Ueber die allseitige und nicht allseitige Erreichbarkeit bei geschlossenen Kurven.

Von

B. Kaufmann (Heidelberg).

In der vorliegenden Note beschäftigen wir uns mit geschlossenen Kurven allgemeinster Art (in Schönflies'schem Sinne), welche die Ebene in zwei Bereiche zerlegen und ihre gemeinsame Begrenzung bilden. Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf das in der Definition festgelegte Hauptmerkmal einer solchen Kurve und fragen deshalb nach ihrer Eigenschaften in bezug auf *beide* von ihr begrenzten Bereiche. Solche Eigenschaften der Kurve finden ihren Ausdruck insbesondere in der Verteilung der *allseitig* und *nicht allseitig erreichbaren* Stellen, worüber bei allgemeinen, nicht einfachen Kurven sehr wenig bekannt ist [1]*). Die erste Aussage in dieser Richtung ergibt sich direkt aus der Schönflies'schen Umkehrung des Jordan'schen Satzes: auf einer nicht einfachen geschlossenen Kurve gibt es nicht allseitig erreichbare Stellen für *jeden der beiden* Bereiche. Weiterhin können wir unmittelbar die folgende wichtige Feststellung machen. Eine nicht einfache geschlossene Kurve S kann nämlich stückweise den Verlauf einer einfachen Kurve haben. In einem solchen Fall sprechen wir von einem *freien* Jordanbogen der Kurve. Darunter verstehen wir einen Teibogen

[1]) Dieser Frage begegneten wir in einem ganz anderen Zusammenhang bei der Betrachtung der Verteilung der Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf geschlossenen Kurven (vrgl. den die geschlossenen Kurven betreffenden Teil der Arbeit des Verfassers *„Über Stützstreckenverteilung und Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ohne geradl. Begrenzungsstücke"*, welche demnächst im Crelle'schen Journal f. r. u. angw. Mathematik erscheint. Von den vorliegenden Betrachtungen wurde dort teilweise Gebrauch gemacht).

*) [Zusatz bei der Korrektur]. Die unter [1]) zitierte Arbeit ist inzwischen im Band 166, Heft 3 (S. 151—166) des Crelle'schen Journals erschienen.

C' eines Jordanbogens C auf S mit der Eigenschaft, dass sämtliche Kurvenpunkte in einer hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes von C' auf C liegen. Offenbar gibt es aber auch solche Kurvenpunkte, welche nicht auf einem freien Jordanbogen liegen. Eine nähere Kennzeichnung der Kurve in der Umgebung dieser Punkte zweiter Art, wie auch ihrer freiliegenden einfachen Bögen, erfordert eine Untersuchung im kleinen. Dieser Untersuchung legen wir einige Hilfsbetrachtungen über die lokale Zerschneidung des *einen* Gebietes durch die Kurve zugrunde. Wir gelangen dann zu dem folgenden Ergebnis.

Ein Kurvenpunkt liegt dann und nur dann auf einem freien Jordanbogen der geschlossenen Kurve, wenn in seiner (hinreichend kleinen) Umgebung nur allseitig erreichbare Punkte enthalten sind.

Ein Kurvenpunkt, welcher nicht auf einem freien Jordanbogen liegt, ist ein Häufungspunkt nicht allseitig erreichbarer Stellen beider Bereiche. Insbesondere gibt es in einer jeden Umgebung eines solchen Punktes Teilkontinua von Kurvenpunkten, welche gleichzeitig für beide Bereiche nicht allseitig erreichbar sind.

Wir schicken zunächst einige Hilfsbetrachtungen voraus.

