und dem Transpositionspaar (β, γ) (x, y). Nach Satz 7 braucht man dann bloß zu untersuchen, ob die Gleichung noch lösbar bleibt für alle Werte von α, δ und β, wenn $\gamma = \beta$ und $y = x$ gesetzt werden. Man bekommt hierdurch die Gleichung

$$\alpha \bar{\delta} x + \bar{\alpha} \delta \bar{x} = 0,$$

die lösbar ist, weil z. B. schon $x = \delta$ eine Lösung ist. Die gestellte Frage ist also zu bejahen. Man hat hier ein Beispiel normaler Lösbarkeit, das nicht schon nach Satz 3 erledigt werden kann; denn $ad = \alpha\delta(\beta + \gamma)(\bar{\beta} + \bar{\gamma})$ ist nicht 0 für beliebige Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Mit Hilfe des in den Beweisen der Sätze 5 und 6 entwickelten Verfahrens kann man natürlich die normale Lösung wirklich bilden; das Verfahren ist aber sehr mühsam, und es wäre wohl möglich, ein leichteres Verfahren zu finden. Indessen gehe ich hier nicht näher darauf ein.

Sur l'analyticité des ensembles (A).

Par

G. Poprougénko (Paris).

Le but de cette Note est de mettre en évidence la liaison étroite qui existe entre les ensembles (A) et certaines opérations fondamentales de l'Analyse, qui, comme on verra dans la suite, conduisent d'une façon simple et naturelle à ces ensembles.

I.

Soit $f(x)$ une fonction réelle et finie d'une variable réelle. Supposons que cette fonction admet pour $x = a$ la dérivée *unique* et *finie* $f'(a)$: nous dirons dans ce cas que $f(x)$ est *dérivable* au point a.

Désignons par H_f l'ensemble des nombres $f'(x)$, x parcourant l'ensemble de tous les points où la fonction $f(x)$ est dérivable. L'ensemble H_f (qui peut être vide) est complètement déterminé par la fonction $f(x)$.

Ceci posé, nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème I. *Pour qu'un ensemble linéaire E soit un ensemble (A), il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que $E = H_f$.*

Dém. I. *La condition est nécessaire.*

Soit E un ensemble (A) linéaire donné.

Si l'ensemble E est vide, l'existence des fonctions continues n'ayant pas de dérivée en aucun point x démontre la proposition.

Supposons donc que l'ensemble E n'est pas vide; nous avons 2 cas à distinguer, suivant que l'ensemble E est borné ou non.

1°. *L'ensemble E est borné.*

L'ensemble (analytique) E étant non-vide, il existe, comme l'a démontré M. Sierpiński [1]), une fonction réelle définie pour $x \leqslant 0$ et continue partout *du côté gauche* dont l'ensemble des valeurs est égal à E. Désignons cette fonction par $f_E(x)$.

La fonction $f_E(x)$ n'ayant qu'un nombre fini ou l'infinité dénombrable de points de discontinuité [2]), soit

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

une suite composée de tous ces points, et

(2) $$f_E(x_1), f_E(x_2), \ldots, f_E(x_n), \ldots$$

la suite des valeurs correspondantes.

Définissons la fonction $F(x)$ par les conditions suivantes:

(3) $$F(x) = f_E(x) \quad pour \quad x \leqslant 0,$$

et

(4) $$F(x) = f_E(x_n) \quad pour \quad n-1 < x \leqslant n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

La fonction $F(x)$ est ainsi définie pour tout x réel, et on voit qu'elle satisfait aux 3 conditions suivantes:

(α_1) *$F(x)$ est continue du côté gauche en tout point x;*

(β_1) *$F(X) = E$, X désignant l'ensemble de tous les nombres réels* [3]);

(γ_1) *il existe pour tout $y_0 \in E$ un point x_0 tel que $F(x)$ est continue pour $x = x_0$ et $F(x_0) = y_0$.*

L'ensemble E étant borné, $F(x)$ est intégrable dans tout intervalle fini. Posons

(5) $$\Phi(x) = \int_0^x F(t)\, dt.$$

La fonction $\Phi(x)$, définie par (5) pour tout x réel, est continue. Je dis qu'elle satisfait à la condition du théorème.

[1]) V. **Fund. Math.** t. X, p. 119.

[2]) V. p. ex. W. Sierpiński, ***Funkcje przedstawialne analitycznie***, 1925, p. 13, Théorème 8 (en polonais).

[3]) L'ensemble Z et la fonction $g(x)$ définie pour $x \in Z$ étant quelconques, je désigne par $g(Z)$ l'ensemble des valeurs de $g(x)$.

