De la formule (81) résulte tout de suite que $R_{\lambda\delta}\subset R_{\sigma\delta}$ et $R_{\lambda\sigma}\subset R_{\delta\sigma}$ et, puisque d'autre part $R_{\sigma\delta}\subset R_{\lambda\delta}$ et $R_{\delta\sigma}\subset R_{\lambda\sigma}$, on trouve

$$R_{\lambda\delta}=R_{\sigma\delta} \quad \text{et} \quad R_{\lambda\sigma}=R_{\delta\sigma},$$

d'où, d'après (81):

$$R_{\lambda}=R_{\lambda\delta}\,R_{\lambda\sigma}\ ^{1}).$$

Or, on a, d'après (81): $R_{\sigma\lambda}\subset R_{\sigma\delta}$ et $R_{\delta\lambda}\subset P_{\delta\sigma}$, donc $(R_\sigma R_\delta)_\lambda\subset \subset R_{\sigma\lambda}R_{\delta\lambda}\subset R_{\sigma\delta}R_{\delta\sigma}=R_\lambda$, et, puisque d'autre part $R_\lambda\subset(R_\sigma R_\delta)_\lambda$, on trouve

$$(R_\sigma R_\delta)_\lambda=R_\lambda\ ^{2}).$$

La relation $E_1\subset E_2$ pour les ensembles étant équivalente à la relation $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ (dans X) pour les fonctions caractéristiques correspondantes, il résulte sans peine des théorèmes VI et VII que

Si R est un anneau d'ensembles et si $E_1\in R_\delta$, $E_2\in R_\sigma$ et $E_1\subset E_2$, il existe un ensemble E tel que $E\in R_\sigma R_\delta$ et $E_1\subset E\subset E_2$ [3]).

Si R est un anneau d'ensembles et si $E_1\in R_{\sigma\delta}$, $E_2\in R_{\delta\sigma}$ et $E_1\subset E_2$, il existe un ensemble E de R_λ, tel que $E_1\subset E\subset E_2$.

[1]) Cf. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 59.

[2]) Cf. N. Lusin, l. c. p. 64.

[3]) Cf. *Fund. Math.* t. VI. p. 2.

Eine Verschärfung des n-Beinsatzes.

Von

Georg Nöbeling (Wien).

Nach Menger [1]) heisst ein Punkt p eines metrischen Raumes R von *mindestens n-ter Ordnung*, wenn die Begrenzungen aller hinreichend kleinen Umgebungen von p mindestens n Punkte enthalten. Gibt es eine kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft, so heisst p *von genau n-ter Ordnung*. Existiert eine solche kleinste Zahl n nicht, so heisst p *von unendlicher Ordnung*. Liegt p in beliebig kleinen Umgebungen mit endlichen Begrenzungen, ohne von endlicher Ordnung zu sein, so heisst er *von wachsender Ordnung*.

Menger [1]) beweist den wichtigen

n-Beinsatz. *Zu jedem Punkte p von n-ter (wachsender) Ordnung eines im kleinen zusammenhängenden Kontinuums K existieren n (abzählbar viele) in p endende, sonst fremde Teilbögen von K.*

Wir wollen nun einen metrischen Raum R zwischen zwei fremden abgeschlossenen Teilmengen P und Q *von mindestens n-ter Ordnung* nennen, wenn jede (zu P und Q fremde) die Mengen P und Q trennende Menge mindestens n Punkte enthält.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

n-Bogensatz. *Ist ein im kleinen zusammenhängender kompakter Raum K zwischen zwei fremden abgeschlossenen Teilmengen P und Q von mindestens n-ter Ordnung, so enthält er mindestens n Bögen, welche P und Q verbinden und zu je zwei höchstens Endpunkte gemein haben* [2]).

[1]) Menger, Fund. Math. X, S. 96; Wiener Akad. Anzeiger 1930, Nr. 10.

[2]) Für den Fall, dass K in der Ebene liegt und die Mengen P und Q einpunktig sind, wurde der n-Bogensatz von N. E. Rutt bewiesen (Amer. Journ. of Math. 51, S. 217).