(a) *Es sei $U(X)$ eine Umgebung des Punktes X auf S. $\mathfrak{B}$ sei der eine von S begrentzte Bereich. Wir behaupten, X kann nicht gleichzeitig erreichbarer Randpunkt zweier verschiedener Komponenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ des Durchschnitts $U(X)\cdot\mathfrak{B}$ sein.*

Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir einen Weg in $\mathfrak{A}$ mit dem Endpunkt X und einen Weg in $\mathfrak{A}'$ mit demselben Endpunkt zu einer in $\mathfrak{B}$ (bis auf X) geschlossenen einfachen Kurve C ergänzen. Die Kurve C wäre ein Rückkehrschnitt des Bereiches $\mathfrak{B}$ und müsste offenbar gewisse Punkte von S, nämlich solche, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ innerhalb $U(X)$ trennen, in ihrem Innern einschließen. Es müssten dann offenbar auch gewisse Punkte des zu $\mathfrak{B}$ komplementären Bereiches in dem von C begrenzten beschränkten Bereich mit eingeschlossen sein, was offenbar unmöglich ist.

(b) *Ist X für ein von S begrenztes Gebiet $\mathfrak{B}$ ein nicht allseitig erreichbarer Kurvenpunkt, so gibt es eine hinreichend kleine Kreisumgebung $U(X)$ von X mit der Eigenschaft, dass unendlich viele Komponenten des Durchschnitts $U(X)\cdot\mathfrak{B}$ gegen ein X enthaltendes Grenzkontinuum konvergieren.*

Der Kurvenpunkt X ist für ein Teilgebiet $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ nicht erreichbar. Offenbar genügt es unseren Satz für $\mathfrak{B}'$ zu beweisen. Wir betrachten eine Folge ineinandergeschachtelter Umgebungen $U_n(X)$ von X, welche sich auf X zusammenziehen. Wir nehmen an, unsere Behauptung gälte nicht. $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Komponente des Durchschnittes $U_n(X) \cdot \mathfrak{B}'$ (n-beliebig). Dann gibt es ein erstes μ so, dann den Durchschnitt $U_{n+\mu}(X) \cdot \mathfrak{A}$ höchstens endlich viele Komponenten von $U_n(X) \cdot \mathfrak{A}$ trifft. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn wir $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}'$ ersetzen. Daraus ergibt sich, dass X auf der Begrenzung einer Komponente $\mathfrak{A}_1$ des Durchschnittes $U_1(X) \cdot \mathfrak{B}'$ liegen muß. Aus denselben Gründen muß X auch auf der Begrenzung einer Komponente $\mathfrak{A}_2$ des Durchnittes $U_2(X) \cdot \mathfrak{A}_1$ liegen u. s. f. Allgemein, liegt X auf der Begrenzung einer Komponente $\mathfrak{A}_n$ des Durchschnittes $U_n(X) \cdot \mathfrak{A}_{n-1}$. Wir erhalten eine ineinandergeschachtelte Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ von Teilgebieten des Gebietes $\mathfrak{B}'$, welche gegen X konvergiert. Eine solche Gebietsfolge ermöglicht die Konstruktion eines gegen X konvergierenden Einschnittes des Gebietes $\mathfrak{B}$, was offenbar unserer Annahme widerspricht.

Den weiteren Hilfssatz beweisen wir unter Zuhilfsnahme bekanter Sätze aus der Theorie der Randelemente [1]).

(c) *Es sei $U(X)$ eine hinreichend kleine von einem Kreis K begrenzte Umgebung eines Kurvenpunktes X, in welcher die Kurve S nicht ganz enthalten ist. $\mathfrak{B}$ sei eines der beiden von S begrenzten Bereiche $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}^{**}$. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ sei eine Folge paarweise verschiedener Komponenten des Durchschnittes $U(X) \cdot \mathfrak{B}$, welche gegen eine kontinuierliche Grenzmenge L konvergiert. Wir behaupten, L enthält ein Teilkontinuum nicht allseitig erreichbarer Grenzpunkte von $\mathfrak{B}$.*

