On vérifie sans peine que l'ensemble Z est défini par la relation suivante:

$$Z = \underset{\xi}{\mathrm{E}} [\bar{f}(\xi) - \underline{f}(\xi) = 0,\ |\bar{f}(\xi)| + |\underline{f}(\xi)| < +\infty],$$

d'où il résulte qu'il est un ensemble borelien.

D'autre part, on voit que l'égalité $l(\eta) = \bar{f}(\eta) = \underline{f}(\eta)$ est vraie pour tout $\eta \in Z$. L'ensemble L_f peut donc être considéré comme celui des valeurs d'une fonction de Baire définie sur un ensemble de Borel, ce qui implique qu'il est un ensemble (A) [1].

[1]) Remarquons que ce théorème est vrai pour les domaines simplement connexes quelconques.

Une nouvelle classe de continus.

Par

Eduard Čech (Brno).

Un continu C (espace métrique, compact et connexe) *jouit de la propriété* P (P_n) *s'il existe sur* C *une fonction continue réelle* $f(x)$ *telle que, pour chaque nombre réel* c, *l'équation* $f(x) = c$ *possède un nombre fini (au plus* n*) solutions* $x \in C$. Le but de cette Note est de démontrer que *la propriété* P *entraîne les trois propriétés suivantes*:

1°. C *est une courbe régulière* (au sens de M. Menger);

2°. *l'ensemble* E *des extrémités* (points d'ordre 1) *de* C *est clairsemé* (et par suite dénombrable);

3°. R *désignant l'ensemble des points de ramification* (points d'ordre > 2) *de* C, *l'ensemble* $\bar{R}$ *est punctiforme.*

I. Soit a un point donné de l'espace C et soit U un entourage [1]) donné de a si petit que $x \in \bar{U}$, $x \neq a$ entraîne $f(x) \neq f(a)$. Posons [2]) $\mu = \mathrm{Min.}\ |f(x) - f(a)| > 0$ pour $x \in \mathrm{Fr.}\ U$ [3]). Désignons par V l'ensemble des points $x \in U$ tels que $|f(x) - f(a)| < \mu$. Alors $V \subset U$, V est un entourage de a, et $x \in \mathrm{Fr.}\ V$ entraîne $f(x) = f(a) \pm \mu$, d'où il résulte que l'ensemble Fr. V est fini [4]).

L'espace C est donc une courbe régulière. Il en résulte [5]) que C est localement connexe. Donc [6]) tous deux points de C sont situés

[1]) Ensemble ouvert contenant a.

[2]) Le minimum existe, car l'ensemble Fr. U est compact.

[3]) Fr. $U = \bar{U} - U$,

[4]) On voit que la propriété P_n entraine que l'ordre de chaque point de C soit $\leqq 2n$.

[5]) Menger, *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. 95, p. 300. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, II, Verh. Amsterdam 1927, n° 4, p. 65.

[6]) Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 201. R. L. Moore, Trans. Amer. Soc. 17, p. 137.

sur un arc simple. La même propriété appartient à chaque sous-continu de C[1]).

II. Supposons, par impossible, que l'ensemble E contienne une partie non vide et dense en soi. Or l'ensemble E est un G_δ[2]). On en conclut, d'après un théorème de M. Young[3]), que E contient un sous-ensemble parfait E_1. De la propriété P on déduit sans peine que l'ensemble réel $f(E_1)$ est lui aussi parfait. Donc $f(E_1)$ contient un sous-ensemble D tel que chaque point de D soit un point limite *bilatéral* pour D. Soit $E_2 \subset E_1$, $f(E_2) = D$. Choisissons un point $a_1 \in E_2$. Il existe un arc simple $C_1 \subset C$ aux extrémités a_1, b_1. Posons $f(C_1) = K_1$ de manière que K_1 est un intervalle fermé contenant le nombre a_1. Or $f(a_1) \in D$; de la propriété de D on voit qu'il existe un point $a_2 \in E_2$, $a_2 \neq a_1$, $a_2 \neq b_1$, tel que $f(a_2)$ soit situé à l'intérieur de K_1. Le point a_2 ne peut appartenir à C_1, car autrement son ordre serait $\geqq 2$, tandis que $a_2 \in E$. Donc il existe un arc simple $C_2 \subset C$ aux extrémités a_2, b_2 tel que $C_1 \cdot C_2 = 0$. Posons $K_2 = f(C_2)$; on peut supposer que $K_2 \subset K_1$. On arrive ainsi à former une suite d'arcs simples $C_n \subset C$ *disjoints deux à deux* et tels que $f(C_{n+1}) \subset \subset f(C_n)$. De la dernière inclusion résulte l'existence d'un nombre c commun à tous les intervalles $f(C_n)$. L'équation $f(x) = c$ possède alors une solution $x_n \in C_n$ pour chaque valeur de n. Or ceci contredit à la propriété P.

III. Supposons, par impossible, que l'ensemble $\overline{R}$ contienne un continu K. Comme nous avons vu plus haut, il existe un arc simple $C \subset K$; donc $C \subset \overline{R}$. Il existe donc un point $a_1 \in R$ tel que le nombre $f(a_1)$ soit à l'intérieur de l'intervalle $f(C)$. D'après un théorème de M. Menger[4]) il existe dans C trois arcs simples C_1', C_2', C_3' n'ayant deux à deux en commun que l'extrémité commune a_1. On peut supposer que les intervalles $f(C_1')$, $f(C_2')$, $f(C_3)$ fassent partie de l'intérieur de $f(C)$. L'inclusion $C_1' + C_2' + C_3 \subset C$ étant évidemment impossible, soit p. ex. $b_1 \in C_1' - C$. En désignant par C_1 un petit sous-arc de C_1' contenant b_1, on aura: 1° $C_1 \cdot C = 0$; 2° l'intérieur de $f(C)$ contient l'intervalle $f(C_1)$. De l'inclusion $C \subset \overline{R}$ résulte alors l'existence d'un point $a_2 \in R$ tel que le nombre $f(a_2)$ soit

[1]) Chaque sous-continu d'un continu jouissant de la propriété P en jouit de même.

[2]) Menger, l. c., p. 282. Urysohn, l. c., p. 18.

[3]) Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 138.

[4]) Fund. Math. X, p. 98.

à l'intérieur de $f(C_1)$. En répétant le procédé qui précède on arrive à former un arc simple C_2 tel que $C_2 \cdot C = 0$ et que l'intérieur de $f(C_1)$ contienne l'intervalle $f(C_2)$. On peut supposer que l'arc C_2 soit situé dans une proximité donnée de C. D'après la relation $C_1 \cdot C = 0$, on peut donc s'arranger de façon à avoir $C_1 \cdot C_2 = 0$. En continuant à procéder ainsi, on arrive à former une suite d'arcs simples $C_n \subset C$ disjoints deux à deux et tels que $f(C_{n+1}) \subset f(C_n)$. Or nous avons déjà vu que ceci contredit à la propriété P.