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich der n-Beinsatz verschärfen. Ist nämlich der Punkt p eines im kleinen zusammenhängenden Kontinuums K von mindestens n-ter Ordnung, so gibt es eine Umgebung von p, deren Begrenzung Q von p nur durch eine mindestens n-punktige Menge getrennt werden kann. Das heisst aber, der Raum K ist zwischen p und Q von mindestens n-ter Ordnung. Er enthält also nach dem n-Bogensatz mindestens n in p endende, sonst fremde Bögen.

Ist zweitens der Punkt von unendlicher Ordnung, so existiert eine sich auf p monoton zusammenziehende Folge von Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ und eine Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ mit $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, sodass der Raum K zwischen p und der Begrenzung von U_k von mindestens n_k-ter Ordnung ist ($k = 1, 2, \ldots$ ad inf.). Also gibt es nach dem n-Bogensatz n_k Bögen, $B_1^k, \ldots, B_{n_k}^k$, die in p enden und sonst fremd sind. Die Summe $B = \sum_{k=1}^{\infty}(B_1^k + \ldots + B_{n_k}^k)$ ist kompakt und im kleinen zusammenhängend, und p ist in B von wachsender Ordnung. Also enthält B nach dem n-Beinsatz unendlich viele in p endende, sonst fremde Bögen.

Aus dem n-Bogensatz folgt [3]) also

Der verschärfte n-Beinsatz. *Zu jedem Punkte p von mindestens n-ter (unendlicher) Ordnung eines im kleinen zusammenhängenden Kontinuums K existieren mindestens n (abzählbar viele) in p endende, sonst fremde Teilbögen von K.*

Bevor wir an den Beweis des n-Bogensatzes schreiten, beweisen wir zunächst den

Hilfssatz 1. *Ist ein im kleinen zusammenhängender kompakter Raum K zwischen zwei fremden abgeschlossenen Mengen P und Q von mindestens n-ter Ordnung, so gibt es zwei endliche Teilmengen P und Q von P bzw. Q, zwischen denen K ebenfalls von mindestens n-ter Ordnung ist.*

[3]) Nach B. Knaster, Atti del Congr. Intern. dei Matem. (Bologna 1928) kann man diese Folgerung sogar aus dem n-Bogensatz für einpunktige Mengen P und Q ziehen; die Prämisse (P) des Beweises und deren Rechtfertigung (S. 226) sind dort in einer übrigens unmittelbar ersichtlicher Weise (durch Benützung anstatt A eines Teilgebietes von A) richtigzustellen.

Beweis. Es seien $U_1 = U_1(P)$ und $U_2 = U_2(Q)$ zwei Umgebungen von P bzw. Q, deren abgeschlossene Hüllen einen leeren Durchschnitt haben. Ihre Begrenzungen mögen $B(U_1)$ und $B(U_2)$ heissen. Dann gibt es, wie wir zunächst zeigen wollen, in $K-(U_1+U_2)$ keine Menge T von höchstens $n-1$ Punkten, sodass $K-(U_1+U_2)-T$ gleich der Summe zweier fremder, relativ abgeschlossener Mengen A_1 und A_2 ist, von denen die erste die Menge $B(U_1)-TB(U_1)$, die zweite die Menge $B(U_2)-T\cdot B(U_2)$ enthält. Gäbe es nämlich eine solche Menge T, so wären die Mengen $C_1 = A_1 + U_1$ und $C_2 = A_2 + U_2$ fremd und relativ abgeschlossen in ihrer Summe $C = C_1 + C_2$, und die Mengen $P \subset C_1$ und $Q \subset C_2$ wären also durch die höchstens $(n-1)$-punktige Menge T getrennt, entgegen der Voraussetzung unseres Satzes.

