Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème bien connu de Cantor, il existe un ensemble ordonné dénombrable D (p. e. l'ensemble de tous les nombres rationnels ordonné d'après leur grandeur), tel que tout ensemble dénombrable ordonné est semblable à un sous-ensemble de D.

Le but de cette Note est de démontrer que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble ordonné* U *de puissance du continu, tel que tout ensemble ordonné de puissance du continu est semblable à un sous-ensemble de* U.

Notamment, en utilisant le théorème de M. Zermelo, mais sans admettre l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, nous prouverons qu'*il existe un*

[1]) Cette Note était déjà rédigée quand j'aperçus que mon théorème est une conséquence de deux propriétés des „types η_ξ" de M. Hausdorff. Notamment dans son livre *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, on trouve, p. 181, ce théorème I: „Eine η_ξ-Menge enthält zu jeder Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ eine ähnliche Teilmenge" [2]) et, p. 182 on lit: „... so gibt es $\eta_{\xi+1}$-Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_{\xi+1}$ dann und nur dann, wenn $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$" [3]). Néanmoins, ma Note contenant une démonstration élémentaire d'une proposition qui n'était pas énoncée explicitement, j'ai décidé de la publier.

Il est encore à remarquer qu'il ne résulte pas encore des propositions citées de M. Hausdorff que notre théorème est équivalent à l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; cette question reste encore ouverte.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge einer Théorie der geordneten Mengen*, Math. Annallen 65 (1908), p. 488, Satz XVIII.

[3]) Cf. aussi *Fund. Math.* t. VI, p. 278.

ensemble ordonné U *de puissance du continu, tel que tout ensemble ordonné de puissance* $\aleph_1$ *est semblable à un sous-ensemble de* U [1]).

Démonstration.

Désignons par U l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω, dont les éléments sont des nombres 0 ou 1,

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, a_{\xi+1}, \ldots \quad (\xi < \Omega)$$

et telles qu'il existe toujours un indice $\lambda < \Omega$, tel que $a_\lambda = 1$ et $a_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$. Ordonnons l'ensemble U d'après le principe de premières différences. Je dis que l'ensemble U ainsi ordonné satisfait aux conditions de notre théorème.

ξ étant un nombre ordinal $< \Omega$, désignons par U_ξ le sous-ensemble de U formé de toutes ces suites (1) de U pour lesquelles $a_\eta = 0$ pour $\xi \leqq \eta < \Omega$. On voit sans peine que

$$U = \sum_{\xi < \Omega} U_\xi$$

et que $\overline{\overline{U_\xi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$ pour $\xi < \Omega$, donc

$$\overline{\overline{U}} \leqslant \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

D'autre part, on voit sans peine que $\overline{\overline{U}} \geqslant 2^{\aleph_0}$, puisque toutes les suites (1), où a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie quelconque formée de nombres 0 ou 1, et où $a_\omega = 1$, $a_\xi = 0$ pour $\omega < \xi < \Omega$, appartiennent évidemment à U. On a ainsi

$$\overline{\overline{U}} = 2^{\aleph_0}.$$

Lemme I. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ étant une suite infinie d'éléments de U il existe toujours deux éléments B et C de U, tels que $B \prec A_n \prec C$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

[1]) M. A. Lindenbaum remarque que cette proposition résulte aussi des théorèmes contenus dans le livre cité de M. Hausdorff du 1914, notamment:

1. p. 179. On construit un type normal homogène η_1.
2. p. 180, lignes 16—19 en descendant. La puissance de ce type η_1 est $2^{\aleph_0}$.
3. p. 181, lignes 16—13 en remontant. Le type η_1 n'a que des éléments dont le „caractère" est c_{11} et des lacunes dont les „carectères" sont c_{01}, c_{10}, c_{11}; l'ensemble du type η_1 est donc une „$\bar{\eta}_1$-Menge".
4. p. 181, lignes 10 et 9 en remontant. Chaque „η_1-Menge" contient un ensemble semblable à tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_1$.

Donc un ensemble du type η_1 jouit des propriétés désirées.

