sance du continu. En effet, l'ensemble H étant non vide, il existe un nombre réel $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ appartenant à H, et il résulte de la définition de E que tout nombre réel $0, b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3 \ldots$, où $c_1, c_2, c_3, \ldots$ est une suite infinie quelconque de chiffres décimaux, appartient à E: ces nombres forment évidemment un sous ensemble de E de puissance du continu. L'ensemble E étant un sous-ensemble de l'ensemble de tous les nombres réels, il en résulte (sans faire appel à l'axiome du choix) d'après le théorème de Cantor-Bernstein que l'ensemble E est de puissance du continu.

Or, l'ensemble E n'est pas effectivement de puissance du continu, puisqu'on pourrait dans ce cas définir effectivement une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, dont l'ensemble de valeurs (toutes distinctes) est E; par conséquent on pourrait nommer un élément de E, p. e. $f(0) = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, donc aussi un élément de H $(0, a_1 a_3 a_5 \ldots)$ ce qui est impossible dans l'état actuel de la science.

Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus.

Par

N. Aronszajn (Paris) et K. Borsuk (Varsovie).

1. Définitions [1]. Etant donnée une fonction continue φ définie sur un sous-ensemble A d'un espace topologique [2] T, une fonction continue ψ définie sur T est dite *extension de la fonction φ sur T relative à un ensemble B*, lorsque:

1° *La fonction ψ est définie sur T,*
2° $\psi(T) \subset B$,
3° $\psi(x) = \varphi(x)$ *pour tout* $x \in A$.

En particulier, si $\varphi(x) = x$ pour chaque $x \in A$, une extension de φ sur T relative à A est dite *fonction rétractante T en A*. En cas d'existence d'une fonction rétractante T en A, nous disons que *A est un rétracte de T.*

Nous appelons un espace *A rétracte absolu*, lorsqu'il remplit la condition suivante:

(α) *A est un espace séparable et métrisable* [3] *et constitue un rétracte de chacun de ses sur-espaces métrisables.*

La condition (α) est équivalente [4] à la condition

[1] Cf. K. Borsuk, Fund. Math. XVII, p. 153, **2**, p. 156, **8** et p. 159, **15**.
[2] au sens de Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 228.
[3] c. à d. que la notion de limite dans T peut être définie à l'aide d'une métrique (distance). Cf. M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1927, p. 61, espace $\mathfrak{D}$.
[4] K. Borsuk, l. c., p. 160, **18**.

(β) *A est une image homéomorphe d'un rétracte du cube fondamental Q_ω*[5]) *de l'espace de Hilbert.*

D'après (β) les rétractes absolus sont compacts en soi.

2. Théorème. *Soient C un espace métrisable, $C = A + B$, A et B fermés dans C et $A \cdot B$ un rétracte de C. Dans ces conditions, pour que C soit un rétracte absolu, il faut et il suffit que A et B le soient.*

Démonstration. 1°. Admettons que A et B sont des rétractes absolus. Pour prouver qu'il en est de même de C, il suffit d'après (α) de montrer que C est rétracte d'un espace arbitraire E métrisable et contenant C.

Les ensembles $A - B$ et $B - A$ étant séparés [6]), comme disjoints et ouverts dans C, il existe [7]) dans l'espace métrisable E un ensemble ouvert U tel que

(1) $$A - B \subset U \subset \overline{U} \subset E - (B - A) = (E - B) + A \cdot B.$$

Posons:

(2) $$P = \overline{U} + A \cdot B \quad \text{et} \quad Q = (E - U) + A \cdot B.$$

A et B comme rétractes absolus sont compacts en soi; il en est de même de $A \cdot B$ donc, d'après (2), les ensembles P, Q et $P \cdot Q$ sont fermés dans E. En outre on obtient de (1) et (2):

(3) $$A \subset P, \quad B \subset Q.$$

(4) $$P + Q = E,$$

(5) $$A \cdot P \cdot Q = B \cdot P \cdot Q = A \cdot B.$$

Comme un rétracte de C, l'ensemble $A \cdot B$ est aussi un rétracte de A, car $A \cdot B \subset A \subset C$. Donc, A étant un rétracte absolu, il en est de même de $A \cdot B$[8]). Il en résulte, d'après (2), l'existence d'une fonction φ rétractant $P \cdot Q$ en $A \cdot B$. En s'appuyant sur (5), nous

[5]) c. à d. le sous-ensemble compact de l'espace de Hilbert composé de points $\{x^n\}$ où $0 \leqslant x^n \leqslant \frac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Voir p. ex. K. Menger, *Dimensionstheorie* Leipzig u. Berlin, 1928, p. 14.

