et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments $f(p_\xi)$ pour $\xi < \alpha$.

Nous définirons $f(p_\alpha)$ comme le premier terme de la suite (3) qui, pour tout indice $\xi < \alpha$, a les mêmes relations d'ordre dans U par rapport à $f(p_\xi)$ que p_α a par rapport à p_ξ. Des lemmes I et II résulte tout de suite qu'un tel élément $f(p_\alpha)$ existe toujours dans la suite (3). On voit sans peine que le sous-ensemble de U formé de tous les éléments $f(p_\xi)$, où $\xi < \Omega$, est semblable à l'ensemble ordonné (2).

Notre théorème est ainsi démontré.

Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je démontre dans cette note le théorème suivant: *P étant un ensemble parfait n-dimensionnel situé dans un espace compact A, il existe une fonction qui transforme de façon continue l'ensemble parfait non-dense de Cantor en A de sorte que chaque point de P est d'ordre $n+1$ au plus* (c. à d. qu'il est image de $\leqslant n+1$ points de l'ensemble de Cantor).

La démonstration repose sur l'application de l'espace fonctionnel Φ composé de toutes les fonctions continues qui transforment l'ensemble de Cantor en l'espace A (entier) [2]). Je prouve notamment que les fonctions qui ne satisfont pas à la condition du théorème constituent dans Φ un ensemble de I-re catégorie; cet ensemble ne peut donc être identique à Φ (en vertu du théorème de Baire); d'où la conclusion demandée.

Le théorème se généralise facilement au cas, où à la place de P on considère une suite infinie d'ensembles parfaits $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ de dimensions $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ La fonction peut alors être supposée d'ordre $\leqslant n_k + 1$ en chaque point de P_k.

Je vais indiquer, en outre, plusieurs simplifications de la Théorie de la dimension des espaces compacts, liées aux raisonnements exposés ici.

[1]) Communication présentée à la Soc. Pol. de Math. à Lwów, le 23. I. 1932.

[2]) L'idée d'appliquer l'espace fonctionnel à la Théorie de la dimension est due à M. Hurewicz. Voir Proc. Akad. Amsterdam 34 (1931), p. 399 et Akad. Wien 1931 (7 Mai).

1. Préliminaires. Tout ensemble P fermé, n-dimensionnel, situé dans l'espace compact A satisfait à la condition $\mathcal{C}_n$ suivante [1]): à chaque $\varepsilon > 0$ et chaque décomposition de A en ensembles fermés non-vides:

$$A = F_1 + \ldots + F_m \tag{1}$$

correspond une décomposition en ensembles fermés:

$$A = F_1^* + \ldots + F_m^* \tag{2}$$

telle que 1⁰: pour chaque système de $n+2$ indices différents ($\leqslant m$), on a

$$P \cdot F_{j_1}^* \cdot F_{j_2}^* \cdot \ldots \cdot F_{j_{n+2}}^* = 0. \tag{3}$$

2⁰: F_i^* est situé dans l'entourage de F_i de rayon ε, c. à d. dans l'ensemble $E_\varepsilon(F_i)$ composé des points à distance de F_i inférieure à ε.

Je vais prouver que, si P est un ensemble *parfait*, les ensembles F_i^* peuvent être supposés *non-vides*.

On peut évidemment supposer que les ensembles F_i sont numérotés de façon que jusqu'à un certain indice r on a $P \cdot F_i \neq 0$ $(i \leqslant r)$, tandis que, pour $i > r$: $P \cdot F_i = 0$. Soit $p_1, \ldots, p_r$ un système de points (différents ou non) tel que $p_i \in P \cdot F_i$. L'ensemble P étant parfait, il contient un système $q_1, \ldots, q_r$ de points *différents* tels que $|q_i - p_i| < \varepsilon/4$ [2]).

L'ensemble $F = F_1 + \ldots + F_r$ étant compact, on peut le décomposer en ensembles fermés aussi petits que l'on veut: $F = H_1 + \ldots + H_s$, $\delta(H_t) < \varepsilon/4$, aucun H_t ne contient deux points différents $q_i \neq q_j$ $(1 \leqslant t \leqslant s)$. Soit D_i la somme des ensembles H_t qui contiennent le point q_i ainsi que des ensembles H_t qui ne contiennent aucun point $q_1, \ldots, q_r$ mais qui contiennent des points de F_i. Il vient:

$$F = D_1 + \ldots + D_r, \quad D_i \subset E_{\varepsilon/2}(F_i), \quad q_i \in D_i - \sum_{j \neq i} D_j.$$

Soit ε_1 un nombre inférieur à $\varepsilon/2$ ainsi qu'à la distance de q à $\sum_{j \neq i} D_j$ $(i = 1, \ldots, r)$. Appliquons la condition $\mathcal{C}_n$ à la décomposition

[1]) Voir: K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928, p. 160 („der letzte Teil des Zerlegungssatzes", Hilfssatz 1').

