Einige Sätze über stetige Streckenbilder [1].

Von

Karol Borsuk (Warschau).

Im Lichte der punktmengentheoretischen Betrachtung der Struktur von *stetigen* Streckenbilder (die ich hier, nach Hausdorff kurz als „Streckenbilder" bezeichnen werde) erscheinen dieselben als aus ein- und mehrpunktigen sog. Zyklen [2]) zusammengesetzte Gebilde. Zahlreiche topologische Untersuchungen des ganzen Streckenbildes lassen sich demzufolge auf diejenigen seiner Zyklen zurückführen.

Nach C. Kuratowski u. G. T. Whyburn [3]) unterscheiden wir insbesondere zwischen den *zyklisch extensiven* Eigenschaften, d. h. Eigenschaften, die einen ganzen Streckenbilde zukommen, falls sie in jedem seiner Zyklen vorhanden sind, und den *zyklisch reduktiven* Eigenschaften, d. h. solchen, die einem jeden Zykel zukommen, falls das ganze Streckenbild sie besitzt.

[1]) Einige von diesen Sätzen befinden sich in meiner (nicht publizierten) im Oktober des 1929 vorgelegten Doktorsdissertation.

[2]) „cyclic element" von G. T. Whyburn, (s. Proc. Ntl. Acad. Sc. vol. 13, S. 31—38). Ein Zykel (mit dem Begriff „Zykel" der kombinatorischen Topologie nicht zu verwechseln!), heisst hier entweder ein Schnittpunkt des Streckenbildes oder eine Menge, die mit irgend einem ihrer Punkte x zugleich alle und nur solche Punkte enthält, zwischen welchen und dem Punkte x kein Punkt das Streckenbild zerschneidet. Der Begriff wurde durch G. T. Whyburn eingeführt und durch andere Autoren untersucht (näheres s. bei C. Kuratowski u. G. T. Whyburn, Fund. Math. XVI, S. 305—331, und in dort angegebener Bibliographie). Er hat sich in der mengentheoretischen Topologie von Streckenbilder (auch „lokalzusammenhängende Kontinua", „peanosche Räume" u. s. w. genannt) als sehr zweckmässig erwiesen. Die hier angeführte Definition des Zykles stammt von R. L. Moore.

[3]) Fund. Math. XVI, S. 322.

Der Zweck dieser Arbeit ist, die Extensivität sowie die Reduktivität von 3 folgenden Eigenschaften zu beweisen: 1° *Existenz eines Fixpunktes*, 2° *Zusammenhang eines gewissen Abbildungsraumes* K_n^M (woraus u. a. die Extensivität des Nichtzerschneidens der euklidischen Räume folgt) und 3° Sog. *absoluter Retrakt* zu sein.

Dabei werde ich die Eigenschaft eines topologischen Raumes M „*bei jeder stetigen Abbildung* (Funktion) f *desselben auf dessen Teilmenge* $f(M) \subseteq M$ *einen Punkt* $x = f(x)$ (Fixpunkt) *zu enthalten*" kurz mit $\boldsymbol{F}$ bezeichnen. Ferner, mit $\boldsymbol{H}_n$ ($n \geqslant 2$) bezeichne ich die Eigenschaft eines topologischen Raumes M, die darin besteht, dass *der Abbildungsraum* K_n^M [4]) *zusammenhängend ist.* Schliesslich, bezeichne ich mit $\boldsymbol{R}$ die Eigenschaft eines metrischen Raumes M, ein absoluter Retrakt [5]) zu sein.

Zuerst werden einige Hilfsbegriffe eingeführt und einige Hilfssätze bewiesen.

1. Sei S ein Streckenbild. Ich nenne *Redukt von* S ein jedes Teilkontinuum von S, welches Summe von einer gewöhnlichen Baumkurve [6]) B und endlich vielen Zyklen von S ist. Insbesondere ist jeder Zykel von S ein Redukt von S.

Sei R ein Redukt von S. Für jeden Punkt x von $S-R$ nenne ich *Endstück von* S die Menge derjenigen Punkte y von S, für

[4]) Unter diesem Symbol verstehen wir den Raum, dessen Elemente die stetigen Abbildungen des Raumes M auf die Oberfläche K_n einer im euklidischen n-dimensionalen Raume liegenden Kugel mit Radius gleich 1. Dieser Raum wird durch die Formel $\varrho(f_1, f_2) = \sup_{x \in M} \varrho[f_1(x), f_2(x)]$ metrisiert (vrgl. mein Artikel, Fund. Math. XVII, S. 164). Die Eigenschaft $\boldsymbol{H}_n$ ist der Nichtexistenz der „*topologisch unwesentlichen*" (im Sinne von H. Hopf) Abbildungen des Raumes M auf K_n äquivalent. Siehe H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung, 1930, S. 53 und H. Hopf, Math. Ann. 104, S. 637. Vrgl. auch P. Alexandroff, Dimensionstheorie, Math. Ann. (z. Z. im Druck). Über Anwendungen der Räume K_n^M in topologischen Untersuchungen s. meine Artikel: Fund. Math. XVII, S. 195, Monatsh. f. Math. und Phys., 38, S. 381 und Math. Ann., (z. Z. im Druck).

[5]) Stetige Funktion f wird eine den Raum M *auf die Menge* $f(M)$ *zusammenziehende Funktion* genannt, wenn $f(M) \subset M$ und für jedes $x \in f(M)$, $f(x) = x$ ist. Die Menge $f(M)$ nennt man dann *Retrakt des Raumes* M. Ein absoluter *Retrakt* heisst ein jeder kompakte metrische Raum, welcher Retrakt jeder seiner metrischen Obermenge ist.

