$ et dont les valeurs appartiennent à N, telle que pour tout sous-ensemble N_1 de N de puissance $> \mathfrak{m}$ il existe au moins une fonction φ de la famille Φ qui transforme l'ensemble N_1 en l'ensemble N.

[1]) *Fund. Math.*, t. XVI, p. 140, ss.
[2]) l. c., p. 142.
[3]) C'est M. Lindenbaum qui a remarqué que $(\mathscr{H}) \rightarrow (\mathscr{P}) \rightarrow (\mathscr{Q})$.

La démonstration du théorème II n'est qu'une modification légère de celle du théorème I.

Voici encore une proposition $(\mathscr{S})$, qui est équivalente à la proposition $(\mathscr{H})$:

Proposition $(\mathscr{S})$: Tout ensemble de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ est une somme d'ensembles croissants de puissance $\mathfrak{m}$.

La démonstration de l'équivalence des propositions $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{S})$ est tout à fait analogue à celle que W. Sierpiński a donnée pour le cas $\mathfrak{m} = \aleph_0$ [1]).

[1]) *Fund. Math.*, t. V, p. 180.