lows at once that no cyclic element of M can have a local separating point, and thus every cyclic element of M has property A and hence also property B. Therefore from Theorem (α) we get

Theorem (β). *In order that the uni-coherent continuous curve M should have property C it is necessary and sufficient that the cyclic elements of M should form a simple cyclic chain.*

Remark. While the condition in our principal theorem above is not a necessary one, we see that the following condition stated in terms of local separating points is a necessary — though not a sufficient one: *in order that a continuous curve have property C* (or, of course, B) *it is necessary that M have no local separating point p which cuts M locally into more than two components* (i. e. such that a region R exists containing p and such that $R-p$ has more than two components). For if such a point p exists in M, then if X, Y, and Z are distinct components of $R-p$ and $[x_i]$, $[y_i]$, and $[z_i]$ are sequences of points in X, Y, and Z respectively each converging to p, it is easily seen that no arc in M contains the point set $p+\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i+z_i)$.

Über die symmetrisch allgemeinen Lösungen im Klassenkalkul.

Von

Th. Skolem (Bergen, Norwegen).

Einleitung.

Vorliegende Arbeit ist ein kurzer Auszug eines Teiles meiner auf norwegisch geschriebenen Abhandlung „Undersökelser indenfor logikkens algebra“ vom Jahre 1913. Diese Abhandlung ist bisher nicht veröffentlicht worden, sondern wird im Archiv der Universität Oslo aufbewahrt. Eine vollständige Wiedergabe jener Arbeit wird in den Schriften der Akademie der Wissenschaften zu Oslo bald erscheinen.

Die Aufgabe, welche im folgenden behandelt wird, ist die, Gleichungen oder Subsumtionen im Klassenkalkul in bezug auf eine oder mehrere Unbekannten symmetrisch aufzulösen; man findet solche Aufgaben schon in Schröders „Algebra der Logik“. Abgesehen davon, daß ich $A \rightarrow B$ schreibe um auszudrücken, daß eine Aussage B aus der Aussage A folgt, sind die hier benutzten Bezeichnungen immer die Schröderschen. Weiter bemerke ich, daß ich die Addition der Klassen (Bildung ihrer Vereinigung) und ihre Multiplikation (Durchschnittsbildung) hier ohne Skrupel auf ganz beliebige Mengen von Klassen anwende, wie es ja nach den Axiomen der Mengenlehre möglich sein soll. Auf Grundlagenfragen soll hier nicht eingegangen werden.

§ 1.

In dem einfachsten Teile des Logikkalkuls (Gebiete- oder Klassenkalkul, auch identischer Kalkul genannt) hat man besonders die Aufgabe zu studieren, Gleichungen oder Subsumtionen in bezug auf eine oder mehrere Unbekannten aufzulösen. Ist die Zahl der Unbekannten endlich, so kann man sie bekanntlich schrittweise bestimmen; dadurch kommen aber die Symmetrieverhältnisse der Aufgabe nicht in der Lösung zum Ausdruck, und für beliebige Mengen von Unbekannten ist dies Verfahren überhaupt nicht allgemein anwendbar. Deshalb ist es wünschenswert, Methoden zur simultanen Auflösung zu finden und zwar so, daß die Symmetrieverhältnisse in der gegebenen Beziehung auch in der Lösung vorkommen. Man muß versuchen, die sogenannten symmetrisch allgemeinen Lösungen zu finden.

Def. 1a. Eine Lösung heißt *allgemein*, wenn die Unbekannten derart durch gewisse Parameter ausgedrückt sind, daß man erstens bei beliebiger Wahl der Werte der Parameter stets eine richtige Lösung erhält und zweitens jede Lösung erhält bei passender Wahl der Parameter.

Def. 1b. Es sei G eine Gruppe von Permutationen zwischen den Unbekannten und den eventuell vorkommenden unbestimmten Koeffizienten der gegebenen Gleichung. Eine Lösung heißt *symmetrisch in bezug auf* G, wenn sie ungeändert bleibt bei jeder Permutation aus G, wenn diese mit einer passenden Permutation zwischen den Parametern verknüpft wird.

Es sollen im folgenden nur Gleichungen betrachtet werden. Bekanntlich kann nicht nur jede Subsumtion sondern auch jede logische Konjunktion mehrerer Subsumtionen und (oder) Gleichungen als eine einzige Gleichung geschrieben werden. Um volle Allgemeinheit zu bekommen betrachte ich eine beliebige Menge von Unbekannten. Ich bezeichne sie als x_k, wo der Index k eine beliebige Menge von Werten (Bedeutungen) durchläuft. Eine Funktion, welche mittels der drei Operationen des Klassenkalkuls aus den x_k gebildet ist, wobei also beliebige Mengen von Operanden zugelassen werden, bezeichne ich als $f\{x_k\}$. Die gegebene Gleichung kann dann in der Form

$$f\{x_k\} = 0 \tag{1}$$

geschrieben werden.

