D'après (43) D_0 est une peigne ayant R_0 comme ensemble de points de ramification, donc $M(R_0)=0$. D'après **12** D_0 possède la propriété P, donc d'après **9** il en est de même pour D c. q. f. d.

IV. Résumé.

Les résultats de II et III nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit D une dendrite. Pour qu'il existe une fonction continue à tranches finies transformant D en un arc simple il faut et il suffit:* a) *que l'ensemble des extrémités de D soit dénombrable,* b) *que l'ensemble de points de ramification de D soit réductible par l'opération Φ de cohérence bilatérale, définie dans* **3**.

Warszawa 7/IV. 1931.

Sur la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières.

Par

Isidore Natanson (Leningrad, U. R. S. S.).

Dans cette Note je vais examiner quelques questions, relatives à la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières.

M. H. Lebesgue, dans son important Mémoire „Sur les intégrales singulières" (Annales des Toulouse, série III, tome I, 1909), avait établi la condition nécessaire et siffisante pour que l'on ait la relation

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t,x)\,dt=f(x),$$

quelle que soit la fonction $f(t)$ bornée et approximativement continue dans le point x.

(Il est vrai que M. Lebesgue avait étudié les points, dans lesquels a lieu la relation

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(t+x)-f(x)|\,dt=0;$$

or, pour les fonctions bornées, la classe de ces points-ci coïncide avec la classe de points de continuité approximative).

Autant, cependant, la démonstration du théorème, concernant ce sujet, a été simplement indiqué par M. Lebesgue, nous nous permettons de donner dans tous les détails la preuve de cette proposition de l'éminent auteur. À cette question est consacré § 2 de la Note présente.

La considération de ce problème conduit naturellement à poser la question analogue, mais concernant les fonctions *non-bornées*. Or, ce problème se résout par négatif, comme nous le prouvons dans le § 3.

Dans le § 1 nous donnons quelques lemmes de caractère général, sur lesquels seront fondés les raisonnements ultérieurs.

§ 1.

Lemme I. Soit $f(t)$ une fonction non négative, définie dans l'intervalle (a, b). Supposons que cette fonction-ci n'est pas sommable dans l'intervalle tout entier, or, qu'elle est sommable dans chaque intervalle partiel fermé, ne contenant pas un point singulier x.

Alors il existe un ensemble A de densité 0 au point x, tel que l'intégrale $\int_A f(t)\,dt$ n'existe pas.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que le point singulier x coïncide avec l'extrémité b.

Supposons d'abord, que la structure de la fonction $f(t)$ est la suivante:

On a une suite infinie

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_i < \ldots < b \quad \text{avec} \quad \lim a_i = b$$

et dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}) la fonction $f(t)$ est constante

$$f(t) = \lambda_i \geqslant 0.$$

Comme la fonction $f(t)$ est supposée non-sommable, la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (a_{i+1} - a_i)$$

est divergente.

Comme on sait, dans ce cas on peut trouver une suite de facteurs positifs ϱ_i, tendant vers zéro en décroissant

$$\varrho_1 < 1; \quad \varrho_i \geqslant \varrho_{i+1}; \quad \lim \varrho_i = 0$$

et tels que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (a_{i+1} - a_i)\, \varrho_i$$

soit également divergente. Posons $d_i = (a_{i+1} - a_i)\,\varrho_i$ et considérons l'ensemble de points

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i, a_i + d_i).$$

L'intégrale

$$\int_A f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{a_i+d_i} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i d_i$$

n'est pas finie.

En même temps la densité de l'ensemble A au point b est 0. En effet, si $h > 0$ et $a_i < b - h \leqslant a_{i+1}$, on a

$$\overset{b}{\underset{b-h}{A}} = \overset{a_{i+1}}{\underset{b-h}{A}} + \overset{b}{\underset{a_{i+1}}{A}},$$

en désignant généralement par $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{E}}$ la partie de l'ensemble E, contenue dans l'intervalle (α, β).

Or, évidemment,

$$m\overset{b}{\underset{a_{i+1}}{A}} = \sum_{p=i+1}^{\infty} d_p = \sum_{p=i+1}^{\infty} (a_{p+1} - a_p)\cdot\varrho_p \leqslant \varrho_i \cdot \sum_{p=i+1}^{\infty} (a_{p+1} - a_p) = \varrho_i (b - a_{i+1}) \leqslant \varrho_i h$$

en sorte que

$$\frac{m\overset{b}{\underset{a_{i+1}}{A}}}{h} \leqslant \varrho_i.$$

D'autre part, nous pouvons supposer que $b - h < a_i + d_i$ (car dans le cas contraire on a simplement $m\overset{a_{i+1}}{\underset{b-h}{A}} = 0$); dans cette hypothèse,

$$h > b - a_i - d_i > a_{i+1} - a_i - d_i = (1 - \varrho_i)(a_{i+1} - a_i)$$

et

$$\frac{m\overset{a_{i+1}}{\underset{b-h}{A}}}{h} \leqslant \frac{d_i}{h} < \frac{\varrho_i}{1 - \varrho_i}.$$