Der Raum $K-(U_1+U_2)$ und daher auch K selbst ist also zwischen $B(U_1)$ und $B(U_2)$ mindestens n-punktig zusammenhängend [4]) und enthält daher nach Menger [1]) n Bögen $B_1, \ldots, B_n$, die paarweise fremd sind und von denen jeder die Mengen $B(U_1)$ und $B(U_2)$ irreduzibel verbindet.

Hiernach können wir zwei Folgen von n-Tupeln $\{p_1^i, \ldots, p_n^i\}$ und $\{q_1^i, \ldots, q_n^i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$ ad inf.) von Punkten aus K so finden, dass erstens jede der $2n$ Folgen $p_\nu^1, p_\nu^2, \ldots$ und q_ν^1, q_ν^2 ($\nu = 1, \ldots, n$) gegen einen Punkt p_ν^* aus P bzw. q_ν^* aus Q konvergiert, und sodass zweitens für jedes natürliche i die beiden n-Tupel $\{p_1^i, \ldots, p_n^i\}$ und $\{q_1^i, \ldots, q_n^i\}$ durch n paarweise fremde Bögen $B_1^i, \ldots, B_n^i$ verbunden werden können. Wir behaupten, dass der Raum K zwischen den Mengen $P^* = \{p_1^*, \ldots, p_n^*\}$ und $Q^* = \{q_1^*, \ldots, q_n^*\}$ von mindestens n-ter Ordnung ist. Es sei nämlich T irgendein $(n-1)$-Tupel von nicht in $P^* + Q^*$ liegenden Punkten. Der Abstand der Mengen T und $P^* + Q^*$ sei δ. Wegen des lokalen Zusammenhanges von K gibt es eine Umgebung U von $P^* + Q^*$, deren Punkte sich mit $P^* + Q^*$ durch Bögen verbinden lassen, die einen Durchmesser $< \delta$ haben und daher zu T fremd sind. Es sei nun i so gross gewählt, dass die beiden n-Tupel $\{p_1^i, \ldots, p_n^i\}$ und $\{q_1^i, \ldots, q_n^i\}$ in U liegen. Da die n Bögen $B_1^i, \ldots, B_n^i$ zueinander fremd sind, gibt es

[4]) Ein Raum R heisst nach Menger [1]) zwischen den beiden fremden abgeschlossenen Mengen A und B *mindestens n-punktig zusammenhängend*, wenn keine weniger als n Punkte enthaltende Menge E die Eigenschaft hat, dass $R-E$ in zwei fremde abgeschlossene Teilmengen zerfällt, von denen die eine die Menge $R-EA$, die andere die Menge $R-EB$ enthält.

unter ihnen sicher einen Bogen B_ν^i mit den Endpunkten p_ν^i und q_ν^i, der zu T fremd ist. Verbinden wir nun die Punkte p_ν^i und q_ν^i mit P^* bzw. Q^* durch zu T fremde Bögen C_1 und C_2, so ist die Bögensumme $B_\nu^i + C_1 + C_2$ zwischen P^* und Q^* zusammenhängend. Das beliebig vorgegebene $(n-1)$-Tupel T trennt also die Mengen P^* und Q^* nicht, d. h. K ist zwischen P^* und Q^* von mindestens n-ter Ordnung. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Die Idee des Beweises für den n-Bogensatz ist nun kurz die folgende: zunächst kann man nach Hilfssatz 1 die Mengen P und Q sofort als endlich annehmen. Wir wählen eine monoton sich auf $P+Q$ zusammenziehende Folge von Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ Nun ersetzen wir die Menge $K - U_1$ durch eine Teilmenge S_1 einer Summe von endlich vielen Bögen derart, dass $K_1 = \overline{U}_1 + S_1$ zwischen P und Q von mindestens n-ter Ordnung ist. Sodann ersetzen wir die Menge $\overline{U}_1 - U_2$ durch eine Teilmenge S_2 einer Summe von endlich vielen Bögen derart, dass $K_2 = \overline{U}_2 + S_1 + S_2 \subset K_1$ zwischen P und Q von mindestens n-ter Ordnung ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens bekommen wir einen regulären[5]) Raum $R = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$, der ebenfalls zwischen P und Q von mindestens n-ter Ordnung ist. In ihm lassen sich auf Grund der Menger'schen Sätze über reguläre Kurven sofort n-Bögen mit den verlangten Eigenschaften finden.