Eine besondere Rolle im folgenden spielen einige Lösungen, die ich *normale* Lösungen nenne. Sie werden so definiert:

Def. 2. Unter einer normalen Lösung von (1) in bezug auf eine Gruppe G verstehe ich ein Gleichungssystem (d. h. logisches Produkt oder logische Konjunktion von Gleichungen) der Form

$$\mathop{\Pi}_{k} (x_k = f_k\{u_{k'}\}), \tag{2}$$

wo k' unabhängig von k dieselbe Menge wie k durchläuft, und die u_k, die Parameter sind, wenn folgende 3 Bedingungen erfüllt sind:

1) $\mathop{\Pi}_{k} (x_k = f_k\{u_{k'}\}) \rightarrow (f\{x_k\} = 0)$

oder m. a. W.

$$f\{f_k\{u_{k'}\}\} = 0.$$

2) $(f\{x_k\} = 0) \rightarrow \mathop{\Pi}_{k} (x_k = f_k\{x_{k'}\})$.

Dies nenne ich die Adventivforderung.

3) Falls S aus G nicht (1) ändert, so bleibt (2) ungeändert bei der Permutation SS', wenn S' die Parameter u_k genau so vertauscht wie S die Unbekannten x_k. Dies ist die Symmetrieforderung.

Ist G die vollständige Symmetriegruppe von (1), so soll die Lösung *absolut normal* heißen, wenn diese 3 Bedingungen erfüllt sind.

So oft ich im folgenden beweisen soll, daß eine Lösung normal ist, tue ich das dadurch, daß ich 3 Proben machen, die den 3 Forderungen entsprechen. Wie ich beweisen werde, kann nicht jede lösbare Gleichung symmetrisch allgemein gelöst werden; die Bedingung der symmetrisch allgemeinen Lösbarkeit werde ich angeben. Es wird hervorgehen, daß, wenn eine Gleichung symmetrisch allgemein lösbar ist, so ist sie auch normal lösbar. Bevor ich aber zu diesen Untersuchungen übergehe, will ich einen Satz beweisen, der im folgenden sehr nützlich ist, nämlich:

Satz 1. *Gilt die Gleichung*

$$\mathop{\Sigma'}_{l,l'} A_l A_{l'} + \mathop{\Pi}_{l} \overline{A}_l = 0, \quad (l \text{ und } l' \text{ durchlaufen eine Menge } L) \tag{3}$$

wo der Apostroph bedeutet, dass immer $l' \neq l$ *ist, und ist für jedes* k

$$x_k \doteq \sum_l a_{kl} A_l \quad (k \text{ durchläuft eine Menge } K), \tag{4}$$

so ist für eine beliebige Funktion f

$$f\{x_k\} = \sum_l f\{a_{kl}\} A_l. \tag{5}$$

B e w e i s: Welche Werte die b_l haben mögen, so ist erstens wegen (3)

(6) $$\sum_l b_l A_l \cdot \sum_{l'} \bar{b}_{l'} A_{l'} = \sum_l b_l \bar{b}_l A_l = 0,$$

und zweitens ist

(7) $$\sum_l b_l A_l + \sum_{l'} \bar{b}_{l'} A_{l'} = \sum_l (b_l + \bar{b}_l) A_l = \sum_l A_l = 1.$$

Man kann (6) und (7) in die Gleichung

(8) $$\overline{\sum_l b_l A_l} = \sum_l \bar{b}_l A_l$$

zusammenziehen. Durch beiderseitige Negation kommt hieraus

(9) $$\sum_l b_l A_l = \prod_l (b_l + \bar{A}_l).$$

Wir denken uns jetzt die Funktion f in Boolescher Weise entwickelt

$$f\{x_k\} = \sum_{\mathfrak{X}} a_{\mathfrak{X}} \cdot \mathfrak{X},$$

wo also jedes $\mathfrak{X}$ die Form

$$\prod_{k'} x_{k'} \prod_{k''} \bar{x}_{k''}$$

hat, wobei k' die Elemente einer Teilmenge K' und k'' die Elemente der komplementären Teilmenge K'' von K durchlaufen. Nach (9) bekommt man dann

$$x_{k'} = \sum_l a_{k'l} A_l = \prod_l (a_{k'l} + \bar{A}_l),$$

woraus

$$\prod_{k'} x_{k'} = \prod_{k'} \prod_l (a_{k'l} + \bar{A}_l) = \prod_l \prod_{k'} (a_{k'l} + \bar{A}_l) = \prod_l (\prod_{k'} a_{k'l} + \bar{A}_l) = \\ = \sum_l (\prod_{k'} a_{k'l}) A_l,$$

wo die letzte Umformung wieder nach (9) gemacht ist. Weiter ist nach (4), (8) und (9)

$$\bar{x}_{k''} = \sum_l \bar{a}_{k''l} A_l = \prod_l (\bar{a}_{k''l} + \bar{A}_l),$$

woraus man in ähnlicher Weise wie eben findet

$$\prod_{k''} \bar{x}_{k''} = \sum_l (\prod_{k''} \bar{a}_{k''l}) A_l.$$

Deshalb bekommt man, wenn man (3) beachtet,

$$\prod_{k'} x_{k'} \prod_{k''} \bar{x}_{k''} = \sum_l (\prod_{k'} a_{k'l}) A_l \cdot \sum_{l'} (\prod_{k''} \bar{a}_{k''l'}) A_{l'} = \sum_l (\prod_{k'} a_{k'l} \prod_{k''} \bar{a}_{k''l}) A_l.$$