En somme, on a toujours l'inégalité

$$\frac{m\overset{b}{\underset{a_{i+1}}{A}}}{h} < \frac{\varrho_i}{1 - \varrho_i} + \varrho_i$$

et, $\frac{1}{i}$ tendant vers zéro avec h, il résulte

$$\lim_{h\to 0} \frac{m \overset{b}{\underset{b-h}{A}}}{h} = 0$$

c. q. f. d.

Passons maintenant au cas général.

Posons $c_1 = a$, $c_{n+1} = \frac{c_n + b}{2}$.

La fonction $f(t)$ étant sommable dans chaque intervalle (c_n, c_{n+1}), on peut construire (comme on sait) dans l'intervalle (a, b) une fonction $g(t)$ de nature étudiée ci-dessus et telle qu'on a

$$\int_{c_n}^{c_{n+1}} |f(t) - g(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

D'après ce que était démontré, il existe un ensemble A de densité 0 au point b, et sur lequel la fonction $g(t)$ n'est pas sommable. Il en est de même de la fonction $f(t)$, car

$$\int_A |f(t) - g(t)|\, dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

c. q. f. d.

Lemme II. Soit $\{\psi_n(t)\}$ une suite de fonctions non-négatives, définies et sommables dans l'intervalle (a, b); supposons, en outre, que les intégrales $\int_a^b \psi_n(t)\, dt$ ne soient pas bornées dans leur ensemble.

Soit x le point quelconque fixe de l'intervalle (a, b). Alors il existe l'ensemble A de densité 0 à ce point x, tel que les intégrales $\int_A \psi_n(t)\, dt$ ne sont pas bornées également.

D é m o n s t r a t i o n. Nous pouvons supposer que dans chaque intervalle fermé (α, β), ne contenant pas le point x, les intégrales $\int_\alpha^\beta \psi_n(t)\, dt$ sont uniformément bornées:

$$\int_\alpha^\beta \psi_n(t)\, dt \leqslant M(\alpha, \beta)$$

car, s'il en était autrement, notre affirmation serait évidente. Soit

de plus (ce qui ne restreint pas la généralité)

$$\int_a^b \psi_n(t)\, dt \geqslant n.$$

Définissons maintenant la fonction $f(t)$ de la manière suivante:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(t)}{n^2}.$$

Comme l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_a^b \psi_n(t)\, dt \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

n'existe pas, tandis que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_\alpha^\beta \psi_n(t)\, dt \leqslant \frac{\pi^2}{6} \cdot M(\alpha, \beta)$$

est finie, nous pouvons nous servir du lemme I. Par conséquent, il existe l'ensemble A de densité 0 ou point x, sur lequel la fonction $f(t)$ est non-sommable. Alors, il est évident que les intégrales $\int_A \psi_n(t)\, dt$ ne peuvent pas être bornées en leur ensemble.

c. q. f. d.

Lemme III. Soit $\{\psi_n(t)\}$ une suite de fonctions non-négatives, définies et *mesurables* dans l'intervalle (a, b). Supposons que les intégrales $\int_A \psi_n(t)\, dt$ existent et sont bornées

$$\int_A \psi_n(t)\, dt \leqslant M(A) \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(A)$$

quel que soit l'ensemble A de densité 0 au point fixe x.

Alors on peut trouver un nombre fixe n_0, tel que toutes les fonctions $\psi_n(t)$ sont *sommables* dans l'intervalle (a, b), pour $n \geqslant n_0$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, par impossible, qu'il n'y ait pas un tel nombre n_0; pour simplifier, soit

$$\int_a^b \psi_n(t)\, dt = +\infty$$

pour toutes les valeurs de n.

Alors on peut, évidemment, définir les fonctions $\lambda_n(t)$, jouissant des propriétés suivantes:

α) $0 \leqslant \lambda_n(t) \leqslant \psi_n(t)$.

β) $\lambda_n(t)$ sont sommables dans (a, b).

γ) $\int_a^b \lambda_n(t)\, dt \geqslant n$.

En vertu du lemme II, il existe un ensemble A de densité 0 au point x, tel que les intégrales $\int_A \lambda_n(t)\, dt$ ne sont pas bornées dans leur ensemble, ce qui est incompatible avec les hypothèses du lemme présent. c. q. f. d.