Die Ersetzbarkeit der Mengen $K - U_1, \overline{U}_1 - U_2, \ldots$ durch die Teilmengen $S_1, S_2, \ldots$, von endlichen Bogensummen wird gewährleistet durch

Hilfssatz 2. *Voraussetzung. In einem kompakten Raume L seien zwei fremde endliche Mengen P und Q gegeben; es habe L die beiden folgenden Eigenschaften:*

a) *es gibt eine im kleinen zusammenhängende Umgebung U von $P+Q$;*

b) *zu jedem $(n-1)$-Tupel T von nicht in $P+Q$ liegenden Punkten enthält L einen P und Q verbindenden Bogen, der zu T fremd ist.*

Behauptung: *Es gibt eine die Menge U enthaltende abgeschlossene Teilmenge L' von L mit den folgenden Eigenschaften:*

[5]) Ein Raum heisst nach Menger regulär, wenn jeder seiner Punkte regulär, d. h. von endlicher oder wachsender Ordnung ist.

b') *zu jedem $(n-1)$-Tupel T von nicht in $P+Q$ liegenden Punkten enthält L' einen P und Q verbindenden Bogen, der zu T fremd ist;*

c) *die Menge $L' - U$ ist Teilmenge einer Summe von endlich vielen Bögen.*

Beweis. Mit (PQ) wollen wir im folgenden stets einen Bogen bezeichnen, welcher P und Q irreduzibel verbindet; und T bedeute stets eine aus höchstens $n-1$ nicht in $P+Q$ liegenden Punkten bestehenden Menge.

Bedeutet i eine beliebige natürliche Zahl, so stellen wir den Raum L als Summe von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen L_l dar, deren Durchmesser $< \frac{1}{i}$ sind:

$$L = L_1 + \ldots + L_r.$$

Ist nun $i_1, \ldots, i_k$ irgendein k-Tupel natürlicher Zahlen derart, dass es Bögen gibt, die mit $L_{i_1}, \ldots, L_{i_k}$ und sonst mit keiner der Mengen $L_1, \ldots, L_r$ Punkte gemein haben, so bezeichnen wir genau einen dieser Bögen mit $B_{i_1,\ldots,i_k}$ und setzen $C_i = \Sigma B_{i_1,\ldots,i_k}$, wo über alle k-Tupel $i_1, \ldots, i_k$ summiert wird, für welche $B_{i_1,\ldots,i_k}$ überhaupt definiert ist. Die Menge C_i enthält zu jedem Bogen B einen Bogen $B_{i_1,\ldots,i_k}$, derart, dass $B_{i_1,\ldots,i_k}$ in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von B und B in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von $B_{i_1,\ldots,i_k}$ liegt. Sind nämlich $L_{i_1}, \ldots, L_{i_k}$ die sämtlichen unter den Mengen $L_1, \ldots, L_r$, mit denen B Punkte gemein hat, so besitzt der Bogen $B_{i_1,\ldots,i_k}$ die behauptete Eigenschaft.

Wir bilden zu jedem natürlichen i die Menge C_i und setzen $D_i = C_1 + \ldots + C_i$. Dann haben die Mengen D_i die folgenden Eigenschaften:

(1) *jedes D_i ist Summe von endlich vielen Bögen;*

(2) *es gilt $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots$*

(3) *zu jedem Bogen B von L enthält D_i einen Bogen B_0, sodass B in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von B_0 und B_0 in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von B liegt.*