[6]) c. à d. que $\overline{(A - B)} \cdot (B - A) + (A - B) \cdot \overline{(B - A)} = 0$.

[7]) H. Tietze, Math. Ann. 88, p. 310.

[8]) K. Borsuk, l. c., p. 154, 14.

définirons sur l'ensemble $A + P \cdot Q$, resp. $B + P \cdot Q$, une fonction f_1 resp. f_2, comme suit:

(6) $$\begin{cases} f_1(x) = \varphi(x) & \text{pour} \quad x \in P \cdot Q, \\ f_1(x) = x & \text{pour} \quad x \in A, \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} f_2(x) = \varphi(x) & \text{pour} \quad x \in P \cdot Q, \\ f_2(x) = x & \text{pour} \quad x \in B. \end{cases}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont évidemment continues.

A étant un rétracte absolu, il existe [9]) une extension ψ_1 de la fonction f_1 sur l'ensemble $P \supset A + P \cdot Q$ relative à l'ensemble A, et, pareillement, une extension ψ_2 de f_2 sur $Q \supset B + P \cdot Q$ relative à B. Posons:

(8) $$\begin{cases} \psi(x) = \psi_1(x) & \text{pour} \quad x \in P, \\ \psi(x) = \psi_2(x) & \text{pour} \quad x \in Q. \end{cases}$$

En vertu de (4), (6) et (7), les ensembles P et Q étant fermés, les formules (8) définissent une fonction continue ψ rétractante E en $A + B = C$.

2°. Supposons maintenant que C est un rétracte absolu et prouvons qu'il est de même de A et B.

En effet, $A \cdot B$ étant par hypothèse un rétracte de C et φ une fonction rétractante C en $A \cdot B$, posons:

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \text{pour} \quad x \in A, \\ f(x) &= \varphi(x) & \text{pour} \quad x \in B. \end{aligned}$$

A et B étant par hypothèse fermés dans C, on aperçoit aisément que f est une fonction rétractante C en A. Donc, comme rétracte d'un rétracte absolu C, A est aussi un rétracte absolu [8]), c. q. f. d.

La question suivante reste ouverte: *est-il vrai que A, B et $C = A + B$ étant des rétractes absolus, il en est toujours de même de $A \cdot B$?*

3. Définition. Soit $\{E_n\}$ une suite (finie ou infinie) d'ensembles quelconques. Nous désignerons par $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \ldots$ ou par $\mathfrak{P} E_n$ l'ensemble de toutes les suites $\{x_n\}$ où $x_n \in E_n$. L'ensemble $\mathfrak{P} E_n$ sera dit *produit combinatoire des ensembles E_n*.

Lorsque E_n sont des espaces topologiques, nous convenons d'appeler un ensemble $\mathfrak{P} U_n \subset \mathfrak{P} E_n$ *entourage* d'un point $\{x_n\} \in \mathfrak{P} E_n$, si

[9]) l. c., p. 161, 19.

U_n est pour $n=1,2,\ldots$ un entourage de x_n dans E_n et si $U_n=E_n$ à partir d'un certain n. On vérifie aisément que de cette manière $\mathfrak{P}E_n$ devient un espace topologique avec la notion de limite définie comme il suit:

(9) *Pour qu'une suite de points* $p_k=\{x_n^{(k)}\}\in\mathfrak{P}E_n$ $(k=1,2,\ldots)$ *converge vers le point* $p=\{x_n\}\in\mathfrak{P}E_n$, *il faut et il suffit que l'on ait* $\lim\limits_{k=\infty}x_n^{(k)}=x_n$ *pour tout* $n=1,2,\ldots$

Si les espaces E_n sont métrisables, il en est de même de $\mathfrak{P}E_n$. On peut p. ex. définir une métrique convenable ϱ dans l'espace $\mathfrak{P}E_n$ par la formule [10])

$$\varrho(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varrho_n(x_n,y_n)}{2^n[1+\varrho_n(x_n,y_n)]},$$

où ϱ_n désigne la métrique de E_n.