[6]) *Baumkurve* heisst Streckenbild, das keine einfache geschlossene Kurve enthält („dendrites" von S. Mazurkiewicz, Fund. Math. II, S. 119—130). *Gewöhnliche* Kurve, bezw. Baumkurve heisst Kurve, bezw. Baumkurve, die Summe endlich vieler einfachen Bögen ist (vrgl. K. Menger, Math. Ann. 95, S. 304). Hier werden auch einpunktige Mengen als gewöhnliche Baumkurven angesehen.

welche es kein Punkt z von R gibt, der S zwischen y und dem gegebenen x zerschneidet. Aus dieser Definition folgt leicht dass die Endstücke abgeschlossene Mengen sind

Die Endstücke von S werden mit E bezeichnet und nötigenfalls mit dem Index R sowie, für festes R, mit luafenden Nummerindizes versehen.

Ist für ein R von S, $\max\delta(E^R)\leqslant\varepsilon$, so heisst R ε-Redukt von S. Es ergibt sich folgendes aus der Definition von E:

1^0. *Sind $p, q \in E$, so ist jeder einfache Bogen $L[p, q]\subset S$* [7]) *in E enthalten.*

Folglich [8]):

2^0. *Jedes Endstück E ist ein Streckenbild; seine Zyklen sind zugleich Zyklen von S.*

3^0. *Die Menge $R\cdot E$ ist in einem einzigen Zykel von S enthalten.*

4^0. *Ist Z ein Zykel von R, so ist die Menge $Z\cdot E$ höchstens einpunktig.*

5^0. *Jede Komponente* [9]) *von $S-R$ ist in einem E enthalten.*

6^0. *Ist $E_1\neq E_2$, so ist $E_1\cdot E_2\subset R$ und $E_1\cdot E_2$ höchstens einen einzigen Punkt enthält* (der dann S zerschneidet).

Folglich [10]):

7^0. *Die Endstücke von S bei einem gegebenen R bilden eine endliche oder unendliche Folge $\{E_n\}$, im letzteren Falle stets eine Nullfolge* (d. h. dass $\lim\limits_{n=\infty}\delta(E_n)=0$ ist).

Aus Eigenschaften 1^0 und 4^0 ergibt sich die Behauptung:

8^0. *$R\cdot E^R$ ist eine gewöhnliche Baumkurve. Ist insbesondere $R=$ $=B+\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$, so ist $R\cdot E^R\subset B$ oder einpunktig.*

9^0. *Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es in S einen ε-Redukt R.*

Beweis. Es gibt eine gewöhnliche Baumkurve $B\subset S$, mit der man jeden Punkt $x\in S$ durch einen einfachen Bogen vom Durchmesser $\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon$ verbinden kann [11]). Es seien $Z_1, Z_2,\ldots, Z_m,\ldots$ (wo $Z_m\neq Z_n$ für $n\neq m$) alle Zyklen von S, deren Durchschnitt mit B mindestens zwei Punkte enthält. Da $\lim\limits_{n=\infty}\delta(Z_n)=0$ ist [12]), so gibt es ein k derart dass:

$$\delta(Z_n)\leqslant\tfrac{1}{3}\,\varepsilon \text{ für jedes } n>k. \tag{1}$$

ist. Nun setzen wir:

$$R=B+Z_1+\ldots Z_k. \tag{2}$$

Ist $p, q\in E^R$, so gibt es einfache Bögen $L[p,x]\subset E$ und $L[q,y]\subset E$ mit Durchmessern $\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon$ und mit Endpunkten $x\in E\cdot R$ und $y\in E\cdot R$. Nach 3^0, 4^0 und (2) gibt es also eine Zahl $m>k$, so dass $x, y\in Z_m$ und infolgedesssen nach (1)

$$\varrho(p,q)\leqslant\tfrac{1}{3}\varepsilon+\tfrac{1}{3}\varepsilon+\delta(Z_m)\leqslant\tfrac{1}{3}\varepsilon+\tfrac{1}{3}\varepsilon+\tfrac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon$$

ist, woraus $\delta(E)\leqslant\varepsilon$ folgt, w. z. b. w.

2. Eine Eigenschaft W soll *punktweise additiv* heissen, wenn je zwei relativ zueinander abgeschlossene und nur einen gemeinsamen Punkt p besitzende Mengen M u. N, beide von der Eigenschaft W, eine Summe $M+N$ von derselben Eigenschaft W ergeben.

Hilfssatz I. *Die Eigenschaft F ist punktweise additiv.*

Beweis. Sei f eine stetige Funktion, $f(M+N)\subset M+N$ und z. B. $f(p)\in M$. Wir setzen für jedes $x\in M$:

$$\begin{cases}\varphi(x)=f(x), & \text{wenn } f(x)\in M,\\ \varphi(x)=p, & \text{wenn } f(x)\in N.\end{cases} \tag{3}$$

Hat die Menge M die Eigenschaft F, so gibt es einen Punkt

$$\varphi(x_0)=x_0\in M, \tag{4}$$

weil φ offenbar stetig ist. Wäre nun

$$f(x_0)\in N-M, \tag{5}$$

[7]) Für die Bezeichnungsweise von geschlossenen, bzw. offenen u. halboffenen Bögen, siehe mein Artikel, Fund Math. XVII, S. 172, 7°.

[8]) C. Kuratowski u. G. T. Whyburn, l. c., S. 309.