Es sei jetzt eine konvergente T-Folge $T^1, T^2, \dots$ gegeben, wobei $T^j = \{p_1^j, \dots, p_{n-1}^j\}$ $(j = 1, 2, \dots$ ad. inf.) ein zu $P+Q$ fremdes $(n-1)$-Tupel von Punkten ist und die Konvergenz darin besteht, dass die $n-1$ Punktfolgen $p_\nu^1, p_\nu^2, \dots$ $(\nu = 1, 2, \dots, n-1)$ konvergieren; ihre Limespunkte seien $p_1, \dots, p_{n-1}$. Durch geeignetes Umnumerieren innerhalb der T^j können wir erreichen, dass die Punkte $p_1, \dots, p_k$ zu $P+Q$ fremd sind, während die Punkte $p_{k+1}, \dots, p_{n-1}$ in $P+Q$ liegen, wobei natürlich auch eine der Mengen $\{p_1, \dots, p_k\}$ und $\{p_{k+1}, \dots, p_{n-1}\}$ leer sein kann.

Wir behaupten nun:

(4) *ist $T^1, T^2, \dots$ eine konvergente T-Folge, so enthält für hinreichend grosses i die Menge $\overline{U} + D_i$ für fast alle j einen zu T^j fremden Bogen (PQ).*

Nehmen wir diese Behauptung als bereits bewiesen an, so können wir sofort unsern Hilfssatz 2 beweisen. Aus (4) folgt nämlich die Existenz einer festen Zahl i_0 mit der Eigenschaft, dass die Menge $L' = \overline{U} + D_{i_0}$ zu jedem T einen Bogen (PQ) enthält, der zu T fremd ist. Gäbe es nämlich keine solche Zahl i_0, so gäbe es also zu jedem natürlichen i ein $(n-1)$-Tupel T^i, das mit jedem Bogen $(PQ) \subset \subset \overline{U} + D_i$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Nun wählen wir aus der Folge $T^1, T^2, \dots$ eine konvergente Teilfolge $T^{k_1}, T^{k_2}, \dots$ aus. Nach (4) gibt es ein i_1, sodass die Menge $\overline{U} + D_{i_1}$ für fast alle k_j einen zu T^{k_j} fremden Bogen enthält. Insbesondere enthält also für irgendein $k_j \geqq i_1$ die Menge $\overline{U} + D_{i_1}$, wegen (2) umsomehr die Menge $\overline{U} + D_{k_j}$ einen zu T^{k_j} fremden Bogen (PQ), was aber der Definition von T^{k_j} gerade widerspricht. Es gibt also tatsächlich eine Zahl i_0, sodass die Menge $L' = \overline{U} + D_{i_0}$ die Eigenschaft b') unseres Hilfssatzes 2 hat. Wegen (1) ist L' kompakt und erfüllt die Bedingung c), womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Um nun (4) zu beweisen, wählen wir ein Umgebung U' von $P+Q$, sodass folgendes gilt:

(5) $$\overline{U'} \subset U;$$

(6) *die Punkte $p_1, \dots, p_k$ liegen im Innern von $L - U'$.*

Sodann setzen wir

(7) $$\mathit{Min} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Abstand der Mengen } L - U' \textit{ und } P+Q \\ \textit{Abstand der Mengen } U' \textit{ und } \{p_1, \dots, p_k\} \end{array} \right\} = 2\delta \quad (>0).$$

Insbesondere hat also die Begrenzung $B(U')$ von der Menge $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ einen Abstand $\geqslant 2\delta$.

Da L kompakt und U zusammenhängend im kleinen ist, können wir die Begrenzung $B(U')$ von U' durch endlich viele Umgebungen überdecken, deren Punkte sich durch Bögen von vorgeschriebener Kleinheit verbinden lassen. Also können wir endlich viele Umgebungen $W_1, \dots, W_s$ so finden, dass die folgenden Beziehungen gelten:

(8) $$B(U') \subset W_1 + \dots + W_s;$$

(9) *je zwei Punkte eines W_σ können durch einen Bogen $\subset U$ verbunden werden, der von der Menge $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ einen Abstand $>\delta$ hat.*