Wir bemerken zunächst, dass die Beziehung $L \cdot K \cdot \mathfrak{B} = 0$ gelten muß. Es gibt deshalb jedenfalls eine Stelle $Y \subset L$, welche kein Häufungspunkt des Durchschnittes $K \cdot \mathfrak{B}$ ist. Eine hinreichend kleine Umgebung $U(Y)$ von Y enthält keine Punkte von $K \cdot \mathfrak{B}$. Andererseits ist Y ein Grenzpunkt einer gewissen Teilfolge der Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ Auf Grund der bekannten Sätze aus der Theorie der Randelemente (Primenden) können wir ohne Schwierigkeiten schließen, daß ein Y enthaltendes Grenzkontinuum L^* einer Teilfolge von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$

[1]) Ohne Zuhilfenahme der Randelemente wäre der Beweis dieses Hilfssatzes wesentlich umständlicher.

in einem Randelement des Bereiches $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Das betreffende Randelement könnte höchstens drei allseitig erreichbare Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ enthalten [1]). Offenbar enthält L^* ein Teilkontinuum nicht allseitig erreichbarer Punkte von $\mathfrak{B}$.

Unter Anwendung der Behauptungen (b) und (c) beweisen wir jetzt den folgengen Hilfsatz:

(d) *$\overline{U}(X)$ sei eine von einem Kreis K begrenzte, abgeschlossene Umgebung eines Kurvenpunktes X, in welcher keine nicht allseitig erreichbaren Punkte S in bezug auf das eine von S begrenzte Gebiet $\mathfrak{B}$ enthalten sind. $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Komponente des Durchschnittes $U(X) \cdot \mathfrak{B}$. Wir behaupten, die Berandung H von $\mathfrak{A}$ ist eine Jordankurve.*

Angenommen, es gäbe einen nicht allseitig erreichbaren Grenzpunkt X von $\mathfrak{A}$. Nach (b) enthält der Durchschnitt einer hinreichend kleinen Umgebung $U(X)$ mit $\mathfrak{A}$ unendlich viele Komponenten, welche gegen ein Kontinuum L auf $H \cdot S$ konvergieren. Nach (c) gibt es auf L nicht allseitig erreichbare Stellen in bezug auf $\mathfrak{A}$, welche keine Grenzpunkte von $H \cdot K$ sind. Wenden wir jetzt zum zweiten

[1]) Vrgl. M. Torhorst, Math. Zeitschrift 9 (1921), S. 61—62. In diesem Zusammenhang sei auf eine interessante Folgerung aus dem Hilfsatz (a) hingewiesen. Für den Fall geschlossener Kurven lässt sich mit Hilfe dieses Satzes eines der Hauptergebnisse der Untersuchung vom Frl. Torhorst, wonach ein Randelement höchstent drei allseitig erreichbare Punkte enthalten kann, wesentlich verschärfen. *Ein Randelement einer geschlossenen Kurve kann höchstens einen allseitig erreichbaren Punkt enthalten, wobei dieser mit dem im primendentheoretischen Sinne erreichbaren Punkt des Randelements identisch sein muß. Die Randelemente erster und zweiter Art enthalten höchstens einen allseitig erreichbaren Punkt, während ein Randelement dritter und vierter Art keiner dieser Punkte enthalten kann.* Der Beweis dieses Satzes ist höchst einfach.

Nehmen wir an, er gäbe einen von dem (im primendentheoretischen Sinne) erreichbaren Punkt verschiedenen allseitig erreichbaren Punkt P eines Randelements E_g von $\mathfrak{B}$. $q_1, q_2, \ldots$ bzw. $g_1, g_2, \ldots$ seien die E_g bestimmenden Querschnitt- bzw. Gebietsketten. Die Querschnittkette können wir offenbar so wählen, dass sie gegen einen von P verschiedenen Punkt konvergiert. Eine hinreichend kleine Umgebung $U(P)$ von P wird von höchstens endlich vielen Querschnitten der Kette getroffen. Wäre P ein allseitig erreichbarer Punkt, so müsste er für jedes Gebiet g_n der Kette erreichbar sein. Nun gibt es nach (a) eine einzige Komponente $\mathfrak{A}$ des Durchschnittes $U(P) \cdot \mathfrak{B}$, für welche P erreichbar ist. In der Nähe des Randes müssen sämtliche gegen P konvergierenden Einschnitte in $\mathfrak{A}$ verlaufen. Das Gebiet $\mathfrak{A}$ müsste in fast jedem Gebiet g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ enthalten sein, was offenbar unmöglich ist