Setzt man jetzt

$$a_{\mathfrak{X}} \cdot \mathfrak{X} = a_{\mathfrak{X}} \prod_{k'} x_{k'} \prod_{k''} \bar{x}_{k''} = f_{\mathfrak{X}}\{x_k\},$$

so wird

$$f_{\mathfrak{X}}\{x_k\} = \sum_l f_{\mathfrak{X}}\{a_{kl}\} A_l$$

und deshalb

$$f\{x_k\} = \sum_{\mathfrak{X}} f_{\mathfrak{X}}\{x_k\} = \sum_{\mathfrak{X}} \sum_l f_{\mathfrak{X}}\{a_{kl}\} \cdot A_l = \sum_l \sum_{\mathfrak{X}} f_{\mathfrak{X}}\{a_{kl}\} A_l = \sum_l f\{a_{kl}\} A_l,$$

w. z. bw. w.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der Sätze 45+ und 46+ im 1. Bande von Schröders „Algebra der Logik". Nützlich ist auch folgender Satz:

Satz 2. *Für jede Funktion f gilt die Gleichung*

$$af\{x_k\} = af\{ax_k\}$$

für alle Werte von a und der x.

Beweis: Nach Satz 1 bekommt man, wenn die Menge L bloss zwei Elemente enthält, und das eine $A = a$, das andere $A = \bar{a}$ gesetzt werden

$$f\{x_k\} = f\{a \cdot ax_k + \bar{a} x_k\} = af\{ax_k\} + \bar{a} f\{x_k\},$$

woraus durch Multiplikation mit a

$$af\{x_k\} = af\{ax_k\}.$$

§ 2.

Zuerst will ich einen ziemlich allgemeinen Sonderfall betrachten, wo eine absolut normale Lösung stets vorhanden ist. Es gilt nämlich:

Satz 3. *Ist*

(10) $$f\{0\} f\{1\} = 0,$$

wo $f\{0\}$ bzw. $f\{1\}$ die Werte von f sind, wenn alle $x_k = 0$ bzw. $= 1$ gesetzt werden, so ist

(11) $\prod (x_k = f\{0\} f\{u_{k'}\} + u_k \overline{f\{u_{k'}\}})$ (k' durchläuft K unabhängig von k)

eine absolut normale Lösung von (1).

Beweis: Probe 1. Aus (11) folgt nach Satz 1

(12) $$f\{x_k\} = f\{f\{0\}\} f\{u_{k'}\} + f\{u_k\} \overline{f\{u_{k'}\}} = f\{f\{0\}\} f\{u_{k'}\}.$$

Man kann aber auch schreiben

$$f\{0\} = 1 \cdot f\{0\} + 0 \cdot \overline{f\{0\}}$$

und bekommt dann nach (10) und Satz 1

$$f\{f\{0\}\} = f\{1\}\, f\{0\} + f\{0\}\overline{f\{0\}} = 0,$$

d. h. nach (12)

$$f\{x_k\} = 0.$$

Probe 2. Aus (1) folgt offenbar für jedes k

$$x_k = f\{0\}\, f\{x_{k'}\} + x_k \overline{f\{x_{k'}\}}.$$

Probe 3. Es seien S eine Permutation zwischen den x und den Koeffizienten von (1), welche (1) ungeändert lässt, und S' die entsprechende Permutation zwischen den u_k. Dann führt SS' (11) über in

$$\prod_{l}(x_l = f\{0\}\, f\{u_{l'}\} + u_l \overline{f\{u_{l'}\}}), \tag{11'}$$

wenn S allgemein x_k in x_l und also S' allgemein u_k in u_l überführen. Offenbar ist aber (11′) dasselbe wie (11); denn l und l' durchlaufen K genau so wie k und k', während $f\{u_{k'}\} = f\{u_{l'}\}$ sein muß, weil S' (und also auch SS') $f\{u_k\}$ ungeändert lassen muß, da $f\{x_k\}$ bei S ungeändert bleibt. Also ist auch die Symmetrieforderung erfüllt.

Die Bedingung (10) bedeutet, daß in der Booleschen Entwicklung von f die Koeffizienten der beiden Glieder

$$\Pi x_k \quad \text{und} \quad \Pi \bar{x}_k$$

disjunkt sind, d. h. ihr identisches Produkt ist 0. Hat speziell $\Pi \bar{x}_k$ den Koeffizienten 0, oder m. a. W. ist $f\{0\} = 0$, so vereinfacht sich die absolut normale Lösung zu

$$\prod_{k}(x_k = u_k \overline{f\{u_{k'}\}}).$$

Danach soll ein Satz über Gleichungen mit lauter bestimmten Koeffizienten, etwa alle 0 oder 1, bewiesen werden; die Symmetriegruppe G besteht dann aus Permutationen zwischen den x allein. Übrigens gilt der Satz immer, wenn man eine Gruppe G betrachtet, deren Permutationen nur die x bewegen.