Démonstration. Soit $A_n=\{a_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ pour $n=1,2,3,\ldots$ D'après $A_n \in U$, pour $n=1,2,3,\ldots$ et la définition de U, il existe pour tout n naturel un indice $\lambda_n<\Omega$, tel que $a_{\lambda_n}^n=1$ et $a_\xi^n=0$ pour $\lambda_n<\xi<\Omega$. Soit λ un nombre ordinal $<\Omega$, tel que $\lambda>\lambda_n$ pour $n=1,2,3,\ldots$ (Un tel nombre λ existe, puisque $\lambda_n<\Omega$ pour $n=1,2,3,\ldots$). Posons $b_\xi=0$ pour $\xi\neq\lambda$, $b_\lambda=1$, $c_\xi=1$ pour $\xi\leqslant\lambda$ et $c_\xi=0$ pour $\lambda<\xi<\Omega$, et soit $B=\{b_\xi\}_{\xi<\Omega}$, $C=\{c_\xi\}_{\xi<\Omega}$. Soit n un nombre naturel donné quelconque: nous aurons évidemment $b_\xi=0\leqslant a_\xi^n$ pour $\xi<\lambda_n$ et $b_{\lambda_n}=0<1=a_{\lambda_n}^n$ (puisque $\lambda_n<\lambda$), ce qui prouve que $B\precsim A_n$; d'autre part $a_\xi^n\leqslant 1=c_\xi$ pour $\xi<\lambda$ et $a_\lambda^n=0<1=c_\lambda$, d'où $A_n\precsim C$. Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme II. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ et $B_1, B_2, B_3, \ldots$ étant deux suites infinies d'éléments de U, telles que $A_k\precsim B_l$ pour k et l naturels, il existe toujours un élément C de U, tel que $A_n\precsim C\precsim B_n$ pour $n=1,2,3,\ldots$

Démonstration. Soit $A_n=\{a_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$, $B_n=\{b_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ pour $n=1,2,3,\ldots$ Nous définirons une suite transfinie auxiliaire $\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$ comme il suit. Posons $u_1=1$ s'il existe un indice n, tel que $a_1^n=1$, et posons $u_1=0$ si $a_1^n=0$ pour $n=1,2,3,\ldots$ Soit maintenant ξ un nombre ordinal donné >1 et $<\Omega$, et supposons que nous avons déjà défini les nombres a_η pour $\eta<\xi$. Nous poserons $u_\xi=1$ s'il existe un indice n, tel que $a_\eta^n=u_\eta$ pour $\eta<\xi$ et $a_\xi^n=1$, et nous poserons $u_\xi=0$ dans le cas contraire. La suite transfinie $\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie. Elle n'appartient pas nécessairement à U, mais, A_n $(n=1,2,3,\ldots)$ étant des éléments de U, on voit sans peine (d'après la définition de U) qu'il existe un indice $\lambda<\Omega$, tel que $u_\xi=0$ pour $\lambda<\xi<\Omega$. En effet, d'après $A_n\in U$ il existe pour tout n naturel un indice $\lambda_n<\Omega$, tel que $a_\xi^n=0$ pour $\lambda_n<\xi<\Omega$. Or, il existe un nombre ordinal $\lambda<\Omega$, tel que $\lambda>\lambda_n$, pour $n=1,2,3,\ldots$, et il est évident que $a_\xi^n=0$ pour $\lambda<\xi<\Omega$, $n=1,2,3,\ldots$, d'où $u_\xi=0$, pour $\lambda<\xi<\Omega$. De même, d'après $B_n\in U$ pour $n=1,2,3,\ldots$, on voit sans peine qu'il existe un indice $\mu<\Omega$, tel que $b_\xi^n=0$ pour $\mu\leqslant\xi<\Omega$, $n=1,2,3,\ldots$, et nous pouvons supposer que $\mu>\lambda$.

Posons maintenant $c_\xi=u_\xi$ pour $\xi\neq\mu$ et $c_\mu=1$; d'après $u_\xi=0$ pour $\lambda<\xi<\Omega$ et d'après $\mu<\lambda$ on a $c_\xi=0$ pour $\mu<\xi<\Omega$ et on voit que la suite transfinie $C=\{c_\xi\}_{\xi<\Omega}$ appartient à U. Je dis que $A_n\precsim C\precsim B_n$ pour $n=1,2,3,\ldots$

Soit n un nombre naturel donné. Si $A_n\neq\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$, il existe un plus petit nombre ordinal $\gamma<\Omega$, tel que $a_\gamma^n\neq u_\gamma$. On a donc $a_\xi^n=u_\xi$ pour $\xi<\gamma$, d'où résulte tout de suite, d'après la définition du nombre u_γ et d'après $a_\gamma^n\neq u_\gamma$, que $a_\gamma^n=0$ et $u_\gamma=1$ (puisque, s'il était $a_\gamma^n=1$, on aurait aussi $u_\gamma=1$, donc $a_\gamma^n=u_\gamma$). Vu la définition de la suite C, on trouve donc $a_\xi^n=c_\xi$ pour $\xi<\gamma$ et $a_\gamma^n<c_\gamma$ (puisque si $\gamma\neq\mu$, on a $c_\gamma=u_\gamma>a_\gamma^n$, et si $\gamma=\mu$, on a $a_\gamma^n=0<1=c_\gamma$), donc $A_n\precsim C$. Or, si $A_n=\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$, on a, vu la definition de la suite C, $a_\xi^n=c_\xi$ pour $\xi<\mu$, et $a_\mu^n=u_\mu=0<c_\mu=1$, d'où encore $A_n\precsim C$.

