Sämtliche Komponenten $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots, \mathfrak{A}_m$ müssen innerhalb des von C begrenzten beschränkten Bereiches liegen. Nun gilt es in $U(X)$ einen Punkt X_1 von T, welcher ausserhalb C liegt. In diesem Punkt können offenbar nur die Komponenten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zusammenstossen.

III. *Es gibt mindestens einen Punkt auf T, in welchem die Ebene in höchstens $m-1$ $(m>2)$ Teilgebiete lokal zerschnitten wird.*

Wie in II gezeigt wurde, gibt es in $U(X)$ einen Punkt X_1 auf T, in welchem höchstens $m-1$ Komponenten $\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_2^*, \ldots, \mathfrak{A}_k^*$ $(1 \leqq k \leqq m-1)$ der Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ zusammenstossen. Wir bestimmen eine hinreichend kleine Umgebung $U_1(X_1)$ innerhalb $U(X)$ mit einem Durchmesser $< \frac{d}{2}$, welche durch T in en Komponenten zerlegt wird und lediglich von den Komponenten $\mathfrak{A}_k^*$ getroffen wird. Mit $V_1(X_1)$ bezeichnen wir die Vereinigungsmenge sämtlicher Komponenten $\mathfrak{A}_k^*$ mit $U_1(X_1)$. $V_1(X_1)$ ist ein Gebiet und eine Umgebungen von X_1, welche durch T in höchstens $m-1$ Komponenten zerlegt wird. Nun gibt es nach II in $U_1(X_1)$ wiederum einen Punkt X_2 auf T, in welchem höchstens $m-1$ Komponenten der offenen Menge $(U_1(X_1) - U_1(X_1) \cdot T)$ zusammenstossen. Aehnlich wie oben können wir eine ganz in $U_1(X_1)$ liegende Umgebung $V_2(X_2)$ des Punktes X_2 mit einem Durchmesser $< \frac{d}{2^2}$ bestimmen, welche in höchstens $m-1$ Komponenten zerlegt wird u. s. f. Wir erhalten auf diese Weise eine ineinandergeschachtelte Folge

$$V_1(X_1), \quad V_2(X_2), \ldots, \quad V_n(X_n), \ldots$$

von Gebieten, deren Durchmesser mit $\frac{d}{2^2}$ gegen 0 konvergieren. Der Durchschnittspunkt X dieser Umgebungen ist ein Häufungspunkt der Punktfolge $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ auf T und muß ebenfalls auf T liegen. Da nun eine jede Umgebung $V_n(X_n)$ auch eine Umgebung von X ist und für ein noch so grosses n in höchstens $m-1$ Komponenten zerschnitten wird, so kann die Ebene in X offenbar in höchstens $m-1$ Teilgebiete lokal zerschnitten werden.

Die Behauptung III widerspricht unserer Annahme, und können wir folgern, dass $m=2$ sein muß.

Sur une famille des types de continuité qui remplit un intervalle.

Par

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

Étant donnés deux ensembles A et B situés dans des espaces topologiques quelconques nous dirons que le *type de continuité* de A dépasse celui de B, et nous ecrirons $cA > cB$ [1]), lorsque B est une image continue de A, sans que A soit une image continue de B, en d'autres termes, lorsqu'il existe une fonction f définie sur A et telle que $f(A) = B$, sans qu'il en existe une fonction continue φ telle que $\varphi(B) = A$.

Dans la note: *Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre* (ce volume p. 118—137) j'ai construit $2^{\aleph_0}$ courbes planes P_t dont les types de continuité sont *incomparables* deux à deux. Or, en utilisant les mêmes courbes auxiliaires $P^{(i)}$, qui m'ont servi pour en former les courbes P_t, je me propose de donner dans la note présente un exemple *d'une famille* $\mathfrak{F}$, (d'ailleurs plus simple) *des courbes planes dont les types de continuité, ordonnés selon la grandeur, remplissent tout un intervalle linéaire fermé* (c.-à-d. que l'ensemble de leurs types de continuité est du type de l'ordre λ) [2]). Á ce but, tout en conservant les notations de ma note précitée, (ce qui en suppose la connaissance préalable chez le lecteur) considérons les courbes $P^{(i)}$ qui y ont été définies par les formules (7)—(17) et, sans en altérer la définition, faisons par-

[1]) Cette notion a été introduite par M. Sierpiński dans la note: *Sur les images continues des ensembles des points*. Fund. Math. t. XIV, p. 235.

[2]) cf. le problème de M. Aronszajn dans son Mémoire: *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, § 12 (à paraître dans Fund. Math.).

courir à l'indice i l'intervalle fermé $1 \leqslant u \leqslant 2$ des nombres réels. En désignant par $M^{(u)}$, $J^{(u)}$, $I_k^{(u)}$, $D_k^{(u)}$ et $L_k^{(u)}$ les parties des courbes $P^{(u)}$ ainsi obtenues qui correspondent respectivement à $M^{(i)}$, J, I_k, D_k et $L_k^{(i)}$ de $P^{(i)}$, nous allons voir que le phénomème décrit p. 118 (Introduction) et p. 132 (lemme XIII) pour l'infinité dénombrable des $M^{(i)}$ se reproduit pour l'infinité indénombrable des $M^{(u)} \subset P^{(u)}$. Or, je vais démontrer une propriété même plus forte que XIII à savoir que

(a) *l'inégalité* $1 \leqslant u < v \leqslant 2$ *entraîne* $cP^{(v)} < cP^{(u)}$.