Satz 4. *Die Gleichung* (1) *ist unter der erwähnten Voraussetzung dann und nur dann in bezug auf G symmetrisch allgemein lösbar, wenn sie noch lösbar bleibt nach Gleichsetzung aller x in jedem der Transitivitätssysteme, worin die x sich bei den Permutationen von G verteilen. Ist* (1) *symmetrisch allgemein lösbar, so ist sie auch normal lösbar.*

Beweis: Zuerst soll gezeigt werden, daß die Bedingung hinreichend ist. Durch die Gleichsetzung der x gehe $f\{x_k\}$ in $f\{x_\varkappa\}$ über, indem $\varkappa$ durch seine verschiedenen Werte die verschiedenen Transitivitätssysteme angibt. Es sei

$$\prod_{\varkappa}(x_\varkappa = a_\varkappa) \tag{13}$$

eine spezielle Lösung der Gleichung

$$f\{x_\varkappa\} = 0. \tag{14}$$

Dann behaupte ich, daß

$$\prod_{k}(x_k = u_k \overline{f\{u_{k'}\}} + a_{\varkappa(k)} f\{u_{k'}\}) \tag{15}$$

eine normale Lösung von (1) ist, wobei $\varkappa(k)$ denjenigen Wert von $\varkappa$ bedeutet, der das Transitivitätssystem angibt, wozu x_k gehört.

Probe 1. Aus (15) folgt nach Satz 1

$$f\{x_k\} = f\{u_k\}\overline{f\{u_{k'}\}} + f\{a_{\varkappa(k)}\} f\{u_{k'}\} = 0,$$

weil ja $f\{a_{\varkappa(k)}\} = 0$ sein muß wegen der Voraussetzung, daß (13) eine Lösung von (14) ist.

Probe 2. Aus (1) folgt offenbar

$$x_k = x_k \overline{f\{x_{k'}\}} + a_{\varkappa(k)} f\{x_{k'}\}.$$

Probe 3. Daß auch die Symmetrieforderung erfüllt ist, erkennt man sofort, wenn man beachtet, daß jede Permutation von G nur solche x_k vertauscht, für welche $\varkappa(k)$ denselben Wert hat.

Daß andrerseits die Bedingung notwendig ist, erkennt man so: Besitzt (1) eine symmetrisch allgemeine Lösung in gewissen unabhängigen Parametern, so behält man eine Lösung, wenn man alle Parameter einander gleich setzt. Dadurch müssen alle Unbekannten jedes Transitivitätssystems einander gleich werden; denn wegen der Symmetrieeigenschaft der Lösung gehen sie ja alle aus einer unter ihnen durch Permutationen zwischen den Parametern hervor. Also muß (1) noch lösbar bleiben, wenn alle x innerhalb jedes einzelnen Transitivitätssystems einander gleich gesetzt werden.

Hierdurch ist Satz 4 bewiesen. Falls die gegebene Gleichung nur Koeffizienten 0 oder 1 hat, so kann man die Bedingung auch so ausdrücken: Die Gleichung muß nicht die Form $1=0$ annehmen bei der erwähnten Gleichsetzung der x. Von einem leeren Denkbereiche wird natürlich abgesehen.

Im nächsten Paragraphen soll dann das Problem allgemein behandelt werden.

§ 3.

Die gegebene Gleichung sei

(16) $$f\{a_l, x_k\}=0,$$

wo die a_l die vorkommenden unbestimmten Koeffizienten sind, während die x_k die Unbekannten sind. Es wird eine Gruppe G betrachtet, deren Permutationen (16) ungeändert lassen; jede Permutation besteht aus einer Permutation zwischen den x und (eventuell) einer Permutation zwischen den a. Die Aufgabe ist herauszufinden, wann (16) symmetrisch allgemein in bezug auf G lösbar ist für ganz beliebige Werte der a.

Die Boolesche Entwicklung von (16) nach den a hat das Aussehen

(17) $$f\{a_l, x_k\}=\sum_A A f_A\{x_k\},$$

wo jedes A ein Konstituent in der Entwicklung von 1 nach den a ist, d. h. jedes A ist ein Produkt von einigen der a mit den Negaten der übrigen. Jede Funktion $f_A\{x_k\}$ enthält nicht mehr die a; sie enthält also nur bestimmte Koeffizienten, etwa 0 und 1. Nun gilt:

Satz 5. *Ist*

(18) $$\prod_k (x_k=f_k\{a_l, u_h\})$$

(h braucht nicht dieselbe Menge wie k zu durchlaufen)

eine symmetrisch allgemeine Lösung in bezug auf G von (16), *so ist*

(19) $$\prod_k (y_k=A x_k+\bar{A} v_k=A f_k\{a_l, u_h\}+\bar{A} v_k)$$

eine symmetrisch allgemeine Lösung von

(20) $$A f_A\{x_k\}=0$$

in bezug auf G_A, wobei G_A diejenige Untergruppe von G ist, deren Permutationen A, und deshalb auch f_A, ungeändert lassen.