En effet, supposons que $\Phi(x)$ est dérivable au point x_0. D'après (α_1), (β_1) et (5), on a dans ce cas:

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0 - h) - \Phi(x_0)}{-h} = F(x_0) = y_0 \in E \quad (h > 0).$$

D'autre part, soit $y_1 \in E$: il existe, d'après (γ_1) et (5), un point x_1 tel que $\Phi'(x_1) = F(x_1) = y_1$.

Il en résulte que l'on a: $E = H_\Phi$, c. q. f. d.

2⁰. *L'ensemble E est non-borné.*

Nous pouvons évidemment supposer

(6) $$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k,$$

les ensembles E_k $(k = 1, 2, \ldots)$ étant analytiques, bornés et non-vides.

Désignons par $f_{E_k}(x)$ la fonction de M. Sierpiński correspondant à l'ensemble E_k et définie pour $k-1 < x \leqslant k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Soit $\{t_n\}$ une suite infinie composée *de tous les points de discontinuité de toutes les fonctions $f_{E_k}(x)$*, et $\{u_n\}$ la suite des valeurs correspondantes des $f_{E_k}(x)$. Posons

$$F(x) = f_{E_k}(x) \ pour \ k-1 < x \leqslant k,$$

et

$$F(x) = u_k \quad pour \quad -k < x \leqslant -k+1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

La fonction $F(x)$ étant intégrable dans tout intervalle fini et satisfaisant aux conditions (α_1)—(γ_1), on démontre que la fonction $\Phi(x)$ (définie par (5)) satisfait à la condition du théorème.

II. *La condition est suffisante.*

Soit $\varphi(x)$ une fonction continue d'une variable réelle. L'ensemble de tous les points x pour lesquels l'expression

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

tend vers une limite déterminée étant un ensemble borelien (ainsi que l'ensemble des x où au moins une dérivée de Dini est infinie), il en est de même pour *l'ensemble de tous les points où $\varphi(x)$ est dérivable.* L'ensemble H_φ est donc égal à *l'ensemble des valeurs* *d'une fonction de Baire définie sur un ensemble borelien*; il est donc un ensemble (A) [1]).

Notre théorème est ainsi démontré.

La fonction dérivée d'une fonction continue *partout dérivable* étant continue au sens de Darboux, l'ensemble des valeurs d'une telle dérivée est toujours un intervalle linéaire (fini ou non). Considérons la classe des fonctions continues, dérivables en tout point x, sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable.

Les dérivées de ces fonctions sont finies et bien déterminées pour tout x réel, sauf pour les points d'un ensemble au plus dénombrable.

Or, les ensembles des valeurs de ces dérivées ne sont plus des intervalles; leur nature est déterminée, d'après ce qui précède, par la proposition suivante:

Corollaire. *Pour qu'un ensemble linéaire E soit un ensemble (A), il faut et il suffit qu'il soit l'ensemble des valeurs de la fonction dérivée d'une fonction continue, dérivable en tout point, sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable.*

II.

Nous pouvons présenter le résultat obtenu sous une forme un peu différente, intéressante au point de vue de la théorie des fonctions d'ensemble.

Soit $\Psi(I)$ une fonction additive et absolument continue d'intervalle variable dans le domaine $I_0 = (0, 1)$ [2]).

Les dérivées supérieure $\overline{\Psi}'(x)$ et inférieure $\underline{\Psi}'(x)$ de $\Psi(I)$ [3])

[1]) V. W. Sierpiński, *Sur les images de Baire des ensembles linéaires*. Fund. Math. t. XIV, p. 198.

Remarquons que ce raisonnement subsiste dans le cas où $\varphi(x)$ est une fonction mesurable (B) d'une classe quelconque: on s'appuit sur le fait que les dérivées de Dini d'une fonction mesurable (B) sont elles-mêmes mesurables (B) (Voir W. Sierpiński, *Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues*. Fund. Math. t. III, p. 123).

[2]) Plus précisément: la fonction Ψ est supposée définie sur *le plus petit corps d'ensembles* renfermant la famille d'intervalles fermés contenus dans l'intervalle ouvert $I_0 = (0, 1)$.

[3]) On a par définition; $\overline{\Psi}'(x) = \overline{\lim} \dfrac{\Psi(I_x)}{|I_x|}$ pour $|I_x| \to 0$, où I_x désigne un intervalle fermé quelconque $\subset I_0$ et contenant le point x. La définition de $\underline{\Psi}'(x)$ est analogue.

La dérivée $\Psi'(x)$ de Ψ étant une fonction de point, le symbole H_Ψ conserve le sens déterminé au début de cette Note.