4. Lemme. *Si pour tout* $n=1,2,\ldots$ A_n *est un rétracte de* E_n, *alors,* $\mathfrak{P}A_n$ *est un rétracte de* $\mathfrak{P}E_n$.

Démonstration. Soit φ_n une fonction rétractante E_n en A_n. Posons:

(10) $$\varphi(\{x_n\})=\{\varphi_n(x)\}\quad \textit{pour tout}\quad \{x_n\}\in\mathfrak{P}E_n.$$

Cette fonction effectue la rétraction de $\mathfrak{P}E_n$ en $\mathfrak{P}A_n$, car:

1° *elle est continue,*

puisque pour $p=\lim\limits_{k=\infty}p_k$, où $p_k=\{x_n^{(k)}\}\in\mathfrak{P}E_n$ et $p=\{x_n\}\in\mathfrak{P}E_n$, on a d'après (9): $\lim\limits_{k=\infty}x_n^{(k)}=x_n$, donc, vu la continuité de φ_n, $\lim\limits_{k=\infty}\varphi_n(x_n^{(k)})=\varphi_n(x_n)$, ce qui entraîne selon (9) et (10): $\lim\limits_{k=\infty}\varphi(p_k)=\varphi(p)$

2° $\varphi(\mathfrak{P}E_n)\subset\mathfrak{P}A_n$,

parce que pour $\{x_n\}\in\mathfrak{P}E_n$ on a par définition $x_n\in E_n$, donc $\varphi_n(x_n)\in A_n$ et $\varphi(\{x_n\})=\{\varphi_n(x_n)\}\in\mathfrak{P}A_n$

3° *pour* $\{x_n\}\in\mathfrak{P}A_n$ *on a* $\varphi(\{x_n\})=\{x_n\}$

en vertu de (10), puisque $\varphi_n(x_n)=x_n$ pour tout $x_n\in A_n$.

[10]) Les métriques de ce genre ont été introduites par M. Fréchet, Rendi conti del Circ. Matem. di Palermo XXII, p. 1—74.

5. Lemme. *L'ensemble* $Q_\omega\times Q_\omega\times\ldots$ *est homéomorphe à* Q_ω.

Démonstration. Faisons correspondre à chaque point $p=\{q_n\}\in Q_\omega\times Q_\omega\times\ldots$ où $q_n=\{x_m^{(n)}\}\in Q_\omega$ et $0\leqslant x_m^{(n)}\leqslant\frac{1}{m}$ pour $m=1,2,\ldots$, le point $f(p)=\left\{\frac{l_n}{n}x_{l_n}^{(k_n)}\right\}$ où les nombres naturels k_n et l_n sont définis par la formule

$$n=2^{k_n-1}(2l_n-1).$$

Comme cette dernière formule donne une correspondence biunivoque entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des couples de nombres naturels, on prouve aisément que f constitue une transformation homéomorphe de $Q_\omega\times Q_\omega\times\ldots$ en Q_ω, c. q. f. d.

6. Théorème. *Si les ensembles* A_n $(n=1,2,\ldots)$ *sont des rétractes absolus, il en est de même de l'ensemble* $\mathfrak{P}A_n$.

Démonstration. En vertu de (β) nous pouvons supposer que A_n est un sous-ensemble de Q_ω. Il en résulte d'après **4.** que $\mathfrak{P}A_n$ est un rétracte de l'ensemble $Q_\omega\times Q_\omega\times\ldots$ qui est d'après **5.** homéomorphe à Q_ω. Donc. selon (β), $\mathfrak{P}A_n$ est un rétracte absolu, c. q. f. d.

En particulier, *le produit combinatoire d'un nombre fini de rétractes absolus est un rétracte absolu*, puisque on peut le regarder comme produit combinatoire d'une suite des ensembles A_n qui, à partir d'un certain n se réduisent à un point.