Beweis: Probe 1. Weil nach (19) $A y_k=A x_k$ ist, bekommt man nach Satz 2 wegen (17)

$$A f_A\{y_k\}=A f_A\{A y_k\}=A f_A\{A x_k\}=A f_A\{x_k\}=A f\{a_l, x_k\}.$$

Sind die x_k in Übereinstimmung mit (18) bestimmt, so bekommt man also $A f_A\{y_k\}=0$.

Probe 2. Es seien die y_k eine Lösung von (20). Setzt man

$$x_k=A y_k+\bar{A} z_k,$$

so wird

$$f\{a_l, x_k\}=A f\{a_l, y_k\}+\bar{A} f\{a_l, z_k\},$$

und die z_k können so bestimmt werden, daß $f\{a_l, z_k\}=0$ wird; denn nach der Voraussetzung des Satzes 5 ist ja (16) jedenfalls lösbar. Hierdurch werden die x_k auch eine Lösung von (16). Weiter wird $A y_k=A x_k$, woraus

$$y_k=A x_k+\bar{A} y_k,$$

d. h. (19) ist eine allgemeine Lösung von (20).

Probe 3. Bleibt A (und also auch f_A) ungeändert bei $S\Sigma$, wo S die x, Σ die a vertauschen, so gibt es eine Permutation T zwischen den u derart, daß (18) durch $S\Sigma T$ ungeändert bleibt. Dann bleibt aber (19) ungeändert bei $S\Sigma T U$, wo U die v genau so vertauscht, wie S die x.

Damit also (16) symmetrisch allgemein lösbar sein soll in bezug auf G für ganz beliebige Werte der a, muß jede Gleichung (20) in bezug auf G_A für beliebige a lösbar sein. Daraus folgt, daß für alle A die Gleichung

(21) $$f_A\{x_k\}=0$$

symmetrisch allgemein in bezug auf G_A lösbar sein muß. Denn ist $A f_A\{x_k\}=0$ symmetrisch allgemein lösbar bei unbestimmten a, so kann man den a solche Werte geben, daß $A=1$ wird: hierdurch bekommt man eine symmetrisch allgemeine Lösung von (21).

Ist (21) symmetrisch allgemein lösbar, so ist sie nach Satz 4 normal lösbar. Ich werde nun umgekehrt beweisen, daß, wenn für alle A (21) in bezug auf G_A normal lösbar ist, so ist (16) normal lösbar in bezug auf G. Zuerst sollen einige Hilfssätze bewiesen werden.

Hilfssatz 1. [1] *Ist*

(22) $$\prod_k (x_k = f_k\{u_{k'}\})$$

eine normale Lösung der Gleichung

(23) $$f\{x_k\} = 0$$

in bezug auf irgendeine Gruppe von Permutationen die die Gleichung nicht ändern, so ist

(24) $$\prod_k (x_k = a\, f_k\{u_{k'}\} + \bar{a}\, u_k)$$

eine ebensolche Lösung der Gleichung

(25) $$a\, f\{x_k\} = 0.$$

Beweis: Probe 1. Nach Satz 1 folgt aus (24)

$$a\, f\{x_k\} = a\,(a\, f\{f_k\{u_{k'}\}\} + \bar{a}\, f\{u_k\}) = a f\{f_k\{u_{k'}\}\} = 0,$$

weil (22) eine Lösung von (23) ist.

Probe 2. Befriedigen die x_k und die y_k bezw. (25) und (23), so bekommt man nach Satz 1

$$f\{a x_k + \bar{a}\, y_k\} = a\, f\{x_k\} + \bar{a}\, f\{y_k\} = 0,$$

d. h. die Ausdrücke $a x_k + \bar{a} y_k$ stellen eine Lösung von (23) dar. Nach der Voraussetzung ist dann

$$a x_k + \bar{a}\, y_k = f_k\{a x_{k'} + \bar{a}\, y_{k'}\} = a f_k\{x_{k'}\} + \bar{a}\, f_k\{y_{k'}\}.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit a

$$a x_k = a\, f_k\{x_{k'}\},$$

woraus

$$x_k = a x_k + \bar{a}\, x_k = a\, f_k\{x_{k'}\} + \bar{a}\, x_k.$$

Probe 3. Bleibt (25) und also auch (23) ungeändert bei der Permutation S zwischen den x, so bleibt nach Voraussetzung (22) ungeändert bei SS', wenn S' die u genau so vertauscht wie S die x. Offenbar bleibt dann auch (24) ungeändert bei SS'.

Hilfssatz 2. *Ist S eine Permutation aus G, welche f_A in f_B überführt, während $U(x_k, u_{k'})$ die normale Lösung von $f_A = 0$ in bezug auf G_A bedeutet, so ist $U(Sx_k, S'u_{k'})$ eine normale Lösung von $f_B = 0$ in bezug auf G_B.* Hier bedeutet $U(Sx_k, S'u_{k'})$ das, wozu $U(x_k, u_{k'})$ übergeht, wenn die x_k der Permutation S, und die $u_{k'}$ der Permutation S' unterworfen werden; S' vertauscht die u_k genau so, wie S die x_k.