Es sei nun ϱ, σ ein Paar natürlicher, nicht notwendig verschiedener Zahlen $\leqq s$. Wenn es einen zu der Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ fremden Bogen $\subset L - U'$ gibt, der mit W_ϱ und W_σ Punkte gemein hat, so wollen wir genau einen dieser Bögen mit $C_{\varrho\sigma}$ bezeichnen. Die Summe C des endlich vielen Bögen $C_{\varrho\sigma}$ hat von der Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ und als Teilmenge von $L - U'$ auch von der Menge $\{p_{k+1}, \dots, p_{n-1}\} \subset \subset P+Q$ einen positiven Abstand. Insgesamt gilt also folgendes:

(10) *wenn ein Bogen $\subset L - U'$ zu $\{p_1, \dots, p_k\}$ fremd ist und mit W_ϱ und W_σ Punkte gemein hat, so gibt es einen Bogen $\subset C$ mit denselben Eigenschaften;*

(11) *die Mengen C und $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ haben einen positiven Abstand ε.*

Zu jedem Bogen $C_{\varrho\sigma}$ wählen wir für einen Augenblick in den beiden Durchschnitten $C_{\varrho\sigma} W_\varrho$ und $C_{\varrho\sigma} W_\sigma$ je einen Punkt w und sodann eine Zahl $\zeta > 0$, sodass die ζ-Umgebung jedes der endlich vielen Punkte w ganz in jedem ihn enthaltenden W_σ liegt.

Schliesslich wählen wir eine natürliche Zahl i so gross, dass

$$\frac{1}{i} < \mathrm{Min}\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \zeta\right)$$

ist; wir wollen zeigen, dass diese Zahl i die in (4) behauptete Eigenschaft besitzt.

Zu jedem Bogen $C_{\varrho\sigma}$ wählen wir einen Bogen $B_0 \subset D_i$ mit den Eigenschaften (3). Da $C_{\varrho\sigma}$ in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von B_0 liegt, müssen insbesondere die zu $C_{\varrho\sigma}$ gehörigen beiden Punkte w von B_0 einen

Abstand $< \frac{1}{i}$ haben. Daraus folgt aber wegen $\frac{1}{i} < \zeta$, dass B_0 mit W_ϱ und W_σ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Da weiter wegen $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{2}$ der Bogen B_0 in der $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung von $C_{\varrho\sigma}$ liegt, so hat B_0 wegen (11) von der Menge $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ einen Abstand $\geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Hiernach gilt also wegen (10):

(12) *wenn ein Bogen $\subset L - U'$ zu $\{p_1, \dots, p_k\}$ fremd ist und mit W_ϱ und W_σ nichtleere Durchschnitte hat, so gibt es einen Bogen $\subset D_i$, der ebenfalls mit W_ϱ und W_σ nichtleere Durchschnitte hat und von der Menge $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ einen Abstand $\geqq \frac{\varepsilon}{2}$ hat.*

Nun gibt es eine natürliche Zahl j_0, sodass für jedes $j > j_0$ der Punkt p_ν^j des $(n-1)$-Tupels T^j unserer vorgegebenen gegen $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ konvergierenden Folge $T^1, T^2, \dots$ in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von p_ν liegt $(\nu = 1, \dots, n-1)$. Wegen $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{4}$ können wir also (12) verschärfen zu

(13) *Wenn ein Bogen $L - U'$ zu $\{p_1, \dots, p_k\}$ fremd ist und mit W_ϱ uud W_σ nichtleere Durchschnitte hat, so gibt es einen Bogen $\subset D_i$, der ebenfalls mit W_ϱ und W_σ Punkte gemein hat und für $j > j_0$ zu T^j fremd ist.*

Weil der Raum L der Voraussetzung b) genügt, gibt es für ein beliebiges $j > j_0$ einen Bogen $B = (PQ)$ mit den Endpunkten $p \subset P$ und $q \subset Q$, der zu der Menge $\{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}^j, \dots, p_{n-1}^j\}$ fremd ist. Wir wollen zeigen, dass man ihn durch Modifikation seines Durchschnittes mit $L - U'$ in einen ebenfalls P und Q verbindenden Bogen verwandeln kann, der in $\overline{U} + D_i$ liegt und zu T^j fremd ist, womit (4) bewiesen sein wird.