[2]) $|x - y|$ désigne la distance des points x et y.

$F = D_1 + \ldots + D_r$, en considérant F comme espace. Il en ressort:

$$F = F_1^* + \ldots + F_r^*, \quad P \cdot F_{j_1}^* \cdot F_{j_2}^* \cdot \ldots \cdot F_{j_{n+2}}^* = 0, \quad F_i^* \subset E_{\varepsilon_1}(D_i)$$

et comme $E_{\varepsilon_1}(D_i) \subset E_{\varepsilon/2}(D_i) \subset E_\varepsilon(F_i)$, on a $F_i^* \subset E_\varepsilon(F_i)$.

Enfin $F_i^* \neq 0$, car $q_i \in F - \sum_{j \neq i} E_{\varepsilon_1}(D_j) \subset F - \sum_{j \neq i} F_j^* \subset F_i^*$.

Par conséquent, la décomposition

$$A = F_1^* + \ldots + F_r^* + F_{r+1} + \ldots + F_m$$

est la décomposition demandée.

2. Démonstration du théorème. Soit, comme auparavant, P un ensemble parfait n-dimensionnel situé dans l'espace compact A. Soit C l'ensemble non-dense parfait de Cantor. La famille Φ de toutes les fonctions continues ayant C pour ensemble des arguments et A pour ensemble des valeurs [1]) devient un espace métrique complet, lorsqu'on définit la distance entre deux fonctions f_1 et f_2 comme égale à la borne supérieure des distances $|f_1(x) - f_2(x)|$, $x \in C$.

Soit Ψ l'ensemble des fonctions qui appartiennent à Φ et qui admettent sur P un point d'ordre $n+2$ au moins. Il s'agit de prouver que l'ensemble Ψ est de I-re catégorie (somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non-denses) dans Φ.

Evidemment, si $f \in \Psi$, il existe un entier positif k et un système de points $x_1, \ldots, x_{n+2}$ tels que

$$f(x_1) = \ldots = f(x_{n+2}) \in P \quad \text{et} \quad |x_i - x_j| \geqslant \frac{1}{k} \quad \text{quels que soient } i \neq j. \tag{4}$$

Autrement dit, Ψ_k désignant l'ensemble des fonctions f pour lesquelles existe un système de points assujetti à la condition (4), on a

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k.$$

Notre théorème sera donc démontré dès que nous allons prouver que Ψ_k est non-dense. Or, on voit aussitôt que la limite d'une suite de fonctions uniformément convergentes extraites de Ψ_k appartient toujours à Ψ_k. Autrement dit, l'ensemble Ψ_k est *fermé*. Pour prouver

[1]) La famille Φ n'est pas vide. Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 197 (V).

qu'il est non-dense, il suffit donc de démontrer qu'il ne contient aucun point intérieur; c. à d. que pour chaque fonction f et chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f^* telle que

(5) $$f^* \in \Phi - \Psi_k \quad \text{et} \quad |f - f^*| \leqslant 2\varepsilon.$$

La fonction f étant uniformément continue sur C, on peut décomposer C en portions disjointes fermées: $C = C_1 + \ldots + C_m$ de sorte que $\delta(f(C_i)) < \varepsilon$ et $\delta(C_i) < \frac{1}{k}$. Posons $F_i = f(C_i)$.

La condition $\mathfrak{C}_n$ du N 1 étant réalisée, considérons les ensembles F_i^*, que nous pouvons supposer non-vides. L'ensemble F_i^* peut être obtenu de l'ensemble parfait non-dense C_i par une transformation continue. Les ensembles C_i étant fermés et disjoints, cela implique l'existence d'une fonction f^* continue, définie sur l'ensemble C entier et telle que $f^*(C_i) = F_i^*$.

Je dis que la fonction f^* est la fonction demandée.

En effet, d'après (2), on a $f^*(C) = A$. Donc $f^* \in \Phi$.