Beweis: Probe 1. Nach der Voraussetzung gilt

$$U(x_k, u_{k'}) \to (f_A\{x_k\} = 0)$$

für alle x und u; deshalb gilt selbstverständlich auch

$$U(Sx_k, S'u_{k'}) \to (f_B\{x_k\} = 0),$$

weil ja $f_B\{x_k\}$ dasselbe wie $f_A\{Sx_k\}$ ist.

Probe 2. Wegen $U(x_k, x_{k'})$ hat man auch $U(Sx_k, Sx_{k'})$, oder wenn man will, $U(Sx_k, S'x_{k'})$.

Probe 3. Jede Permutation der Gruppe G_B hat offenbar die Form $S^{-1}TS$, wo T zu G_A gehört. Durch Anwendung von $S^{-1}S'^{-1}TT'SS'$ auf $U(Sx_k, S'u_k)$, wobei T' die u so vertauscht wie T die x, bleibt $U(Sx_k, S'u_k)$ ungeändert; denn $S^{-1}S'^{-1}$ führt sie zuerst in $U(x_k, u_{k'})$ über, was bei TT' ungeändert bleibt, und danach geht $U(x_k, u_{k'})$ bei SS' wieder in $U(Sx_k, S'u_k)$ über.

Hilfssatz 3. *Geht f_A durch S_1 in f_C über, so geht $U(Sx_k, S'u_{k'})$ in $U(S_1 x_k, S_1' u_{k'})$ über durch jede Permutation, welche f_B in f_C überführt, wenn diese Permutation mit der entsprechenden zwischen den u verknüpft wird.* Dabei bedeutet wie im vorigen Hilfssatz S eine Permutation, welche f_A in f_B überführt.

Beweis: Jede Permutation, welche f_B in f_C überführt, hat die Form $S^{-1}TS_1$, wo T wiederum f_A ungeändert läßt. Zuerst geht $U(Sx_k, S'u_{k'})$ bei $S^{-1}S'^{-1}$ in $U(x_k, u_{k'})$ über, was bei TT' ungeändert bleibt, und endlich geht $U(x_k, u_{k'})$ bei $S_1 S'$ in $U(S_1 x_k, S_1' u_{k'})$ über.

Aus den beiden letzten Hilfssätzen folgt u. a., daß man immer dieselbe Lösung $U(Sx_k, S'u_{k'})$ von $f_B = 0$ bekommt, was für eine Permutation S man wählt, die f_A in f_B überführt. Durch die Wahl der normalen Lösung in bezug auf G_A von $f_A = 0$ ist also in dieser Weise eine normale Lösung in bezug auf G_B von $f_B = 0$ eindeutig bestimmt; hierbei kann B ein beliebiger Konstituent der Entwicklung von 1 nach den a sein, der aus A durch irgendeine Permutation von G hervorgehen kann. Infolgedessen kann folgender Satz bewiesen werden:

[1] Dieser Hilfssatz wird übrigens im folgenden nicht in vollem Umfange benutzt.

Satz 6. *Gibt es in jedem der Transitivitätssysteme, worin die A sich kraft G verteilen, mindestens ein A derart, daß* (21) *eine normale Lösung in bezug auf G_A hat, so ist auch* (16) *normal lösbar in bezug auf G.*

Beweis: Nach dem eben bewiesenen bekommt man für jedes A eine normale Lösung in bezug auf G_A von $f_A = 0$. Es sei für jedes A

(26) $$\Pi_k (x_k = f_{kA}\{u_{k'}\})$$

diese Lösung. Dann behaupte ich, daß

(27) $$\Pi_k (x_k = \sum_A A f_{kA}\{u_{k'}\})$$

eine normale Lösung in bezug auf G von (16) ist.

Probe 1. Man hat, wenn man Satz 1 beachtet,

$$f\{a_l, x_k\} = \sum_A A f_A\{x_k\} = \sum_A A \sum_B B f_A\{f_{kB}\{u_{k'}\}\} = \sum_A A f_A\{f_{kA}\{u_{k'}\}\} = 0.$$

Probe 2. Befriedigen die x_k die Gleichung (16), so gilt für alle A die Gleichung (20). Aus dem Beweise des Hilfssatzes 1 folgt daß, so oft (20) stattfindet,

$$x_k = A f_{kA}\{x_{k'}\} + \bar{A} x_k$$

sein muß; denn aus der Gültigkeit von (21) soll ja

$$x_k = f_{kA}\{x_{k'}\}$$

folgen, da (26) die Adventiveigenschaft haben soll. Also wird $A x_k = A f_{kA}\{x_{k'}\}$, woraus

$$x_k = \sum_A A x_k = \sum_A A f_{kA}\{x_{k'}\}.$$

Probe 3. Es sei ST eine Permutation aus G, wobei S die x und T die a vertauschen. S' sei die Permutation zwischen den u, welche S genau entspricht. Es bezeichne allgemein B den Konstituenten, wozu A übergeht durch T, ebenso gehe allgemein x_k durch S in x_l über. Durch STS' muß dann $f_{kA}\{u_{k'}\}$ in $f_{lB}\{u_{l'}\}$ übergehen nach der Art, worauf diese Lösungen gewählt sind; denn die Lösung $\Pi_k (x_k = f_{kA}\{u_{k'}\})$ soll ja dabei in die Lösung von $f_B = 0$ übergehen. Folglich geht

$$\sum_A A f_{kA}\{u_{k'}\}$$

in

$$\sum_B B f_{lB}\{u_{l'}\}$$

über, während gleichzeitig x_k in x_l übergeht. Offenbar bleibt also (27) ungeändert bei STS'.