[9]) d. h. nach Hausdorff eine *grösste* (in keiner von sich selbst verschiedenen enthaltene) *zusammenhängende* Teilmenge von $S-R$.

[10]) l. c. S. 309 u. 313.

[11]) Zum Beweise betrachten wir z. B. eine endliche Teilmenge T von S mit der Eigenschaft, dass es für jeden Punkt $x\in S$ einen Punkt $a\in T$ und einen einfachen Bogen $L[a,x]\subset S$ mit dem Durchmesser $\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon$ gibt. Um die gewöhnliche Baumkurve B zu erhalten, braucht man nur, eine, alle diese Punkte enthaltende, gewöhnliche Baumkurve zu betrachten.

[12]) l. c. S. 313.

so hätte man, nach (3) und (4), $x_0 = \varphi(x_0) = p$ und somit $f(x_0) = f(p) \epsilon M$, gegen (5).

Es ist also $f(x_0) \epsilon M$, folglich nach (3), $f(x_0) = \varphi(x_0) = x_0$, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Die Eigenschaft H_n ist punktweise additiv.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass je zwei Elemente f_0, f_1 des Raumes K_n^A mit $\varrho(f_0, f_1) < 2$ (wobei A ein topologischer Raum ist) sich in K_n^A durch einen einfachen Bogen verbinden lassen (und zwar hinreichend nahe liegende Elemente durch einen beliebig kleinen Bogen). Für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $x \epsilon A$ setzen wir zu diesem Zwecke:

$f_t(x) =$ *Punkt, der den kleinsten geodetischen Bogen* $L[f_0(x), f_1(x)]$ *von* K_n *im Verhältnisse* $t/1 - t$ *teilt.*

Es ist leicht zu ersehen, dass so definierte Funktionen f_t im Raume K_n^A einen einfachen Bogen $L[f_0, f_1]$ mit dem Durchmesser $\varrho(f_0, f_1)$ bilden.

Gleichzeitig ist dadurch gezeigt, dass

(6) *je zwei Komponenten von* K_n *sind um* $\geqslant 2$ *entfernt.*

Es sei nun $\varphi_0 \epsilon K_n^{M+N}$, $\varphi_0(p) = q$. Es seien ferner $\varphi_0', \varphi_1' \epsilon K_n^M$ und $\varphi_0'', \varphi_1'' \epsilon K_n^N$ vier durch folgende Formeln definierte Funktionen:

$$\varphi_0'(x) = \varphi_0(x) \text{ und } \varphi_1'(x) = q, \text{ für jedes } x \epsilon M,$$
$$\varphi_0''(x) = \varphi_0(x) \text{ und } \varphi_1''(x) = q, \text{ für jedes } x \epsilon N.$$

Die Voraussetzung des Zusammenhanges der Räume K_n^M und K_n^N ergibt nach dem bereits Bewiesenen, dass sich die Funktionen φ_0' und φ_1' (bzw. φ_0'' und φ_1'') in Raume K_n^M (bzw. in K_n^N) durch einen einfachen Bogen verbinden lassen. Mit anderen Worten, es existiert eine homöomorphe Zuordnung zwischen den Parameters $0 \leqslant t \leqslant 1$ und den Funktionen $\varphi_t' \epsilon K_n^M$ (bzw. $\varphi_t'' \epsilon K_n^N$).

Es bezeichne ψ_t' (bzw. ψ_t'') eine stetige Funktion des Parameters $0 \leqslant t \leqslant 1$, deren Wert für jedes t eine isometrische Abbildung $\psi_t(y)$ der Kugelfläche K_n auf sich selbst ist, und zwar eine solche Abbildung, dass $\psi_0'(y) = \psi_0''(y) = y$ für jedes $y \epsilon K_n$ und dass $\psi_t' \varphi_t'(p) = q$ (bzw. $\psi_t'' \varphi_t''(p) = q$) gilt. Wir setzen nun für $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $x \epsilon M + N$:

$$\Phi_t(x) = \begin{cases} \psi_t' \varphi_t'(x) & \text{für } x \epsilon M, \\ \psi_t'' \varphi_t''(x) & \text{für } x \epsilon N. \end{cases}$$

Da $M \cdot N = (p)$ und $\psi_t' \varphi_t'(p) = \psi_t'' \varphi_t''(p) = q$ ist, so gilt $\Phi_t \epsilon K_n^{M+N}$ für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$, wobei sich die Funktion Φ_t im Raume K_n^{M+N} stetig ändert. Für jedes $x \epsilon M + N$ haben wir dabei $\Phi_0(x) = \varphi_0(x)$ und $\Phi_1(x) = q$.

In dieser Weise haben wir in K_n^{M+N} beliebige Funktion $\varphi_0 \epsilon K_n^{M+N}$ durch ein aus allen Funktionen Φ_t bestehendes Streckenbild mit der Funktion $\Phi_1(x) =$ constans verbunden. Die letzt genannten Funktionen bilden aber in K_n^{M+N} eine mit K_n isometrische, also zusammenhängende Menge; der Raum K_n^{M+N} ist somit zusammenhängend, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Die Eigenschaft R ist punktweise additiv.*

Dies geht daraus hervor, dass eine Summe zweier absoluten Retrakte deren Durchschnitt ein absoluter Retrakt ist, selbst ein absoluter Retrakt ist [13]), und dass die einpunktige Menge ein absoluter Retrakt ist [14]).