Male die Hilfssätze (b) und (c) in bezug auf eine solche Stelle an, so können wir in einer hinreichend kleinen Umgebung dieser letzteren ein Teilkontinuum von S bestimmen, welches aus nicht allseitig erreichbaren Stellen des Bereiches $\mathfrak{B}$ besteht. Dies ist aber nach Voraussetzung unmöglich. Sämtliche Punkte von H müssen für $\mathfrak{A}$ allseitig erreichbar sein.

Wir wollen uns jetzt noch überzeugen, dass H eine geschlossene Kurve ist. Nach der Schönflies'schen Umkehrung des Jordan'schen Satzes wäre dann unsere Behauptung bewiesen. Die Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\overline{\mathfrak{A}})$ der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{A}$, ist eine offene Menge, welche insbesondere das zweite von S begrenzte Gebiet $\mathfrak{B}'$ enthält. Mit $M_a(K)$ bzw. $M_i(K)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Komponenten des Durchschnitts $\mathfrak{K}(\overline{\mathfrak{A}})\cdot\mathfrak{B}$, welche ausserhalb bzw. innerhalb K liegen. Sämtliche Komponenten der Gesamtheit $M_a(K)$ besitzen gemeinsame Grenzpunkte mit $\mathfrak{B}'$, welche zu H fremd sind. Das Gebiet $\mathfrak{B}'$ und alle Komponenten von $M_a(K)$ müssen in einem und demselben Gebiet $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{K}(\overline{\mathfrak{A}})$ enthalten sein. Die Komponenten von $M_i(K)$ haben ausserhalb H gemeinsame Grenzpunkte mit den Komponenten von $M_a(K)$ und sind deshalb ebenfalls in $\mathfrak{A}'$ enthalten. Wir können leicht folgern, dass $\mathfrak{K}(\overline{\mathfrak{A}})\equiv\mathfrak{A}'$ sein muß. Ein jeder Punkt von H ist ein Grenzpunkt von $\mathfrak{A}'$, während offenbar auch umgekehrt die Begrenzung von $\mathfrak{A}'$ in H enthalten sein muß. H bildet also die gemeinsame Begrenzung der beiden Bereiche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$.

Satz I. *Ein in bezug auf beide von der geschlossenen Kurve S begrenzten Bereiche $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}^{**}$ allseitig erreichbarer Punkt X, welcher auch kein Häufungspunkt nicht allseitig erreichbarer Punkte der beiden Bereiche ist, liegt auf einem freien einfachen Bogen der Kurve.*

Es sei $U(X)$ eine hinreichend kleine Kreisumgebung von X mit dem Radius r, in welcher keine nicht allseitig erreichbaren Kurvenpunkte in bezug $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}^{**}$ liegen, und $U'(X)$ eine Kreisumgebung von X mit dem Radius $\frac{r}{2}$. Nach dem Hilfssatz (c) muß X ein Randpunkt einer Komponente $\mathfrak{A}$ des Durchschnitts $U'(X)\cdot\mathfrak{B}^*$ sein. Die Begrenzung H von $\mathfrak{A}$ muß nach dem Hilfssatz (d) eine einfache Kurve sein. Die Komponente des Durchschnitts $H\cdot U'(X)$, welche X enthält, ist ein auf S liegender Jordanbogen C_{X_1,X_2} mit den Endpunkten X_1 und X_2. Die beiden Punkte X_1 und X_2 verbinden wir durch je einen ganz in $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}^{**}$ verlaufenden einfachen Bogen $C^*_{X_1,X_2}$ bzw. $C^{**}_{X_1,X_2}$. Das von der einfachen Kurve $(C_{X_1,X_2}+C^*_{X_1,X_2})$ begrenzte beschränkte Gebiet ist ein Teilgebiet von $\mathfrak{B}^*$, während das von der Kurve $(C_{X_1,X_2}+C^{**}_{X_1,X_2})$ begrenzte beschränkte Gebiet ein Teilgebiet von $\mathfrak{B}^{**}$ sein muß. In dem von der Jordankurve $(C^*_{X_1,X_2}+C^{**}_{X_1,X_2})$ begrenzten Gebiet sind nur solche Punkte von S enthalten, welche gleichzeitig auf dem Kurvenbogen C_{X_1,X_2} liegen. Dieser letztere muß also ein freier Bogen der Kurve sein.