étant des fonctions mesurables (B) (de classe $\leqslant 2$), l'ensemble V des points x où la dérivée unique et finie existe est donné par la formule

$$V = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{\Psi}'(x) = \underline{\Psi}'(x),\ |\overline{\Psi}'(x)| + |\underline{\Psi}'(x)| < +\infty].$$

Or, V est un ensemble borelien et H_Ψ est l'ensemble des valeurs d'une fonction de Baire ($\overline{\Psi}'(x) = \underline{\Psi}'(x) = \Psi'(x)$) définie sur V: il en résulte que H_Ψ est un ensemble (A).

Inversement, soit E un ensemble (A) linéaire donné. Supposons que E est non-borné et reprenons la décomposition (6). Les ensembles (non-vides) E_k étant bornés, nous pouvons évidemment supposer que l'on a

$$E_k = \underset{y}{\mathrm{E}}[y \in E,\ |y| \leqslant k]. \tag{7}$$

Soit

$$a_k = 1 - \frac{1}{k^2} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

En modifiant un peu la construction (3)—(4), on obtient pour tout k naturel une fonction $F_k(x)$ définie pour $a_k < x \leqslant a_{k+1}$ et satisfaisant aux conditions (α_1)—(γ_1) (en y remplaçant, bien entendu, E par E_k et X par l'intervalle $a_k < x \leqslant a_{k+1}$).

Les relations (β_1), (7) et (8) donnent:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |F_k(x)|\, dx < \frac{3}{k^2} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Posons

$$F(x) = F_k(x) \quad \textit{pour} \quad a_k < x \leqslant a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

La fonction $F(x)$ satisfait aux conditions (α_1)—(γ_1) (en y remplaçant X par I_0). D'après (9), elle est sommable sur I_0. On en conclut que si l'on pose

$$\Psi(I) = \int_I F(x)\, dx \quad (I \subset I_0),$$

on obtient une fonction additive et absolument continue, définie pour tout $I \subset I_0$.

En s'appuyant sur les propriétés (α_1)—(γ_1) de $F(x)$, on démontre sans difficulté que la fonction $\Psi(I)$ satisfait à l'égalité $H_\Psi = E$.

La démonstration pour le cas de E borné étant implicitement contenue dans ce qui précède, nous pouvons énoncer le suivant

Théorème II. *Pour qu'un ensemble linéaire (non-vide) E soit un ensemble (A), il faut et il suffit que l'on ait $E = H_{\Psi}$, $\Psi(I)$ étant une fonction additive et absolument continue d'intervalle variable dans le domaine $0 < x < 1$.*

III.

Soient: C le cercle ouvert de centre 0 et de rayon 1, K la circonférence de C, $f(x, y)$ une fonction réelle définie dans C. Supposons qu'il existe un point $\eta \in K$ tel que

(11) $$\lim f(x, y) = l = l(\eta), \quad |l(\eta)| < +\infty,$$

pour $x + iy = z \to \eta$, $z \in C$. Désignons par Z l'ensemble de tous les points $\eta \in K$ satisfaisant à (11), par L_f l'ensemble des nombres $l(\eta)$, η parcourant tous les éléments de Z. Je vais démontrer le suivant

Théorème III. *Pour qu'un ensemble linéaire (non-vide) E soi un ensemble (A), il faut et il suffit qu'il existe une fonction harmonique $h(x, y)$ définie dans C et telle que $E = L_h$.*

Dém. I. *La condition est nécessaire.*

Soit E un ensemble (A) (non-vide) linéaire donné. Posons $z = x + iy$. Il faut démontrer qu'il existe une fonction harmonique $h(z)$ définie pour $|z| < 1$ et telle que $L_h = E$.

Désignons par ξ le point variable dans K. Nous allons construire une fonction $F(\xi)$ définie sur K et satisfaisant aux conditions suivantes:

(α_2) *$F(\xi)$ est continue du côté gauche en tout point $\xi \in K$* [1];

(β_2) $F(K) = E$;

(γ_2) *il existe pour tout $y_0 \in E$ un point de continuité de $F(\xi)$, soit ξ_0, tel que $F(\xi_0) = y_0$.*

Désignons de nouveau par $f_E(\xi)$ la fonction de M. Sierpiński correspondant à l'ensemble E et définie pour $\xi = e^{i\theta}$ $\left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

[1] La direction *de gauche à droite* pour les points ξ coïncidant avec le sens mathématique positif.

Soit $\{\eta_n\}$ la suite des points de discontinuité de $f_E(\xi)$, $\{f_E(\eta_n)\}$ la suite des valeurs correspondantes de $f_E(\xi)$.