3. Satz. *Wenn eine punktweise additive Eigenschaft W jeder einpunktigen Menge, jedem einfachen Bogen und jedem Zykel von S zukommt, so kommt sie auch allen Redukten R von S zu.*

Beweis. Durch einfache Induktion wird bewiesen, dass jede gewöhnliche Baumkurve die Eigenschaft W besitzt. Nun wollen wir zeigen, dass die Eigenschaft W jedem Redukt R mit $n+1$ mehrpunktigen Zyklen zukommt, wenn sie den Redukten mit $\leqslant n$ mehrpunktigen Zyklen zukommt. Ist Z ein Zykel von R, so sind die Komponenten von $\overline{R - Z}$ paarweise fremde Redukte von S mit höchstens n mehrpunktigen Zyklen. Sie haben also die Eigenschaft W. Da jede dieser Komponenten mit Z genau einen gemeinsamen Punkt hat [15]) und W punktweise additiv vorausgesetzt ist, so erhalten wir durch einfache Induktion die Behauptung des Satzes, w. z. b. w.

Auf Grund der Hilfssätze 1, 2 u. 3 ergibt sich daraus der

Korollar 1. *Die Eigenschaften F, H_n und R gehen von Zyklen eines Streckenbildes auf seine Redukte über.*

[13]) S. N. Aronszajn u. K. Borsuk, dieser Band, S. 194.
[14]) K. Borsuk, Fund. Math. XVII, S. 153, (α).
[15]) l. c., S. 309.

In der Tat, besitzt sowohl jede einpunktige Menge als jeder einfache Bogen alle drei Eigenschaften $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{H}_n$ und $\boldsymbol{R}$ [16]).

Insbesondere folgt daraus der

Korollar 2. *Die gewöhnlichen Baumkurven sind absolute Retrakte.*

4. Satz. *Jeder Redukt R eines Streckenbildes S ist ein Retrakt* [17]) *desselben.*

Beweis. Sei $E_1, E_2 \ldots$ die Folge der betreffenden Endstücke von S und f_n die auf der Baumkurve (siehe 1, 8⁰) $R \cdot E_n$ durch die Formel $f_n(x) = x$ definierte Funktion. Auf Grund des letzen Korollars hat [18]) f_n eine *Erweiterung* φ_n [19]) auf die ganze Menge E_n relativ zu $R \cdot E_n$. Demnach zieht wegen 1. 6⁰ u. 7⁰ die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \textit{für jedes } x \in R, \\ \varphi_n(x) & \textit{für jedes } x \in E_n, \end{cases} \tag{7}$$

das Streckenbild S auf den Redukt R zusammen [20]). w. z. b. w.

Es ist zu bemerken, dass im Falle, wo R ein ε-Redukt ist, erfüllt die durch (7) definierte Funktion φ die Ungleichung:

$$\varrho[x, \varphi(x)] \leqslant \varepsilon \quad \textit{für jedes} \quad x \in S. \tag{8}$$

Da jedes Zykel von S ein Redukt von S ist, so ergibt sich der

Korollar. *Jeder Zykel eines Streckenbildes ist ein Retrakt desselben.*

[16]) Was die Eigenschaften $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{R}$ betrifft, siehe mein Artikel, Fund. Math. XVII, S. 160 u. 161. Die Eigenschaft $\boldsymbol{H}_n$ ist im euklidischen n-dimensionalen Raume (für $n > 1$) mit dem Nicht-zerschneiden desselben äquivalent (s. mein Artikel, Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume, Math. Ann. (z. Z. im Druck). Ein direkter Beweis der Eigenschaft $\boldsymbol{H}_n$ ist einfach. Man kann z. B. sich auf den allgemeinen (und sehr leicht beweisbaren) Satz stützen, dass für zwei Kontinua A und B der Zusammenhang des Raumes A^A denselben des Raumes B^A (und A^B) impliziert und den Satz anwenden, dass der Raum $[0,1]^{[0,1]}$ zusammenhängend ist (s. mein Artikel in Fund. Math. XVII, S. 170).

[17]) Vrgl. Fussnote [5]), S. 199.

[18]) da $R \cdot E_n$ ein absoluter Retrakt ist (l. c., S. 161).

[19]) d. h., dass φ_n eine stetige in der Menge E_n definierte Funktion ist, für welche $\varphi_n(E_n) \subset R \cdot E_n$ und $\varphi_n(x) = f_n(x)$ für jedes $x \in R \cdot E_n$ gilt.

[20]) Vrgl. Fussnote [5]), S. 199.

5. Satz. *Es sei K ein kompakter Raum. Gibt es für jedes n eine stetige Funktion φ_n, wobei:*

1⁰ $\varphi_n(K) \subset M_n \subset K$,

2⁰ *M_n die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$ hat,*

3⁰ $\varrho[x, \varphi_n(x)] \leqslant \dfrac{1}{n}$ *für jedes* $x \in K$,

so hat auch K die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$.

Beweis. Da K kompakt ist, so genügt es zu zeigen, dass es für jede stetige Funktion f, wo $f(K) \subset K$, und für jedes natürliches n einen Punkt $x_n \in K$, gibt, so dass $\varrho[x_n, f(x_n)] \leqslant \frac{1}{n}$ gilt. Ist φ_n eine stetige die Bedingungen 1⁰ u. 3⁰ erfüllende Funktion, so haben wir $\varphi_n f(M_n) \subset \varphi_n f(K) \subset \varphi_n(K) \subset M_n$. Wegen 2⁰ gibt es also ein $x_n \in M_n$ für welches $\varphi_n f(x_n) = x_n$ gilt. Demnach gibt auf Grund von 3⁰, $\varrho[x_n, f(x_n)] \leqslant \frac{1}{n}$, w. z. b. w.