§ 2.

En rapprochant quelques résultats, obtenus par M. Lebesgue, il est aisé de démontrer la proposition suivante:

Si quel que soit l'ensemble mesurable E, contenu dans l'intervalle (a, b), on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n(t)\, dt = 0$$

on a également

Π_1) $\int_a^b |\psi_n(t)|\, dt \leqslant M$ pour $n \geqslant N$

Π_2) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, \psi_n(t)\, dt = 0$, quelle que soit la fonction bornée $f(t)$ [1]).

Théorème de M. Lebesgue. Soit $\varphi_n(t, x)$ un noyau, défini dans le carré $(a, b;\ a, b)$. Pour que la relation

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = f(x) \tag{1}$$

ait lieu quelle que soit la fonction $f(t)$ (mesurable et *bornée*), en tous les points x où $f(t)$ est approximativement continue, il faut et il suffit que le noyau $\varphi_n(t, x)$ satisfasse à la condition suivante:

[1]) Cf., p. ex. la Thèse de M. Gr. Fichtenholz: *„Théorie des intégrales définies simples dépendantes d'un paramètre"* (Leningrad 1918) (en russe) pp. 84, 79 et 149; aussi: Hahn, *„Über Folgen linearer Operationen"*, Mh. für Math. u. Phys., t. 32 (1922), th. XXII b.

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(t, x)\, dt = 1 \\ \text{quel que soit l'ensemble E de densite 1 au point } x \text{ [1]).} \end{cases}$$

La condition et nécessaire. Pour établir la nécessité de la condition (a) il suffit de poser dans la relation (1) $f(t) = 1$, lorsque $t \in$ E ou $t = x$, et $f(t) = 0$ partout ailleurs. Alors l'éxécution de la condition (a) est évidente.

La condition est suffisante. Supposons que la condition (a) est remplie. Soit x le point arbitraire de l'intervalle (a, b). Montrons, d'abord, que

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \text{les intégrales } \int_A |\varphi_n(t, x)|\, dt \text{ sont bornées dans leur ensemble} \\ \int_a^b |\varphi_n(t, x)|\, dt \leqslant M(x) \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(x). \end{cases}$$

En effet, si A est l'ensemble de densité 0 au point x, alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n(t, x)\, dt = 0,$$

comme il résulte de la condition (a).

Posons

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t, x) \quad \text{lorsque} \quad t \in A$$
$$\psi_n(t) = 0 \quad \text{partout ailleurs.}$$

Alors, comme chaque partie de l'ensemble A a également la densité 0 au point x, nous avons évidemment

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n(t)\, dt = 0$$

quel que soit l'ensemble mesurable E, contenu dans l'intervalle (a, b). Alors, en vertu de Π_1) nous aurons $\int_a^b |\psi_n(t)|\, dt \leqslant M(x, A)$, pour $n \geqslant N(x, A)$, que l'on peut écrire ainsi

$$\int_A |\varphi_n(t, x)|\, dt \leqslant M(x, A) \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(x, A).$$

[1]) Cf. H. Lebesgue, loc. cit., p. 79.

Or, d'après le lemme III du § 1, il existe un nombre $n_0(x)$, tel que les fonctions $\varphi_n(t, x)$ sont sommables pour $n \geqslant n_0(x)$. En appliquant à la suite $\{\varphi_n(t, x)\}$ le lemme II du § 1, nous établissons que la proposition (b) est remplie.

Soit $f(t)$ une fonction mésurable, bornée et approximativement continue au point x.

Désignons par E l'ensemble (de densité 1 à ce point x) tel que $\lim f(t) = f(x)$, lorsque le point t tend vers le point x, tout en restant sur E.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre positif quelconque.

Prenons $\delta > 0$ assez petit pour que les relations $|t - x| < \delta$ et $t \in$ E, entraînent l'inégalité

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3 M(x)}. \tag{2}$$

Posons $e = \mathrm{E}_{x-\delta}^{x+\delta}$ et désignons par A l'ensemble complémentare à e. Il est évident que la densité de l'ensemble A au point x est 0.

En vertu de la condition (a), nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_1} \varphi_n(t, x)\, dt = 0$$

quel que soit l'ensemble A_1 contenu dans A.