Posons
$$F(\xi) = f_E(\xi) \quad \textit{pour} \quad \xi = e^{i\theta} \quad \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Soit $\{\theta_n\}$ une suite de nombres positifs remplissant les relations suivantes:
$$\theta_1 = 2\pi, \quad \theta_n > \theta_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}.$$

Posons
$$F(\xi) = f_E(\eta_n) \quad \textit{pour} \quad \xi = e^{i\theta} \quad (\theta_{n+1} < \theta \leqslant \theta_n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

La fonction $F(\xi)$ est ainsi définie pour tout $\xi \in K$, et on vérifie sans peine qu'elle satisfait aux conditions (α_2)—(γ_2).

$F(\xi)$ pouvant être supposée sommable, il existe, en vertu du principe de Dirichlet, une fonction $h(z)$, harmonique dans C et telle qu'en *tous les points de continuité* ξ de $F(\xi)$ les relations
$$z_n \in C, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \xi,$$
entraînent
$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = F(\xi).$$

Il en résulte d'après (γ_2):

(12) $$E \subset L_h.$$

Soit ξ_0 un point de discontinuité de $F(\xi)$. Supposons qu'il existe un nombre fini l tel que
$$\lim_{z\to\xi_0} h(z) = l.$$

D'après (α_2) et (β_2), on a nécessairement: $l = F(\xi_0) = y_0 \in E$, ce qui donne en vertu de (12): $E = L_h$, c. q. f. d.

II. *La condition est suffisante.*

Nous démontrerons que *l'ensemble L_f est toujours un ensemble (A), quelle que soit la fonction $f(x, y)$ définie dans C.*

En effet, désignons par $\bar{f}(x, y)$ resp. $\underline{f}(x, y)$ les fonctions maximale resp. minimale de $f(x, y)$. Ces fonctions étant définies et semicontinues sur $C + K$, les fonctions $\bar{f}(\xi)$ et $\underline{f}(\xi)$, ainsi que leur différence $\underline{f} - \bar{f}$, sont des fonctions de Baire relativement à K (ξ désignant toujours le point variable dans K).

On vérifie sans peine que l'ensemble Z est défini par la relation suivante:

$$Z = \underset{\xi}{\mathrm{E}}\,[\bar{f}(\xi) - \underline{f}(\xi) = 0,\ |\bar{f}(\xi)| + |\underline{f}(\xi)| < +\infty],$$

d'où il résulte qu'il est un ensemble borelien.

D'autre part, on voit que l'égalité $l(\eta) = \bar{f}(\eta) = \underline{f}(\eta)$ est vraie pour tout $\eta \in Z$. L'ensemble L_f peut donc être considéré comme celui des valeurs d'une fonction de Baire définie sur un ensemble de Borel, ce qui implique qu'il est un ensemble (A) [1]).

[1]) Remarquons que ce théorème est vrai pour les domaines simplement connexes quelconques.

Une nouvelle classe de continus.

Par

Eduard Čech (Brno).

Un continu C (espace métrique, compact et connexe) *jouit de la propriété* P (P_n) *s'il existe sur* C *une fonction continue réelle* $f(x)$ *telle que, pour chaque nombre réel* c, *l'équation* $f(x) = c$ *possède un nombre fini (au plus* n) *solutions* $x \in C$. Le but de cette Note est de démontrer que *la propriété* P *entraîne les trois propriétés suivantes*:

1°. C *est une courbe régulière* (au sens de M. Menger);

2°. *l'ensemble* E *des extrémités* (points d'ordre 1) *de* C *est clairsemé* (et par suite dénombrable);

3°. R *désignant l'ensemble des points de ramification* (points d'ordre > 2) *de* C, *l'ensemble* $\bar{R}$ *est punctiforme.*

I. Soit a un point donné de l'espace C et soit U un entourage [1]) donné de a si petit que $x \in \bar{U}$, $x \neq a$ entraîne $f(x) \neq f(a)$. Posons [2]) $\mu = \mathrm{Min.}\ |f(x) - f(a)| > 0$ pour $x \in \mathrm{Fr.}\ U$ [3]). Désignons par V l'ensemble des points $x \in U$ tels que $|f(x) - f(a)| < \mu$. Alors $V \subset U$, V est un entourage de a, et $x \in \mathrm{Fr.}\ V$ entraîne $f(x) = f(a) \pm \mu$, d'où il résulte que l'ensemble Fr. V est fini [4]).

L'espace C est donc une courbe régulière. Il en résulte [5]) que C est localement connexe. Donc [6]) tous deux points de C sont situés

[1]) Ensemble ouvert contenant a.

[2]) Le minimum existe, car l'ensemble Fr. U est compact.

[3]) Fr. $U = \bar{U} - U$,

[4]) On voit que la propriété P_n entraine que l'ordre de chaque point de C soit $\leq 2n$.

[5]) Menger, *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. 95, p. 300. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, II, Verh. Amsterdam 1927, nº 4, p. 65.

[6]) Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 201. R. L. Moore, Trans. Amer. Soc. 17, p. 137.