6. Hauptsatz 1 [21]) *Die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$ ist zyklich extensiv und reduktiv.*

Beweis. Da die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$ von einer Menge auf alle Retrakte derselben übergeht [22]), so ist sie nach dem Korollar von 4. reduktiv. Andererseits, ergibt 1, 9⁰, der Korollar 1 von 3. die Ungleichung (8) und schliesslich der Satz 5 die zyklische Extensivität von $\boldsymbol{F}$.

Korollar 1 [23]). *Die Baumkurven besitzen die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$.*

Korollar 2 [24]). *Unter den ebenen Streckenbilder sind diejenigen, welche die Ebene nicht zerschneiden, durch die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$ charakterisiert.*

[21]) Ein Sonderfall dieses Satzes wurde von W. L. Ayres bewiesen. (s. Fund. Math. XVI, S. 335–6).

[22]) Fund. Math. XVII, l. c., S. 155.

[23]) Diese Behauptung wurde zum ersten Mal von W. Scherrer bewiesen (s. Math. Zeitschr. XXIV, S. 125—130).

[24]) Vrgl. Fussnote [21]).

Beweis. Erstens, ist jedes ebene, und die Ebene zerschneidende Streckenbild nicht *unikohärent* [25]); es besitzt also die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$ nicht [26]).

Zweitens, sind die Zyklen eines ebenen Streckenbildes, welches kein Schnitt ist, topologische Kreise oder einzelne Punkte [27]); daher besitzen [28]) sie die Eigenschaft $\boldsymbol{F}$. Daraus und aus Hauptsatz 1, folgt unsere Behauptung.

7. **Hauptsatz 2.** *Die Eigenschaften* $\boldsymbol{H}_n$ ($n=2, 3, \ldots$) *sind zyklisch extensiv und reduktiv.*

Beweis. Einerseits, ist nach Korollar von 4. jeder Zykel Z von S ein Retrakt von S und daher ist der Raum K_n^Z mit einem Retrakte des Raumes K_n^S isometrisch [29]); der Zusammenhang von K_n^S hat also den Zusammenhang von K_n^Z zur Folge [30]).

Andererseits, ist $f \in K_n^S$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart dass für jedes Punktepaar $x, y \in S$.

$$(9) \qquad \varrho(x, y) \leqslant \varepsilon \quad \textit{impliziert} \quad \varrho[f(x), f(y)] \leqslant 1.$$

Es sei nun R ein ε-Redukt von S und φ eine S auf R zusammenziehende und die Ungleichung (8) erfüllende Funktion. Wir betrachten die durch folgende Formel definierte Funktion $\psi \in K_n^R$:

$$(10) \qquad \psi(x) = f(x) \quad \textit{für jedes} \quad x \in R.$$

Ist jeder Zykel von S von der Eigenschaft $\boldsymbol{H}_n$, so hat nach Korollar 1 von 3. auch der Redukt R dieselbe Eigenschaft. Nach Hilfssatze 2 von 2. gibt es also im Raume K_n^R einen, von Funktionen ψ_t (wo $0 \leqslant t \leqslant 1$) bestehenden einfachen Bogen, wo $\psi_0(x) = $ constans und $\psi_1(x) = \psi(x)$ für jedes $x \in R$ ist.

Die Funktionen $f_t(x) = \psi_t\varphi(x)$ für $x \in S$ bilden also in K_n^S einen einfachen Bogen mit Endpunkten $f_0(x) = $ constans und $f_1 = \psi\varphi$.

[25]) C. Kuratowski, Fund. Math. VIII, S. 148.

[26]) C. Kuratowski, Fund. Math. XIV, S. 307. Ein anderer Beweis ist von mir gegeben worden, Fund. Math. XVII, S. 188.

[27]) G. T. Whyburn, Amer. Journ. of Math. 50, S. 188.

[28]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 71, S. 115.

[29]) K. Borsuk, Fund. Math. XVII, S. 168.

[30]) Siehe z. B. Hausdorff, *Mengenlehre*, S. 198.

Nach (8), (10) und (9) haben wir:

$$\varrho[f_1(x), f(x)] = \varrho[f\varphi(x), f(x)] \leqslant 1 \quad \textit{für jedes} \quad x \in P,$$

also gehören nach (6) die Funktionen f und f_1 und daher auch f und f_0 zu einer und derselben Komponente von K_n^S. Da aber die Funktion f eine beliebige war, so ist der Raum K_n^S zusammenhängend, w. z. b. w.

Korollar 1 [31]). *Damit ein Streckenbild unikohärent sei, ist es notwendig und hinreichend, dass jeder seiner Zyklen unikohärent sei. (Zyklische Extensivität und Reduktivität der Unikohärenz).*

Dies ist ein Sonderfall des Hauptsatzes 2, da für Streckenbilder fällt Unikohärenz mit der Eigenschaft $\boldsymbol{H}_2$ zusammen [32]).

Korollar 2 [33]). *Ein im euklidischen n-dimensionalen Raume liegendes Streckenbild zerschneidet diesen Raum dann und nur dann nicht, wenn keiner seiner Zyklen diesen Raum zerschneidet.*

Beweis. Dies ergibt sich auf Grund des Hauptsatzes 2 aus dem Satze, nach welchem in eudlidischen Räumen die Eigenschaft $\boldsymbol{H}_n$ mit der Nichtzerschneidung des Raumes zusammenfällt [34]).