Soient, en effet, $l_k^{(u)}$ et $l_{k+1}^{(u)}$ (resp. $l_k^{(v)}$ et $l_{k+1}^{(v)}$) l'extrémité droite et gauche de l'arc $L_k^{(u)}$ (resp. de $L_k^{(v)}$) à savoir $l_k^{(u)} = l_k^{(v)} = \left(\frac{3}{2^{k+1}}, 10\right)$, d'après la définition de K_n p. 124. Comme $u < v$, il en résulte selon (14) que $\lambda(L_k^{(v)}) \leqslant \lambda(L_k^{(u)})$ pour $k = 1, 2, \dots$ Il existe donc pour tout $k = 1, 2, \dots$, un arc $\overline{l_k^{(u)} x_k} \subset L_k^{(u)}$ tel que

(b) $$\lambda(\overline{l_k^{(u)} x_k}) = \lambda(L_k^{(v)}).$$

Posons

1° pour tout point $x \in \overline{l_k^{(u)} x_k}$:

$$\varphi(x) = \textit{le point de } L_k^{(v)} \textit{ tel que } \lambda(\overline{l_k^{(u)} x}) = \lambda(\overline{l_k^{(v)} \varphi(x)}),$$

d'où en particulier, selon (b),

$$\varphi(x_k) = l_{k+1}^{(v)},$$

2° pour $x \in L_k^{(u)} - \overline{l_k^{(u)} x_k}$:

$\varphi(x) =$ *le point de* $L_k^{(v)}$ *de l'abscisse minimum qui a la même ordonée que le point* x,

3° pour $x \in P^{(u)} - \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(u)}$:

$$\varphi(x) = x.$$

Ainsi définie sur le continu $P^{(u)}$ tout entier, la fonction $\varphi(x)$ satisfait, en vertu de 1°—3°, à l'égalité

(c) $$\varphi(P^{(u)}) = P^{(v)}$$

et par définition de $L_k^{(u)}$ elle est, d'après (15)—(19), continue. On a donc selon (c)

(d) $$cP^{(v)} \leqslant cP^{(u)}.$$

Supposons maintenant qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que $P^{(u)} = f(P^{(v)})$, d'où en vertu de (17)

(e) $$J^{(u)} + M^{(u)} = f(J^{(v)}) + f(M^{(v)}).$$

Or, si on avait $J^{(u)} \subset f(M^{(v)})$, on aurait en vertu de (12)

(f) $$\sum_{k=1}^{\infty} I_k^{(u)} + H_\omega^{(u)} \subset f(M^{(v)}),$$

donc, $f(M^{(v)})$ étant d'après (13), (16) et III „arcwise connected", il viendrait d'après (f), XI et IV (en y posant $M = P^{(v)}$, $C = M^{(v)}$, $I = I_1^{(u)}$) $f(M^{(v)}) \subset I_1^{(u)}$, d'où selon (f) $I_2^{(u)} \subset I_1^{(u)}$, ce qui est impossible, I_k étant par définition (formules (7)—(11)) disjoint de I_{k+1}. L'égalité (e) entraîne donc $f(J^{(v)}) \cdot J^{(u)} \neq 0$, d'où, d'après VII et II (en y posant $M = P^{(v)}$, $C = J^{(v)}$, $I = J^{(u)}$),

(g) $$f(J^{(v)}) = J^{(u)},$$

donc, selon (e), $M^{(u)} \subset f(M^{(v)})$, et par conséquent, en vertu de VII et II (en y posant $M = P^{(v)}$, $C = M^{(v)}$, $I = M^{(u)}$),

(h) $$f(M^{(v)}) \subset M^{(u)}.$$

Il est ainsi démontré que la fonction $f(x)$ satisfait aux formules (h) et (g), c. à d. *mutatis mutandis* aux formules (50) et (57), dont j'ai démontré p. 136—137 qu'elles entraînent la discontinuite de $f(x)$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $cP^{(v)} \neq cP^{(u)}$, d'où, selon (d), $cP^{(v)} < cP^{(u)}$, c. q. f. d.

La correspondance entre les nombres du segment (1, 2) et les courbes $P^{(u)}$ de la famille $\mathfrak{F}$ étant biunivoque par définition de la famille $\mathfrak{F}$, la proposition (a) entraîne la ressemblance du type d'ordre de $\mathfrak{F}$ à celui du segment rectiligne fermé, c. à d. la propriété énoncée au debut.

Il est évident que les familles $\mathfrak{F}_n$. tout à fait analogues, peuvent être construites pour les segments $[n, n+1]$ où $n = 1, 2, \dots$, de même que la famille $\mathfrak{F}_0$ pour l'intervalle semi-ouvert (0, 1] (la définition p. 124 de $P^{(u)}$ pour $u = 0$ n'ayant pas de sens) et que le type d'ordre de la famille $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ présente encore la propriété (a).

Varsovie, Octobre 1931.