Supposons, par impossible, que $f^* \in \Psi_k$. Il existe alors un système de points $x_1 \ldots, x_{n+2}$ assujetti aux conditions (4) (où l'on remplace f par f^*). Comme $\delta(C_i) < \frac{1}{k}$, on en conclut qu'aucun C_i ne peut contenir deux points différents du système considéré. Autrement dit, il existe un système d'indices différents $j_1, \ldots, j_{n+2}$ tel que $x_i \in C_{j_i}$. Par conséquent $f^*(x_i) \in F_{j_i}^*$ et en vertu de (4), le point $f^*(x_1)$ appartient à chaque $F_{j_i}^*$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n+2$), ainsi qu'à P. Mais cela contredit l'égalité (3).

Cette contradiction prouve que $f^* \in \Phi - \Psi_k$.

On a enfin $|f - f^*| \leqslant 2\varepsilon$. Car posons $x \in C_i$. Donc $f(x) \in F_i$ et $f^*(x) \in F_i^*$. Comme $\delta(F_i) < \varepsilon$ et $F_i^* \subset E_\varepsilon(F_i)$, il vient $|f(x) - f^*(x)| < 2\varepsilon$.

La proposition (5) et, par conséquent, le théorème se trouvent ainsi démontrés.

Théorème généralisé. *Etant donnée dans un espace compact A une suite d'ensembles parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de dimensions $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, il existe une fonction continue qui transforme l'ensemble C de Cantor en l'espace A de façon que chaque point de P_k est d'ordre $n_k + 1$ au plus.*

Plus précisément: *l'ensemble des fonctions qui ne satisfont pas à la condition énoncée est de I-re catégorie dans Φ.*

Cet ensemble est, en effet, égal à $\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$, où Γ_k désigne l'ensemble des fonctions qui admettent des points d'ordre $n_k + 2$ (au moins) sur P_k. Or, d'après le théorème précédent, l'ensemble Γ_k est de I-re catégorie. Il en est donc de même de l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$, c. q. f. d.

On en conclut aussi que *chaque fonction f est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions satisfaisant à notre théorème.*

3. Pour passer, à présent, au cas où P_k est un ensemble fermé arbitraire, *parfait ou non*, nous allons nous servir de la remarque suivante: *Si P est un sous-ensemble fermé d'un espace compact et parfait, il existe un ensemble parfait P^* qui contient P et a la même dimension que P* [1]).

Soit, en effet, $p_1, \ldots, p_m, \ldots$ la suite des points isolés de P. Il existe un ensemble parfait R_m de dimension 0 contenant p_m et de diamètre aussi petit que l'on veut. Si l'on pose $\lim_{m=\infty} \delta(R_m) = 0$, l'ensemble $P^* = P + \sum_m R_m$ est l'ensemble demandé [2]).

Théorème. *Etant donnée dans un espace compact A une suite d'ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de dimensions $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, il existe dans l'intervalle* 01 *un ensemble fermé non-dense N et une fonction continue qui transforme N en A de façon que chaque point de P_k est d'ordre $n_k + 1$ au plus.*

En effet, en vertu du théorème de Urysohn, on peut imaginer A situé dans l'espace compact de Hilbert A^* (espace des suites infinies extraites de l'intervalle 01). Soit P_k^* un ensemble parfait tel que $P_k \subset P_k^*$ et $\dim P_k^* = \dim P_k$. D'après le théor. généralisé du N 2, il existe une fonction continue f qui transforme l'ensemble de Cantor en A^* de façon que chaque point de P_k^* est d'ordre $n_k + 1$ au plus. Posons $N = f^{-1}(A)$, c. à d. N est l'ensemble des points de l'ensemble de Cantor dont les images appartiennent à A. La fonction f transforme N en A de façon demandée.

Le théorème précédent permet de remplacer la condition $\mathfrak{C}_n$ du N 1 par la condition plus précise suivante:

[1]) On voit ainsi que chaque espace compact est *„topologiquement contenu"* dans un espace compact parfait de même dimension.

[2]) En vertu du "Summensatz" (v. Menger, l. c. p. 92) on a $\dim P^* = \dim P$.