Hierdurch ist die notwendige und hinreichende Bedingung der symmetrisch allgemeinen Lösbarkeit von (16) gefunden. Es ist notwendig, und es genügt, daß in jedem Transitivitätssystem der A mindestens ein A vorhanden ist derart, daß (21) symmetrisch allgemein lösbar ist. Diese Bedingung kann aber auch so ausgesprochen werden:

Satz 7. *Damit* (16) *symmetrisch allgemein für unbestimmte a in bezug auf G lösbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß für jede Untergruppe H von G (G selbst mitgerechnet) folgendes stattfindet: Die Gleichung* (16) *bleibt noch lösbar für beliebige Werte der übrig bleibenden a, wenn einerseits alle a und andererseits alle x in jedem der Transitivitätssysteme, worin sie sich kraft H verteilen, einander gleich gesetzt werden.*

Beweis: Eine in bezug auf G symmetrisch allgemeine Lösung ist auch symmetrisch allgemein in bezug auf H, wenn H eine beliebige Untergruppe von G ist. Werden nun in einer solchen Lösung alle a innerhalb jedes ihrer Transitivitätssysteme in bezug auf H einander gleich gesetzt, so müssen alle x in jedem ihrer Transitivitätssysteme kraft H aus einander durch Permutationen zwischen den Parametern allein hervorgehen. Alle x in jedem Transitivitätssystem müssen dann gleich werden, falls alle Parameter einander gleich gesetzt werden. Hierdurch muß eine Lösung von (16) für alle Werte der übrig gebliebenen a entstehen. Die erwähnte Bedingung ist also notwendig.

Nun sei andererseits die Bedingung erfüllt, und es sei A ein beliebiger Konstituent in der Entwicklung von 1 nach den a. Bei der erklärten Gleichsetzung der a in bezug auf G_A kann A nicht verschwinden, sondern geht in einen Konstituenten der Entwicklung von 1 nach den übrig gebliebenen a über. Denn A bleibt ja ungeändert bei jeder Permutation aus G_A, so dass jedes System der Transitivität in bezug auf G_A der a entweder ausschliesslich aus solchen a besteht, die alle unnegiert als Faktoren in A vorkommen, oder ausschliesslich aus a, die alle negiert als Faktoren in A vorkommen. Da nach der Annahme (16) noch lösbar für beliebige Werte der übrig gebliebenen a sein soll, falls auch die x in jedem Transitivitätssystem in bezug auf G_A einander gleich gesetzt werden, so muß dies erst recht mit der Gleichung (20) der Fall sein. Da man den übrig gebliebenen a solche Werte geben kann, daß $A = 1$ wird, so muß also auch (21) nach der erwähnten Gleichsetzung der x lösbar sein. Nach Satz 4 muß dann (21) in bezug auf G_A symmetrisch allgemein lösbar sein. Da A beliebig war, folgt hieraus nach Satz 6, daß auch (16) symmetrisch allgemein lösbar ist.

Zum Schlusse gebe ich einige Beispiele.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=\nu}^{\infty} x_n \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=\nu}^{\infty} \bar{x}_n = 0$$

gegeben; sie drückt im geläufigen Sinne aus, daß die Klassen x_n gegen eine Grenzklasse konvergieren, nämlich

$$x_\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty}\prod_{n=\nu}^{\infty} x_n .$$

Die gegebene Gleichung ist vollkommen symmetrisch in bezug auf alle x; denn in der Booleschen Entwicklung ihrer linken Seite nach den x haben alle und nur die Konstituenten den Koeffizienten 1, welche das Produkt von unendlich vielen negierten und unendlich vielen unnegierten x sind, während alle anderen den Koeffizienten 0 haben. Da $\prod\limits_{h=1}^{\infty} \bar{x}_h$ den Koeffizienten 0 hat, so ist nach Satz 3 die Gleichung normal lösbar in bezug auf die volle Symmetriegruppe, die also hier aus allen möglichen Permutationen zwischen den x besteht. Man findet in der Tat die normale Lösung

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(x_n = u_n\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\prod_{\nu=\mu}^{\infty} u_\nu + \sum_{\mu=1}^{\infty}\prod_{\nu=\mu}^{\infty} \bar{u}_\nu\right)\right).$$

Ausserdem wird

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty}\prod_{n=\nu}^{\infty} u_n .$$

Bedeuten die u_n die unteren Klassen der Dedekindschen Schnitte, welche die positiven reellen Zahlen ξ_n darstellen, so erkennt man leicht, daß $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\prod\limits_{n=\nu}^{\infty} u_n$ nichts anderes ist als der limes inferior (d. h. eigentlich die untere Klasse des zugehörigen Schnittes) der Menge aller ξ_n oder auch $+\infty$, falls diese Menge keinen endlichen Häufungspunkt hat. Die durch unsere Lösungsformel gegebene Reihe der x definiert deshalb eine Folge reeller Zahlen, die gegen den limes inferior, bezw. gegen $+\infty$, konvergiert.