Aus dem Satz I ergibt sich sofort, dass ein nicht auf einem freien einfachen Kurvenbogen liegender Punkt X ein Häufungspunkt nicht allseitig erreichbarer Punkte mindestens eines Berieches, z. B. $\mathfrak{B}^*$ sein muß. Wir können uns jetzt leicht überzeugen, dass X auch *ein Häufungspunkt nicht allseitig erreichbarer Stellen des zweiten Bereiches $\mathfrak{B}^{**}$ sein muß.* (Diese Behauptung kann auch unmittelbar aus dem schärferen Satz II gefolgert werden). Nehmen wir an, unsere Behauptung gälte nicht. Danach gilt es eine hinreichend kleine Kreisumgebung $U(X)$ mit dem Radius r welche S nicht ganz enthält und in welcher keine nicht allseitig erreichbaren Punkte von $\mathfrak{B}^{**}$ liegen. $U'(X)$ sei eine Kreisumgebung von X mit dem Radius $\frac{r}{2}$. Die Umgebung $U'(X)$ enthält nach dem Hilfssatz (c) Punkte lediglich endlich vieler Komponenten des Durchschnittes $U(X)\cdot\mathfrak{B}^{**}$. Nach (d) sind die Begrenzungen aller dieser Komponenten einfache Kurven. Auf der Begrenzung einer diesen Komponenten, welche wir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, liegt die Stelle X. Unter Zuhilfenahme von (a) können wir folgern, dass eine hinreichend kleine Umgebung $U''(X)$ von X existiert, welche die Bedingung $U''(X)\cdot\mathfrak{B}^{**}=U''(X)\cdot\mathfrak{A}$ genügt. Der Durchschnitt $U''(X)\cdot S$ muß auf der Begrenzung von $\mathfrak{A}$, also auf einer einfachen Kurve liegen. Entgegen unserer Annahme wäre X ein Punkt auf einem freien einfachen Bogen der Kurve S.

Unter nochmaliger Verwendung der Randelemente beweisen wir jetzt einen wesentlich schärferen

Satz II. *In einer noch so kleinen Umgebung eines nicht auf einem freien Jordanbogen der Kurve S liegenden Punktes X gibt es Kontinua von Kurvenpunkten, welche gleichzeitig für beide von S begrenzten Bereiche $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}^{**}$ nicht allseitig erreichbar sind.*