Or, si n est un nombre naturel, il ne peut être $B_n=C$, puisque $b_\mu^n=0$ et $c_\mu=1$. Admettons qu'on a, pour un indice n, $B_n\precsim C$: il existe donc un nombre ordinal $\gamma<\Omega$, tel que $b_\xi^n=c_\xi$ pour $\xi<\gamma$, $b_\gamma^n=0$, $c_\gamma=1$; il est donc $\gamma\leqslant\mu$ (puisque $c_\xi=0$ pour $\mu<\xi<\Omega$), donc (d'après la définition de la suite C) $b_\xi^n=u_\xi$ pour $\xi<\gamma$.

Si $\gamma<\mu$, on a $b_\xi^n=c_\xi=u_\xi$ pour $\xi<\gamma$ et $u_\gamma=c_\gamma=1$, d'où résulte, vu la définition du nombre u_γ, qu'il existe un indice m, tel que $a_\xi^m=u_\xi$ pour $\xi<\gamma$ et $a_\gamma^m=1$, donc $a_\xi^m=c_\xi=b_\xi^n$ pour $\xi<\gamma$ et $a_\gamma^m=1>0=b_\gamma^n$, ce qui donne $B_n\precsim A_m$, contrairement à l'hypothèse. Il est donc $\gamma=\mu$. D'après $B_n\in U$ il existe un indice $\delta<\Omega$, tel que $b_\delta^n=1$ et $b_\xi^n=0$ pour $\delta<\xi<\Omega$; d'après $b_\xi^n=0$ pour $\mu\leqslant\xi<\Omega$, on a $\delta<\mu$. On a donc $b_\xi^n=c_\xi=u_\xi$ pour $\xi<\gamma=\mu$ et $u_\delta=b_\delta^n=1$, d'où résulte, vu la définition du nombre u_δ, qu'il existe un indice k, tel que $a_\xi^k=u_\xi$ pour $\xi<\delta$ et $a_\delta^k=1$, donc, d'après $\delta<\mu$: $a_\xi^k=b_\xi^n$ pour $\xi<\delta$, $a_\delta^k=1=b_\delta^n$ et $a_\xi^k\geqslant 0=b_\xi^n$ pour $\delta<\xi<\Omega$, contrairement à la formule $A_k\precsim B_n$.

Notre hypothèse qu'on a, pour un indice n, $B_n\precsim C$, est donc impossible. On a donc $C\precsim B_n$ pour $n=1,2,3,\ldots$

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant

$$(2)\qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\xi, \ldots \quad (\xi<\Omega)$$

un ensemble ordonné de puissance $\aleph_1$, et soit

$$(3)\qquad A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\omega, A_{\omega+1}, \ldots, A_\xi, \ldots$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de l'ensemble U.

Posons $f(p_1)=A_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal >1

et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments $f(p_\xi)$ pour $\xi < \alpha$.

Nous définirons $f(p_\alpha)$ comme le premier terme de la suite (3) qui, pour tout indice $\xi < \alpha$, a les mêmes relations d'ordre dans U par rapport à $f(p_\xi)$ que p_α a par rapport à p_ξ. Des lemmes I et II résulte tout de suite qu'un tel élément $f(p_\alpha)$ existe toujours dans la suite (3). On voit sans peine que le sous-ensemble de U formé de tous les éléments $f(p_\xi)$, où $\xi < \Omega$, est semblable à l'ensemble ordonné (2).

Notre théorème est ainsi démontré.

Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je démontre dans cette note le théorème suivant: *P étant un ensemble parfait n-dimensionnel situé dans un espace compact A, il existe une fonction qui transforme de façon continue l'ensemble parfait non-dense de Cantor en A de sorte que chaque point de P est d'ordre $n+1$ au plus* (c. à d. qu'il est image de $\leqslant n+1$ points de l'ensemble de Cantor).

La démonstration repose sur l'application de l'espace fonctionnel Φ composé de toutes les fonctions continues qui transforment l'ensemble de Cantor en l'espace A (entier) [2]). Je prouve notamment que les fonctions qui ne satisfont pas à la condition du théorème constituent dans Φ un ensemble de I-re catégorie; cet ensemble ne peut donc être identique à Φ (en vertu du théorème de Baire); d'où la conclusion demandée.

Le théorème se généralise facilement au cas, où à la place de P on considère une suite infinie d'ensembles parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de dimensions $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ La fonction peut alors être supposée d'ordre $\leqslant n_k + 1$ en chaque point de P_k.

Je vais indiquer, en outre, plusieurs simplifications de la Théorie de la dimension des espaces compacts, liées aux raisonnements exposés ici.

[1]) Communication présentée à la Soc. Pol. de Math. à Lwów, le 23. I. 1932.

[2]) L'idée d'appliquer l'espace fonctionnel à la Théorie de la dimension est due à M. Hurewicz. Voir Proc. Akad. Amsterdam 34 (1931), p. 399 et Akad. Wien 1931 (7 Mai).