Es sind zwei Fälle möglich:

Entweder liegt der Bogen B ganz in $\overline{U}'$. Dann ist aber, da die Menge $\{p_1^j, \dots, p_k^j\}$ in der $\frac{\delta}{2}$-Umgebung der Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ liegt und $\overline{U}'$ von $\{p_1, \dots, p_k\}$ nach (7) einen Abstand $> \delta$ hat, der Bogen B fremd zu $\{p_1^j, \dots, p_{n-1}^j\}$. Da er ausserdem wegen (5) in $\overline{U} + D_i$ liegt, ist in diesem Falle für unser j die Behauptung (4) bewiesen.

Oder aber der Durchschnitt $B \cdot (L - \overline{U}')$ ist nichtleer. Dann ist er Summe von höchstens abzählbar vielen paarweise fremden offenen Teilbögen, deren Endpunkte in $B(U')$ liegen. Unter ihnen gibt es aber nur endlich viele, die entweder von der Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ einen Abstand $\leqq \delta$ oder mit $L - U$ Punkte gemein haben; denn der Abstand der Mengen $B(U')$ und $\{p_1, \dots, p_k\}$ ist nach (7) $\geqq 2\delta > 0$, und der Abstand der Mengen $B(U')$ und $(L - U)$ ist nach (5) positiv. Wir wollen die Endpunkte dieser endlich vielen Teilbögen von B mit $q_1, \overline{q}_1; \dots; q_t, \overline{q}_t$ bezeichnen, wobei wir sie so numeriert denken, dass wir sie beim Durchlaufen des Bogens B von p nach q in der Reihenfolge $q_1, \overline{q}_1; \dots; q_t, \overline{q}_t$ passieren. Für die abgeschlossenen Teilbögen $(q_\tau \overline{q}_\tau)$ von B mit den Endpunkten $q_\tau, \overline{q}_\tau$ gilt also:

(14) $(q_\tau \overline{q}_\tau) \subset L - U'; \quad q_\tau, \overline{q}_\tau \subset B(U') \quad (\tau = 1, \dots, t)$

Da alle Punkte des Durchschnittes $B \cdot (L - U)$ auf den Bögen $(q_\tau \overline{q}_\tau)$ liegen, gilt für die Teilbögen $(p\, q_1), (\overline{q}_\tau q_{\tau+1}), (\overline{q}_t q)$ von B mit den Endpunkten p, q_1 bzw. $\overline{q}_\tau, q_{\tau+1}$ bzw. $\overline{q}_t, q$:

(15) *die Bögen $(p\, q_1), (\overline{q}_\tau q_{\tau+1}), (\overline{q}_t q)$ liegen in $\overline{U}$ $(\tau = 1, \dots, t)$.*

Weil der Bogen B zu $\{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}^j, \dots, p_{n-1}^j\}$ fremd ist, sind die Bögen $(p\, q_1), (\overline{q}_\tau q_{\tau+1}), (\overline{q}_t q)$ fremd zu $\{p_{k+1}^j, \dots, p_{n-1}^j\}$. Ausserdem haben sie von $\{p_1, \dots, p_k\}$ einen Abstand $\geqq \delta$, weil alle Punkte von B, die von $\{p_1, \dots, p_k\}$ einen Abstand $\leqq \delta$ haben, auf einem der Bögen $(q_\tau \overline{q}_\tau)$ liegen. Da aber die Menge $\{p_1^j, \dots, p_k^j\}$ in der $\frac{\delta}{2}$-Umgebung von $\{p_1, \dots, p_k\}$ liegt, gilt insgesamt

(16) *die Bögen $(p\, q_1), (\overline{q}_\tau q_{\tau+1}), (\overline{q}_t q)$ sind zu T^j fremd. $(\tau = 1, \dots, t)$.*