Offenbar gibt es (vrgl. Satz I) in einer Umgebung $U(X)$ von X einen nicht allseitig erreichbaren Punkt Y eines der beiden Bereiche, z. B. von $\mathfrak{B}^*$. Aus (b) und (c) ergibt sich die Existenz eines Teilkontinuums L nicht allseitig erreichbarer Punkte von $\mathfrak{B}^*$ innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung $U(Y) \subset U(X)$ von Y. Angenommen, es gäbe kein Teilkontinuum von L nicht allseitig erreichbarer Punkte von $\mathfrak{B}^{**}$. Es müssten dann jedenfalls zwei verschiedene allseitig erreichbare Punkte Y' und Y'' von $\mathfrak{B}^{**}$ auf L liegen. Diese beiden Punkte verbinden wir durch einen (bis auf die Endpunkte) ganz in $\mathfrak{B}^{**}$ verlaufenden Weg C. Der Weg C zerlegt $\mathfrak{B}^{**}$ in zwei Teilbereiche $\mathfrak{B}_1^{**}$ und $\mathfrak{B}_2^{**}$, von welchen der erste beschränkt sein möge. Die Komplementärmenge $\mathfrak{K}(L)$ ist ein Gebiet, welches durch C ebensfalls in zwei Teilbereiche $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zerlegt wird, wobei wir mit $\mathfrak{A}_1$ den beschränkten Teilbereich bezeichnen. $\mathfrak{A}_2$ enthält insbesondere die beiden Bereiche $\mathfrak{B}_2^{**}$ und $\mathfrak{B}^*$. Danach gilt die Beziehung $S \cdot \mathfrak{A}_1 = 0$. Anderenfalls wäre $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}^* \neq 0$, was offenbar unmöglich ist. Es muß also $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1^{**}$ sein. Jetzt können wir folgern dass die Begrenzung von $\mathfrak{A}_1$ keine nicht allseitig erreichbaren Punkte in bezug auf $\mathfrak{A}_1$ enthält. Anderenfalls gäbe es nach (b) und (c) auch ein Teilkontinuum von nicht allseitig erreichbaren Punkten von $\mathfrak{B}^{**}$ auf L (vrgl. die entspr. Betrachtung in (d)). Dies würde unserer Annahme widersprechen. Nun ist es (ähnlich wie in (d)) leicht einzusehen, dass die Begrenzung von $\mathfrak{A}_1$ eine einfache Kurve sein muß. Ein Teilbogen L^* dieser Kurve besteht aus nicht allseitig erreichbaren Punkten des Bereiches $\mathfrak{B}^*$. Ein jeder dieser Punkte muß ein Häufungspunkt der ausserhalb des abgeschlossenen Bereiches $\overline{\mathfrak{A}}_1$ liegenden Punkte von S sein. Ein jeder dieser Punkte muß also auch ein Häufungspunkt der ausserhalb $\mathfrak{A}_1$ liegenden Punktfolgen von $\mathfrak{B}^*$ sein.

$A_1, A_2, \dots$ sei eine solche Punktfolge mit dem Häufungspunkt Z, welcher von den Endpunkten von L^* verschieden sein möge. Eine Teilfolge $A_1', A_2, \dots$ dieser Punktfolge konvergiert gegen ein Randelement E_g des Bereiches $\mathfrak{B}^{**}$. Der Querschnitt C in $\mathfrak{B}^{**}$ trennt das Gebiet $\mathfrak{A}_1$ von der Punktfolge $A_1', A_2, \dots$ Daraus ergibt sich, dass keine Punktfolge von $\mathfrak{A}_1$ innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung $U(Z)$ gegen E_g konvergiert. Es muß also ein erstes Gebiet g der E_g bestimmenden Gebietskette geben, welches keine Punkte des Durchschnitts $U(Z) \cdot \mathfrak{A}_1$ enthält. Für das Gebiet g muß Z ein nicht erreichbarer Punkt sein. Z wäre anderenfalls ein

erreichbarer Punkt je einer Komponente der Durchschnitte $U(Z) \cdot \mathfrak{A}_1$ und $U(Z) \cdot g$. Dies würde der Behauptung (a) widersprechen. Damit ist die Annahme, L enthielte kein Teilkontinuum nicht allseitig erreichbarer Punkte von $\mathfrak{B}^{**}$, widerlegt.

Aus dem Beweisverlauf des obigen Satzes gewinnen wir unmittelbar das folgende

Korollar. *Ein jedes Kontinuum L nicht allseitig erreichbarer Punkte des e i n e n von der geschlossenen Kurve S begrenzten Bereiches enthält auch ein Teilkontinuum nicht allseitig erreichbarer Punkte des z w e i t e n von S begrenzten Bereiches.*