Ueber eine Umkehrung des Jordan'schen Kurvensatzes.

Von

B. Kaufmann (Heidelberg).

In der neusten Zeit hat Herr Zarankiewicz eine bemerkenswerte Umkehrung des Jordan'schen Kurvensatzes bewiesen [1]). Er zeigte, dass ein beliebiges ebenes Kontinuum, welches die Ebene in jedem seiner Punkte in *genau zwei* Teilgebiete lokal zerschneidet, eine einfache geschlossene Kurve oder eine topologische Gerade sein muß. In einer späteren Arbeit [2]) vermochte Herr Zarankiewicz durch Abschwächung der Bedingungen diesen Satz wesentlich zu verallgemeinern. Unter Voraussetzung des obigen Satzes bewies er, dass ein ebenes Kontinuum eine einfache geschlossene Kurve oder eine topologische Gerade ist, falls in jedem seiner Punkte die Ebene in eine *endliche und konstante Anzahl* von Teilgebieten zerschnitten wird. Diese Verallgemeinerung des Satzes erfordert offenbar den Nachweis, dass *ein Kontinuum dann und nur dann die Ebene in eine konstante Anzahl m von Teilgebieten in jedem seiner Punkte lokal zerschneidet, wenn* $m=2$ *ist.* Herr Zarankiewicz gewinnt diese Behauptung auf Umwege über allgemeinere Betrachtungen und durch Anwendung verschiedener Sätze, insbesondere über Baumkurven. Es erscheint uns deshalb nicht überflüssig, einen direkten, sehr einfachen Beweis dieses Satzes mitzuteilen.

[1]) C. Zarankiewicz, *Sur les coupures locales faits par les contenus*, Bull. Acad. Polon. Scienc., Cracovie 1927, S. 216.

C. Zarankiewicz, *Ueber eine Umkehrung des Jordan'schen Kurvensatzes*, Fund. Math. t. XIII (1929).

Angenommen, es existiere ein ebenes Kontinuum T, welches in jedem seiner Punkte die Ebene in genau m $(m \neq 2)$ Teilgebiete lokal zerschneidet. X sei ein beliebiger Punkt von T und $U(X)$ eine hinreichend kleine Umgebung von X mit dem Durchmesser d, welche durch T in m Komponenten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ zerlegt wird.

Wir beweisen zunächst die folgende sehr einfache Behauptung:

I. *Sämtliche Randpunkte einer jeden Komponenten* $\mathfrak{A}_k$ $(1 \leq k \leq m)$ *innerhalb* $U(X)$ *sind erreichbar.*

Y sei ein beliebiger Randpunkt von $\mathfrak{A}_k$ in $U(X)$ und $(U_n(Y))$ eine Folge ineinandergeschachtelter Kreisumgebungen von Y, deren Radien gegen 0 abnehmen. Da die Ebene in Y durch T ebensfalls in endlich viele Komponenten lokal zerschnitten wird, muß Y auf der Begrenzung einer Komponente $\mathfrak{A}'_1$ des Durchschnitts $\mathfrak{A}_k \cdot U_1(Y)$ liegen. Aus denselben Gründen muß Y auch auf der Begrenzung einer Komponente $\mathfrak{A}'_2$ des Durchschnitts $\mathfrak{A}'_1 \cdot U_2(Y)$ liegen u. s. f. Wir erhalten auf diese Weise eine ineinandergeschachtelte, gegen Y konvergierende Folge $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_n, \ldots$ von Teilgebieten der Gebietes $\mathfrak{A}_k$, welche uns die Konstruktion eines Einschnitts in $\mathfrak{A}_k$ mit dem Endpunkt Y ermöglicht.

II. *Es gibt einen Punkt* X_1 *des Kontinuums* T *innerhalb* $U(X)$, *in welchem höchstens* $m-1$ $(m \neq 2)$ *Komponenten der Folge* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ *zusammenstossen.*

Der Fall $m=1$ können wir übergehen, da es sehr leicht ersichtlich ist, dass in mindestens einem Punkt von T die Ebene in mindestens zwei Teilgebiete lokal zerschnitten wird. Mit H_m bezeichnen wir für jedes m den in $U(X)$ liegenden Teil der Berandung von $\mathfrak{A}_m$. Nehmen wir an, unsere Behauptung gilt für $m > 2$ nicht. Offenbar müsste dann

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_m$$

sein. Wegen I können wir je zwei Punkte von T innerhalb einer *jeden* Komponente $\mathfrak{A}_m$ durch einen bis auf die Endpunkte ganz in $\mathfrak{A}_m$ verlaufenden Weg verbinden. Wir verbinden auf diese Weise zwei Punkte Z_1 und Z_2 von T durch einen Weg C_1 in $\mathfrak{A}_1$ und durch einen Weg C_2 in $\mathfrak{A}_2$. Die Vereinigung C der beiden Wege ist eine einfache geschlossene Kurve, welche keinen Punkt einer Komponente $\mathfrak{A}_m$ für $m > 2$ trifft. In ihrem Innern schließt aber die Kurve gewisse Punkte von T ein, also auch Punkte aller $\mathfrak{A}_m$.