Beispiel 2. Es sei die Gleichung

$$xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = 0$$

gegeben. Die volle Symmetriegruppe G besteht aus allen Permutationen zwischen den x. Es werde gefragt, 1) ob die Gleichung symmetrisch allgemein lösbar ist in bezug auf G, 2) ob sie derart lösbar ist in bezug auf H, wo H die Untergruppe von G ist, die x stehen läßt.

In bezug auf G bilden die 3 Unbekannten nur ein System der Transitivität. Werden y und z beide $= x$ gesetzt, so bekommt man die absurde Gleichung $x + \bar{x} = 0$. Nach Satz 4 ist also die erste Frage zu verneinen.

In bezug auf H bilden y und z ein Transitivitätssystem, während x für sich ein anderes System bildet. Wird $z = y$ gesetzt, so bekommt man die Gleichung

$$xy + \bar{x}\bar{y} = 0,$$

die lösbar ist; denn schon $x = 1$, $y = 0$ ist eine Lösung. Folglich ist die zweite Frage zu bejahen. Man findet in der Tat, daß

$$x = u + \bar{v}\bar{w}, \quad y = v(\bar{u} + \bar{w}), \quad z = w(\bar{u} + \bar{v})$$

eine normale Lösung in bezug auf H ist.

Beispiel 3. Es wird gefragt, ob die Gleichung

$$axy + b\bar{x}y + cx\bar{y} + d\bar{x}\bar{y} = 0,$$

wo a, b, c, d mittels 4 anderer Klassen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so ausgedrückt sind[1]):

$$a = \alpha(\bar{\beta} + \bar{\gamma} + \bar{\delta})(\beta + \gamma + \bar{\delta}), \quad b = \beta(\bar{\alpha} + \bar{\gamma} + \bar{\delta}), \quad c = \gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\delta}),$$
$$d = \delta(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma})(\bar{\alpha} + \beta + \gamma),$$

für alle Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ absolut normal lösbar ist. Die volle Symmetriegruppe besteht offenbar aus der identischen Permutation

[1]) Man kann auch sagen, daß a, b, c, d eine beliebige Lösung der Gleichung $abcd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} = 0$ darstellen sollen.

und dem Transpositionspaar (β, γ) (x, y). Nach Satz 7 braucht man dann bloß zu untersuchen, ob die Gleichung noch lösbar bleibt für alle Werte von α, δ und β, wenn $\gamma = \beta$ und $y = x$ gesetzt werden. Man bekommt hierdurch die Gleichung

$$\alpha \bar{\delta} x + \bar{\alpha} \delta \bar{x} = 0,$$

die lösbar ist, weil z. B. schon $x = \delta$ eine Lösung ist. Die gestellte Frage ist also zu bejahen. Man hat hier ein Beispiel normaler Lösbarkeit, das nicht schon nach Satz 3 erledigt werden kann; denn $ad = \alpha\delta(\beta + \gamma)(\bar{\beta} + \bar{\gamma})$ ist nicht 0 für beliebige Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Mit Hilfe des in den Beweisen der Sätze 5 und 6 entwickelten Verfahrens kann man natürlich die normale Lösung wirklich bilden; das Verfahren ist aber sehr mühsam, und es wäre wohl möglich, ein leichteres Verfahren zu finden. Indessen gehe ich hier nicht näher darauf ein.

Sur l'analyticité des ensembles (A).

Par

G. Poprougénko (Paris).

Le but de cette Note est de mettre en évidence la liaison étroite qui existe entre les ensembles (A) et certaines opérations fondamentales de l'Analyse, qui, comme on verra dans la suite, conduisent d'une façon simple et naturelle à ces ensembles.

I.

Soit $f(x)$ une fonction réelle et finie d'une variable réelle. Supposons que cette fonction admet pour $x = a$ la dérivée *unique* et *finie* $f'(a)$: nous dirons dans ce cas que $f(x)$ est *dérivable* au point a.

Désignons par H_f l'ensemble des nombres $f'(x)$, x parcourant l'ensemble de tous les points où la fonction $f(x)$ est dérivable. L'ensemble H_f (qui peut être vide) est complètement déterminé par la fonction $f(x)$.

Ceci posé, nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème I. *Pour qu'un ensemble linéaire E soit un ensemble (A), il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que $E = H_f$.*

Dém. I. *La condition est nécessaire.*

Soit E un ensemble (A) linéaire donné.

Si l'ensemble E est vide, l'existence des fonctions continues n'ayant pas de dérivée en aucun point x démontre la proposition.

Supposons donc que l'ensemble E n'est pas vide; nous avons 2 cas à distinguer, suivant que l'ensemble E est borné ou non.

1°. *L'ensemble E est borné.*