Corollaire. *Dans les hypothèses du théorème précédent, à chaque $\varepsilon > 0$ et chaque décomposition de A en ensembles fermés non-vides: $A = F_1 + \ldots + F_m$, correspond une décomposition en ensembles fermés: $A = F_1^* + \ldots + F_m^*$ telle que* 1^0: *pour chaque système de r indices différents, on a*

$$\dim (P_k \cdot F_{j_1}^* \cdot F_{j_2}^* \cdot \ldots \cdot F_{j_r}^*) \leqslant n_k - r + 1$$ [1].

2^0: $F_i^* \subset E_\varepsilon(F_i)$.

Considérons, en effet, l'ensemble N et la fonction f du théorème précédent. On a évidemment: $N = f^{-1}(E_\varepsilon(F_1)) + \ldots + f^{-1}(E_\varepsilon(F_m))$. L'ensemble N étant de dimension 0, il existe une décomposition de N en ensembles fermés et *disjoints*: $N = N_1 + \ldots + N_m$ tels que $N_i \subset f^{-1}(E_\varepsilon(F_i))$. Les ensembles $F_i^* = f(N_i)$ sont les ensembles demandés.

Posons, en effet, $Z = P_k \cdot F_{j_1}^* \cdot F_{j_2}^* \cdot \ldots \cdot F_{j_r}^*$. Evidemment $Z = f[N_{j_1} \cdot f^{-1}(Z)]$. Or, la transformation de l'ensemble $N_{j_1} \cdot f^{-1}(Z)$ n'admet que des points d'ordre $\leqslant n_k + 1 - (r - 1)$, car y étant un point de Z, on a $y = f(x_2) = \ldots = f(x_r)$ et $x_2 \in N_{j_2}, \ldots, x_r \in N_{j_r}$; les points $x_2, \ldots, x_r$ sont donc différents deux à deux et situés en dehors de l'ensemble N_{j_1}. Comme toute transformation continue d'un ensemble compact 0-dimensionnel (tel est l'ensemble $N_{j_1} \cdot f^{-1}(Z)$) n'admettant que des points d'ordre $q + 1$ au plus conduit à un ensemble de dimension $\leqslant q$ [2]) on a $\dim Z \leqslant n_k - r + 1$ [3]).

4. Remarques. 1). Posons dans la condition $\mathfrak{C}_n$ du N 1 et dans le théorème du N 2: $P = A$. On vérifie facilement que, dans la démonstration de ce théorème n'intervient guère l'hypothèse que l'ensemble P est de dimension $\leqslant n$; ce n'est que de la condition $\mathfrak{C}_n$ que l'on tient compte. En vertu du théorème précité (note [2])), on a ainsi l'équivalence suivante:

[1]) On convient ici qu'un ensemble de dimension négative est vide.

[2]) D'après un théorème général de M. Hurewicz. Voir Menger, loc. cit., p. 237.

[3]) D'une façon générale, on prouve facilement, que $A_1, \ldots, A_r$ étant des ensembles fermés et disjoints (situés dans un espace compact) et f étant une fonction continue n'admettant que des points d'ordre $\leqslant n$, on a $\dim [f(A_1) \cdot \ldots \cdot f(A_r)] \leqslant n - r + \dim A_i$.

A étant un espace compact et parfait, la condition d'être $\leqslant n$-dimensionnel équivaut à la condition $\mathfrak{C}_n$ [1]) *(où l'on pose $P = A$) ainsi qu'à l'existence d'une fonction continue n'admettant que des points d'ordre $\leqslant n + 1$ et transformant l'ensemble de Cantor en l'espace A* [2]).

En ce qui concerne les espaces compacts les plus généraux (parfaits ou non), l'énoncé précédent reste vrai, lorsqu'on remplace l'ensemble de Cantor par un ensemble fermé non-dense N situé dans l'intervalle 01 et convenablement choisi.

En effet, si A satisfait à la condition $\mathfrak{C}_n$ et si l'on décompose A, conformément au théorème de Cantor-Bendixson, en un ensemble parfait B et un ensemble (au plus) dénombrable D, l'ensemble B satisfait évidemment à la condition $\mathfrak{C}_n$ (voir note [1])). Donc, en vertu de l'énoncé précédent, $\dim B \leqslant n$, d'où $\dim A \leqslant n$ (d'après le „Summensatz", voir p. 289, note [2])) [3]).

D'autre part, si l'on suppose que $\dim A \leqslant n$, on conclut du théor. du N 3 (où l'on pose $A = P_1 = P_2 = \ldots$) qu'il existe un ensemble fermé non-dense N et une fonction continue f qui transforme N en A et qui n'admet que des points d'ordre $\leqslant n + 1$.