Sämtliche Komponenten $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \dots, \mathfrak{A}_m$ müssen innerhalb des von C begrenzten beschränkten Bereiches liegen. Nun gilt es in $U(X)$ einen Punkt X_1 von T, welcher ausserhalb C liegt. In diesem Punkt können offenbar nur die Komponenten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zusammenstossen.

III. *Es gibt mindestens einen Punkt auf T, in welchem die Ebene in höchstens $m-1$ $(m > 2)$ Teilgebiete lokal zerschnitten wird.*

Wie in II gezeigt wurde, gibt es in $U(X)$ einen Punkt X_1 auf T, in welchem höchstens $m-1$ Komponenten $\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_2^*, \dots, \mathfrak{A}_k^*$ $(1 \leqq k \leqq m-1)$ der Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k$ zusammenstossen. Wir bestimmen eine hinreichend kleine Umgebung $U_1(X_1)$ innerhalb $U(X)$ mit einem Durchmesser $< \frac{d}{2}$, welche durch T in en Komponenten zerlegt wird und lediglich von den Komponenten $\mathfrak{A}_k^*$ getroffen wird. Mit $V_1(X_1)$ bezeichnen wir die Vereinigungsmenge sämtlicher Komponenten $\mathfrak{A}_k^*$ mit $U_1(X_1)$. $V_1(X_1)$ ist ein Gebiet und eine Umgebungen von X_1, welche durch T in höchstens $m-1$ Komponenten zerlegt wird. Nun gibt es nach II in $U_1(X_1)$ wiederum einen Punkt X_2 auf T, in welchem höchstens $m-1$ Komponenten der offenen Menge $(U_1(X_1) - U_1(X_1) \cdot T)$ zusammenstossen. Aehnlich wie oben können wir eine ganz in $U_1(X_1)$ liegende Umgebung $V_2(X_2)$ des Punktes X_2 mit einem Durchmesser $< \frac{d}{2^2}$ bestimmen, welche in höchstens $m-1$ Komponenten zerlegt wird u. s. f. Wir erhalten auf diese Weise eine ineinandergeschachtelte Folge

$$V_1(X_1), \quad V_2(X_2), \dots, \quad V_n(X_n), \dots$$

von Gebieten, deren Durchmesser mit $\frac{d}{2^2}$ gegen 0 konvergieren. Der Durchschnittspunkt X dieser Umgebungen ist ein Häufungspunkt der Punktfolge $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ auf T und muß ebenfalls auf T liegen. Da nun eine jede Umgebung $V_n(X_n)$ auch eine Umgebung von X ist und für ein noch so grosses n in höchstens $m-1$ Komponenten zerschnitten wird, so kann die Ebene in X offenbar in höchstens $m-1$ Teilgebiete lokal zerschnitten werden.

Die Behauptung III widerspricht unserer Annahme, und können wir folgern, dass $m = 2$ sein muß.

Sur une famille des types de continuité qui remplit un intervalle.

Par

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

Étant donnés deux ensembles A et B situés dans des espaces topologiques quelconques nous dirons que le *type de continuité* de A dépasse celui de B, et nous ecrirons $cA > cB$ [1]), lorsque B est une image continue de A, sans que A soit une image continue de B, en d'autres termes, lorsqu'il existe une fonction f définie sur A et telle que $f(A) = B$, sans qu'il en existe une fonction continue φ telle que $\varphi(B) = A$.

Dans la note: *Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre* (ce volume p. 118—137) j'ai construit $2^{\aleph_0}$ courbes planes P_t dont les types de continuité sont *incomparables* deux à deux. Or, en utilisant les mêmes courbes auxiliaires $P^{(i)}$, qui m'ont servi pour en former les courbes P_t, je me propose de donner dans la note présente un exemple *d'une famille* $\mathfrak{F}$, (d'ailleurs plus simple) *des courbes planes dont les types de continuité, ordonnés selon la grandeur, remplissent tout un intervalle linéaire fermé* (c.-à-d. que l'ensemble de leurs types de continuité est du type de l'ordre λ) [2]). À ce but, tout en conservant les notations de ma note précitée, (ce qui en suppose la connaissance préalable chez le lecteur) considérons les courbes $P^{(i)}$ qui y ont été définies par les formules (7)—(17) et, sans en altérer la définition, faisons par-

[1]) Cette notion a été introduite par M. Sierpiński dans la note: *Sur les images continues des ensembles des points.* Fund. Math. t. XIV, p. 235.

[2]) cf. le problème de M. Aronszajn dans son Mémoire: *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, § 12 (à paraître dans Fund. Math.).