Cette propriété, d'après la proposition Π_2), implique la relation

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = 0. \tag{3}$$

En outre, en vertu de la condition (a), nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \int_e \varphi_n(t, x)\, dt = 1. \tag{4}$$

On a

$$\left|\int_a^b f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt - f(x)\right| \leqq \left|\int_e f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt - f(x) \int_e \varphi_n(t, x)\, dt\right| + \tag{5}$$
$$+ \left|\int_A f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt\right| + |f(x)| \cdot \left|\int_e \varphi_n(t, x)\, dt - 1\right|.$$

Or, par la définition même de l'ensemble e (voir (2))

$$\left|\int_e f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt - f(x) \int_e \varphi_n(t, x)\, dt\right| \leqslant \int_e |f(t) - f(x)| \cdot |\varphi_n(t, x)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3 M(x)} \cdot M(x) = \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(x).$$

D'autre part, en vertu de (3) et (4)

$$\left|\int_A f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f(x)| \cdot \left|\int_e \varphi_n(t, x)\, dt - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dès que n est suffisamment grand.

Alors, vu (5), on a égalément

$$\left|\int_a^b f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt - f(x)\right| < \varepsilon$$

c. q. f. d.

§ 3.

Nous aurons besoin d'un résultat (dû a M. Lebesgue[1])), dont nous citons l'énoncé:

Si la relation

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t)\, \psi_n(t)\, dt = 0.$$

a lieu quelle que soit la fonction $f(t)$, de p-ième puissance ($p > 1$) sommable, il existe une constante M telle que

$$\int_a^b |\psi_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\, dt \leqslant M \quad \text{pour} \quad n \geqslant N.$$

Ces préliminaires posées, nous pouvons démontrer le

Théorème. Il est *impossible* de construire un noyau $\varphi_n(t, x)$ tel que la relation

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = f(x) \tag{1}$$

ait lieu pour chaque fonction $f(t)$ de p-ième puissance ($p > 1$) sommable en tout point x où elle est approximativement continue.

[1]) H. Lebesgue, loc. cit., pp. 55—57. M. Lebesgue avait étudiée le cas $p = 2$; cf. F. Riesz, „*Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*" (Math. An. 69. 1910) (p. 466).

Démonstration. Supposons, par contre, qu'il existe un tel noyau $\varphi_n(t, x)$.

1) Quel que soit l'ensemble A de densité 0 au point quelconque x, je dis qu'on a

$$\int_A |\varphi_n(t, x)|^{\frac{p}{p-1}} dt \leqslant M(x, A) \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(x, A).$$

En effet, soit $f(t)$ une fonction arbitraire de p-ième puissance sommable. Posons

$\psi_n(t) = \varphi_n(t, x)$ lorsque $t \epsilon A$ $= 0$ partout ailleurs	$g(t) = f(t)$ dans A (sauf $t = x$) $= 0$ partout ailleurs

Il est évident que la fonction $g(t)$ est approximativement continue en ce point x, et $g(x) = 0$.

Donc, en vertu de la relation (1):

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = 0.$$

Or,

$$\int_a^b g(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = \int_A g(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = \int_A f(t) \psi_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, \psi_n(t)\, dt$$

d'où, d'après le théorème cité, il suit que

$$\int_A |\varphi_n(t, x)|^{\frac{p}{p-1}} dt = \int_a^b |\psi_n(t)|^{\frac{p}{p-1}} dt \leqslant M(x, A) \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(x, A).$$

2) D'après le lemme III du § 1, il existe un nombre $n_0(x)$, tel que les fonctions $|\varphi_n(t, x)|^{\frac{p}{p-1}}$ toutes sont sommables pour $n \geqslant n_0(x)$.

Fixons maintenant le point quelconque x. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer dès maintenant que les fonctions $|\varphi_n(t, x)|^{\frac{p}{p-1}}$ sont sommables, quel que soit n.

3) En vertu du lemme II § 1, il existe le nombre M tel que

$$\int_a^b |\varphi_n(t, x)|^{\frac{p}{p-1}} dt \leqslant M^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4) Posons $f(t) = 1$ dans l'intervalle $\left(x - \frac{1}{2^{p+1}M}, \; x + \frac{1}{2^{p+1}M}\right)$ et $f(t) = 0$ partout ailleurs. Alors, en vertu de (1):

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t, x)\, dt = 1.$$

Cependant, d'après l'inégalité bien connue

$$\left|\int_a^b f(t) \varphi_n(t, x)\, dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |\varphi_n(t, x)|^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2^p M}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(M^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \frac{1}{2}$$

ce qui est en contradiction avec (6).

Donc notre théorème est prouvé.

Remarque. De ce théorème-ci il suit *a fortiori* qu'il n'existe pas de noyau $\varphi_n(t, x)$ présentant toutes les fonctions sommables dans les points de continuité approximative [1]).

Je termine en remerciant M. le Prof. Gr. Fichtenholz auquel je dois des conseils précieux concernant la rédaction de cette Note.

[1]) Ce résultat peut être obtenu encore directement, au moyen des raisonnements beaucoup plus simples.