8. Es sei f eine, einen kompakten Raum K auf ein Redukt R eines Streckenbildes $S \subset K$ zusammenziehende Funktion. Gibt es für die Folge $\{E_i^R\}$ der Endstücke eine Folge von paarweise fremden Umgebungen (offenen Mengen) $\{U_i\}$ der Mengen $E_i^R - R$, derart dass

1⁰. $\overline{U}_{i_1} \cdot \overline{U}_{i_2} \subset E_{i_1}^R \cdot E_{i_2}^R$ *für je* $i_1 \neq i_2$,

2⁰. *jedes* U_i *durch* f *auf eine Teilmenge von* $E_i^R \cdot R$ *abgebildet wird*,

so nenne ich f eine K *auf* R *zusammenziehende* U*-Funktion.*

Ist R ein ε-Redukt von S und f_ε eine U-Funktion, so folgt aus 2⁰:

3⁰. $\varrho[x, f(x)] \leqslant \varepsilon$ *für jedes* $x \in S$.

[31]) Dieser Satz stammt von C. Kuratowski, Fund. Math. XIV, S. 139.

[32]) K. Borsuk, Fund. Math. XVII, S. 195.

[33]) Für $n=2$ wurde dieser Satz von G. T. Whyburn bewiesen (s. Amer. Journ. of Math. 50, S. 167—194).

[34]) K. Borsuk, Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume. Math. Ann. (z. Z. Druck).

Hilfssatz. *Ist jeder Zykel Z eines in Q_ω[35]) liegenden Streckenbildes S ein absoluter Retrakt, und ist ferner R_ε ein ε-Redukt von S und f_ε eine Q_ω auf R_ε zusammenziehende U-Funktion, so gibt es für jedes η, wo $0<\eta<\varepsilon$, einen η-Redukt R_η von S und eine Q_ω auf R_η zusammenziehende U-Funktion f_η, für welche $\varrho(f_\varepsilon, f_\eta)\leqslant\varepsilon$ ist.*

Beweis. Nach 1, 7° gibt es ein kleinstes natürliches n, derart dass

(11) $$\delta(E_i^{R_\varepsilon})\leqslant\eta \quad \textit{für jedes} \quad i>n.$$

Auf Grund von 1, 2°, 8° und 9°, gibt es für jedes $i\leqslant n$ einen η-Redukt R_i von $E_i^{R_\varepsilon}$, für welchen

(12) $$E_i^{R_\varepsilon}\cdot R_\varepsilon\subset R_i$$

gilt. Setzen wir also

(13) $$R_\eta=R_\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}R_i,$$

so ist es leicht zu ersehen, dass R_η ein Redukt von S, und zwar *ein η-Redukt von S ist*, denn die Endstücke E^{R_η} von S entweder Endstücke E^{R_i} von Endstücken $E_i^{R_\varepsilon}$ für $i\leqslant n$ sind, oder (für $i>n$) mit den Endstücken $E_i^{R_\varepsilon}$ von S zusammenfallen, so dass der Durchmesser der ersteren nach Definition von R_i und der letzteren nach (11), $\leqslant\eta$ ist. Nun setzen wir:

(14) $$E_i^{R_\eta}=E_i^{R_\varepsilon} \quad \textit{für} \quad i>n$$

und bezeichnen für jedes $i\leqslant n$ mit $E_{i,j}$ die Endstücke E^{R_i} von $E_i^{R_\varepsilon}$. Ferner, bezeichnen wir für jedes $x\in E_{i,j}-R_i$ mit $K(x)$ die offene Kugel um x in Q_ω vom Radius

(15) $$r(x)=\tfrac{1}{3}\varrho\left[x,\, R_\eta+\sum_{k\neq j}E_{i,k}+(Q_\omega-U_i)\right]$$

und setzen:

(16) $$U_{i,j}=\sum_{x\in E_{i,j}-R_i}K(x).$$

Da $E_{i,j}\cdot R_i$ nach 1, 8° eine gewöhnliche Baumkurve, also nach

[35]) Q_ω bezeichnet hier den Fundamentalwürfel des Hilbertschen Raumes („Fundamentalquader" von K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig u. Berlin, 1928, S. 13—14).

Korollar 2 von 3. ein absoluter Retrakt ist, so hat[36]) eine jede Funktion $\varphi_{i,j}$, die wir für $x\in E_{i,j}\cdot R_i$ durch die Formel

(17) $$\varphi_{i,j}(x)=x$$

definieren, eine Erweiterung $\psi_{i,j}$ auf $E_{i,j}\cdot R_i+U_{i,j}$ relativ zu $E_{i,j}\cdot R_i$.

Nun definieren wir eine Funktion $\varphi_i(x)$ für $x\in R_i+\Sigma\,\overline{U}_{i,j}+ +\overline{U}_i(Q_\omega-U_i)$ folgendermassen:

(18) $$\varphi_i(x)=x \quad \textit{für} \quad x\in R_i,$$

(19) $$\varphi_i(x)=\psi_{i,j}(x) \quad \textit{für} \quad x\in\overline{U}_{i,j},$$

(20) $$\varphi_i(x)=f_\varepsilon(x) \quad \textit{für} \quad x\in\overline{U}_i(Q_\omega-U_i).$$

Da, nach 1, 6° und (15), $r(x)>0$ ist, so ist nach (15) und (16)
$$\overline{U}_{i,j}\cdot R_i=\overline{E_{i,j}-R_i}\cdot R_i\subset E_{i,j}\cdot R_i.$$