Enfin, si l'on suppose l'existence d'un ensemble N et d'une fonction f de ce genre, on a $\dim A \leqslant n$ (en vertu du théor. cité p. 290, note [2])). Donc A satisfait à la condition $\mathfrak{C}_n$ du N 1 (où l'on pose $P = A$).

2). En cas où la suite $P_1, P_2, \ldots$ est finie, le corollaire du N 3 donne le *théorème de décomposition* dans la forme de M. Hurewicz [4]). Celle-ci contient comme cas particulier le „Allgemeiner Zerlegungssatz" de M. Menger [5]): *un espace compact n-dimensionnel A peut être, pour chaque $\varepsilon > 0$, décomposé en ensembles fermés de diamètre inférieur à ε et tels que le produit de r parmi ces ensembles soit de dimension $\leqslant n - r + 1$.*

[1]) Cette condition équivaut aussi, comme on prouve facilement, à l'existence d'une décomposition de A en ensembles fermés aussi petits que l'on veut et tels que le produit de $n + 2$ parmi eux soit toujours vide.

[2]) Ce théorème a été démontré par M. Hurewicz à l'aide des théorèmes de décomposition dont la démonstration est bien compliquée. Voir Proc. Akad. Amsterdam 29, p. 1014 et Ann. of Math. 31 (1930), p. 176. Cf. aussi P. Alexandroff, Ann. of. Math. 30, p. 30, note 32.

[3]) Ce raisonnement peut bien servir de démonstration de la „Umkehrung des letzten Teiles des Zerlegungssatzes" (v. Menger, l. c., p. 174).

[4]) Voir, Menger, l. c., p. 170.

[5]) Ibid. p. 156.

Ce dernier théorème résulte d'ailleurs directement du théor. du N 4: si l'on décompose l'ensemble N en ensembles $N_1 + \ldots + N_m$ fermés, disjoints et tels que $\delta[f(N_i)] < \varepsilon$, l'égalité

$$A = f(N_1) + \ldots + f(N_m)$$

présente la décomposition demandée. De plus, si à la place de ε on considère une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ tendant vers 0, on obtient une suite des décompositions du genre envisagé de façon que les termes de la décomposition $k+1$-ème proviennent d'une *subdivision* des termes de la k-ème décomposition [1]). Il suffit, en effet, de subdiviser les ensembles $N_1, \ldots, N_m$.

[1]) Pour les décompositions de ce genre, voir Hurewicz Annals, l. c.

Sur un théorème de Hessenberg [1]).

Par

Gabriel Sudan (Bucarest).

G. Hessenberg a démontré le théorème suivant:

„*Tout nombre initial est un nombre principal additif*".

Dans cette note on va généraliser ce théorème pour une certaine classe de fonctions tranfinies: $f_0; f_1; f_2; \ldots f_i \ldots$ définies comme il suit:

Soient d'abord β et γ deux nombres ordinaux quelconques et $f(x)$ une fonction de la variable x. On désignera par $\varrho_x(\beta, f(x), \nu)$ la fonction qui satisfait à la récurrence suivante:

$$\begin{cases} \varrho_x(\beta, f(x), 0) = \beta \\ \varrho_x(\beta, f(x), \nu+1) = f(\varrho_x(\beta, f(x), \nu)) \\ \varrho_x(\beta, f(x), \lim\{\gamma\}) = \lim\limits_{\gamma}\{\varrho_x(\beta, f(x), \gamma)\}. \end{cases}$$

Les valeurs de ϱ_x sont donc des itérations répétées de la fonction $f(x)$, la valeur intiale étant β. On pose maintenant:

$$f_0 \equiv f_0(\alpha_0, \nu) \equiv \alpha_0 + \nu;$$

et pour $i > 0$:

$$f_i \equiv f_i(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \alpha_i, \nu) \equiv \varrho_x(\beta_i, f_{i-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, x, \alpha_i), \nu)\ ^{2)}.$$

[1]) La présente note est en étroite liaison avec un travail publié dans les Math. Annalen Vol. 105: „*Zur Jacobsthalschen transfiniten Arithmetik*" et qui sera désigné dans la suite simplement par *Z. J. tr. A.* Pour tout ce qui concerne les notations que nous employons ici, le lecteur trouvera, dans le travail mentionné, les explications nécessaires.

[2]) *Z. J. tr. A.* Pag. 40.