Infolgedessen stimmen nach (17) die Werte (18) u. (19) von $\varphi_i(x)$ auf dem gemeinsamen Teil von R_i u. $\overline{U}_{i,j}$ überein. Andererseits, da $R_i\cdot(Q_\omega-U_i)\subset R_\varepsilon$ und nach (15) und (16) $[\sum_j\overline{U}_{i,j}]\cdot[\overline{U}_i\cdot(Q_\omega-U_i)]\subset R_\varepsilon$ ist, so liegt die Menge $[R_i+\sum_j\overline{U}_{i,j}]\cdot \cdot[\overline{U}_i\cdot(Q_\omega-U_i)]$ in R_ε; da ferner für f_ε, als für eine Q_ω auf R_ε zusammenziehende Funktion, $f_\varepsilon(x)=x$ für jedes $x\in R_\varepsilon$ gilt, so stimmen auch die Werte (20) von $\varphi_i(x)$ mit den Werten (18) u. (19) in den betreffenden Punkten x überein. Die Funktion φ_i ist also stetig.

Da die Wertenmenge von φ_i nach Definitionen von $f_\varepsilon(x)$ und von $\psi_{i,j}(x)$ laut (18), (19) u. (20) in R_i liegt, die nach Korollar 1 von 3. ein absoluter Retrakt ist, so hat[37]) φ_i eine Erweiterung ψ_i auf $\overline{U}_i$ relativ zu R_i. Wir setzen also:

(21) $$f_\eta(x)=\psi_i(x) \quad \textit{für} \quad x\in\overline{U}_i, \quad i=1,2,\dots,n,$$

(22) $$f_\eta(x)=f_\varepsilon(x) \quad \textit{für} \quad x\in Q_\omega-\sum_{i=1}^{n}\overline{U}_i.$$

Nach (20) u. (22) ist $f_\eta(x)$ stetig und auf ganzem Q_ω definiert;

[36]) Vrgl. Fussnote [18]), S. 204.
[37]) Ebenda.

nach Definition von ψ_i u. (13) liegen ihre Werte in R_{η_i} und nach Definition von f_ε, (13) u. (18) ist $f_\eta(x)=x$ für $x\in R_{\eta_i}$. Demnach zieht tatsächlich f_η den Raum Q_ω auf R_η zusammen.

Um nun zu zeigen, dass f_η eine U-Funktion ist, betrachten wir als Umgebungen von Mengen $E^{R_\eta}-R_\eta$ von S die Mengen $U_{i,j}$ für $E_{i,j}$ mit $i\leqslant n$ und die Mengen U_i für $E_i^{R_\varepsilon}$, wo $i>n$. Auf Grund von 8, 1° für U_i, sowie von (15) und (16) für $U_{i,j}$, stellt man fest, dass für sämtliche diese Umgebungen die Bedingung 8, 1° erfüllt ist. Ferner, da für $i>n$ nach (14) u. (13) $E_i^{R_\varepsilon}\cdot R_\varepsilon\subset E_i^{R_\eta}\cdot R_\eta$ ist, so hat die Gültigkeit der Begingung 8, 2° für R_ε die Gültigkeit derselben für R_η bei $i>n$ zur Folge. Bei $i\leqslant n$ ist dieselbe durch (19) u. (21) versichert, so dass f_η tatsächlich eine U-Funktion ist. Schliesslich, sind nach (22) die Funktionenwerte von f_η und f_ε nur für $x\in\overline{U_i}$ bei $i\leqslant n$ verschieden. Dann gilt aber einerseites nach Definition von $\psi_i(x)$ und nach (21)

$$f_\eta(x)\in R_i\subset E_i^{R_\varepsilon}$$

und nach 8, 2° für $f_\varepsilon(x)$, wo $x\in\overline{U_i}$, als für eine U-Funktion:

$$f_\varepsilon(x)\in E_i^{R_\varepsilon}.$$

Demnach, da R_ε ein ε-Redukt von S ist, gilt $\varrho(f_\varepsilon(x),f_\eta(x))\leqslant\leqslant\delta(E_i^{R_\varepsilon})\leqslant\varepsilon$, w. z. b. w.

9. Haupsatz 3. *Die Eigenschaft* $\boldsymbol{R}$ *ist reduktiv und extensiv.*

Beweis. Die Reduktivität von $\boldsymbol{R}$ ergibt sich nach dem Korollar von 4. aus dem Satze, dass jeder Retrakt eines absoluten Retraktes selbst ein absoluter Retrakt ist [38]).

Um andererseits, die Extensivität von $\boldsymbol{R}$ zu beweisen, kann man sich auf den Fall $S\subset Q_\omega$ beschränken [39]) und zeigen dass dann S ein Retrakt von Q_ω ist [40]). Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass auf Grund von 8, 3° und des letzen Hilfssatzes, kann mann durch Induktion eine Folge $\{f_n\}$ von U-Funktionen angeben für welche

[38]) K. Borsuk, Fund. Math. XVII, S, 154.

[39]) nach dem bekannten Einbettungssatze von P. Urysohn, nach welchem jeder separable metrische Raum mit einer Teilmenge von Q_ω homöomorph ist (vgl. z. B. K. Menger, *Dimensionstheorie*, S. 57).

[40]) Fund. Math. XVII, S. 160.

$$1)\quad \varrho(f_n,f_{n+1})\leqslant\frac{1}{2^n}\quad \textit{für}\quad n=1,2,\dots,$$

$$2)\quad \varrho[f_n(x),x]\leqslant\frac{1}{2^n}\quad \textit{für}\quad x\in S$$

gilt. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit der Raumes S^{Q_ω} [41]) die Existenz von stetiger Funktion:

$$f(x)=\lim_{n=\infty}f_n(x)\in S^{Q_\omega},$$

für die, nach 2), $f(x)=x$ für jedes $x\in S$ ist, w. z. b. w.

Korollar 1. *Die Baumkurven sind absolute Retrakte,*

weil ihre Zyklen einpunktig, also absolute Retrakte sind.

Korollar 2. *Ebene absolute Retrakte sind mit den die Ebene nicht zerschneidenden Streckenbilder identisch.*

Beweis. Erstens, ist jeder absolute Retrakt ein Streckenbild [42]) und, falls er in euklidischem n-dimensionalen Raume R_n liegt, zerschneidet er diesen Raum nicht [43]). Zweitens, da jeder Zykel eines die Ebene nicht zerschneidenden Streckenbildes S entweder ein Punkt oder ein topologischer Kreis ist [44]), sind alle Zyklen von S absolute Retrakte [45]) und dann folgt unsere Behauptung unmittelbar aus dem Hauptsatze 3.

10. Zum Abschluss wollen wir sämtliche Retrakte der Ebene topologisch charakterisieren. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgenden

Hilfssatz. *Sind die Teilmengen* $A_1, A_2,\dots$ *eines metrischen Raumes* M *absolute Retrakte und*

1°. $A_n\subset A_{n+1}$,

2°. $\prod_{n=1}^{\infty}\overline{(A-A_n)}=0$ wo $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ ist.

so ist die Menge A *ein Retrakt von* M.

[41]) l. c., S. 164.

[42]) l. c., S. 163, 1°.

[43]) l. c., S. 163, 4°.

[44]) Vrgl. Fussnote [37]), S. 206.

[45]) Fund. Math. XVII, l. c., S. 160, Beispiel.

Beweis. Man kann voraussetzen, dass $A - A_n \neq 0$ für $n=1,2,\ldots$ ist. Wir setzen:

$$(23) \qquad M_n = \underset{x \in M}{E}\left[\varrho(x, \overline{A - A_n}) \geqslant \frac{1}{n}\right].$$

Die Mengen M_n sind demnach im Raume M abgeschlossen und

$$(24) \qquad M_n \subset M_{n+1} - \overline{M - M_{n+1}},$$

$$(25) \qquad M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Wir betrachten nun eine Folge von Funktionen $\{f_n\}$, wo

f_1 eine beliebige den Raum M auf A_1 zusammenziehende Funktion ist

und f_{n+1} auf Grund der, den Raum M auf A_n zusammenziehenden Funktion f_n folgendermassen definiert wird:

(26) *f_{n+1} ist eine Erweiterung auf M relativ zu A_{n+1} der Funktion φ* die auf der abgeschlossenen Menge $M_n + A_{n+1}$ durch die Formeln

$$(27) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = f_n(x) & \textit{für} \quad x \in M_n, \\ \varphi(x) = x & \textit{für} \quad x \in A_{n+1}. \end{cases}$$

gegeben ist.

Da nach (23), $M_n \cdot A_{n+1} \subset A_n$ ist, so sind die Formeln (27) übereinstimmend.

Ist $x \in M_n$, so gilt nach dieser Definition für $m > n$, $f_m(x) = f_n(x)$; infolgedessen und nach (25) gibt es für jedes $x \in M$ eine Funktion

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x).$$

Ausserdem, ist auf der offenen Menge $M_n - \overline{M - M_n}$ die Funktion $f(x)$ durch die Formel $f(x) = f_n(x)$ definiert, also in jedem Punkte $x \in M_n - \overline{M - M_n}$ stetig. Da aber nach (24) und (25) $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[M_n - \overline{M - M_n}]$ gilt, so ist die Funktion f überall stetig und da (nach (26) und (27)) für jedes $x \in M$, $f(x) \in A$ und für jedes $x \in A$, $f(x) = x$ gilt, so ist f eine den Raum M auf A zusammenziehende Funktion, w. z. b. w.

Satz. *Die Retrakte der Ebene sind mit den ebenen nichtleeren abgeschlossenen, zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Mengen, deren Komplementärmengen aus lauter unbeschränkten Komponenten bestehen, identisch.*

Beweis. Nach einem allgemeinen Satze[46]) gelten alle diese Bedingungen für Retrakte der euklidischen Räume.

Es sei, andererseits, A eine ebene Menge, die alle diese Bedingungen erfüllt, und $p \in A$. Es bezeichne S_k ein Streckenbild mit folgender Eigenschaft [47]):

$$(28) \qquad \underset{x \in A}{E}[\varrho(x, p) \leqslant k] \subset S_k \subset A.$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass die Menge

$$(29) \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} S_k + \sum_{i} G_i,$$

wo $\{G_i\}$ die Folge aller beschränkten Komponenten der Komplementärmenge von $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k$ bezeichnet, ein die Ebene nicht zerschneidendes Streckenbild, also nach Korollar 2 von **9.** ein absoluter Retrakt ist. Da nach (28) und (29)

$$\varrho(p, A_{n+1} - A_n) = n, \quad \textit{wenn} \quad A_{n+1} - A_n \neq 0,$$

ist, so gilt $A_n \subset A_{n+1}$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\overline{(A - A_n)} = 0$ und $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und demnach alle Voraussetzungen des Hilfssatzes **10.** erfüllt sind, wonach die Menge A ein Retrakt der Ebene ist, w. z. b. w.

[46]) l. c., S. 155 u. 162.

[47]) Die Existenz eines solchen Streckenbildes wurde von S. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, S. 187 bewiesen.