Da jeder Bogen $(q_\tau \overline{q}_\tau)$ nach (14) in $L - U'$ liegt, als Teilmenge von B zu $\{p_1, \dots, p_k\}$ fremd ist und schliesslich wegen $q_\tau, \overline{q}_\tau \subset B(U')$ und (8) zwei nicht notwendig verschiedene Zahlen $\varrho, \sigma \leqq s$ existieren, sodass der Bogen $(q_\tau \overline{q}_\tau)$ mit W_ϱ und W_σ Punkte gemein hat gibt es nach (13) einen Bogen $B_\tau \subset D_i$, der ebenfalls mit W_ϱ und W_σ zwei Punkte q_τ^* bzw. $\overline{q}_\tau^*$ gemein hat und zu T^j fremd ist; mit

$(q_\tau^* \bar{q}_\tau^*)$ bezeichnen wir den Teilbogen von B_τ mit den Endpunkten q_τ^* und $\bar{q}_\tau^*$. Es gilt also:

(17) *die Bögen* $(q_\tau^* \bar{q}_\tau^*)$ *liegen in* D_i *und sind zu* T^j *fremd* $(\tau = 1,\ldots, t)$.

Da die Punkte q_τ und q_τ^* bzw. $\bar{q}_\tau$ und $\bar{q}_\tau^*$ in demselben W_σ liegen, können sie nach (9) durch zwei Bögen $(q_\tau q_\tau^*)$ und $(\bar{q}_\tau^* \bar{q}_\tau) \subset U$ verbunden werden, die von $\{p_1,\ldots,p_{n-1}\}$ einen Abstand $> \delta$ haben. Da aber T^j in der $\frac{\delta}{2}$-Umgebung von $\{p_1,\ldots,p_{n-1}\}$ liegt, so gilt:

(18) *die Bögen* $(q_\tau q_\tau^*)$ *und* $(\bar{q}_\tau^* \bar{q}_\tau)$ *liegen in* $\bar{U}$ *und sind zu* T^j *fremd* $(\tau = 1,\ldots, t)$.

Wegen (15)—(18) liegt die Summe der endlich vielen Bögen

$$(pq_1),\quad (q_1 q_1^*),\quad (q_1^* \bar{q}_1^*),\quad (\bar{q}_1^* \bar{q}_1),\quad (\bar{q}_1 q_2),\ldots,\quad (q_t q)$$

in $\bar{U} + D_i$ und ist zu T^j fremd. Da sie zusammenhängend ist und mit P und Q die Punkte p und q gemein hat, enthält sie einen Bogen (PQ), der in $\bar{U} + D_i$ liegt und zu T^j fremd ist. Damit ist die Behauptung (4) und Hilfssatz 2 bewiesen.

Wir beginnen jetzt den

Beweis des n-Bogensatzes. Nach Hilfssatz 1 genügt es, den Beweis für den Fall zu erbringen, dass P und Q endliche Mengen sind; wir nehmen daher für das Folgende P und Q als endlich an.

Wir zeigen zunächst, dass der Raum K die Bedingungen a) und b) des Hilfssatzes 2 erfüllt. Die Bedingung a) ist sicher erfüllt und zwar für jede Umgebung U von $P+Q$, da ja der ganze Raum K im kleinen zusammenhängend ist. Wir nehmen nun an, die Bedingung b) wäre nicht erfüllt. Dann gibt es also ein $(n-1)$-Tupel $T = T^0$, das mit jedem Bogen (PQ) Punkte gemein hat. Wir bezeichnen mit P^0 die Menge aller derjenigen Punkte von K, die entweder in P liegen oder mit P durch einen zu T^0 fremden Bogen verbunden werden können. Die Menge $Q^0 = K - T^0 - P^0$ ist zu P^0 fremd und enthält die Menge Q, da ja nach Voraussetzung kein zu T^0 fremder Bogen (PQ) existiert. Schliesslich sind P^0 und Q^0 in $K - T^0$ abgeschlossen. Zeigen wir dies etwa für P^0. Es sei also $p \subset K - T^0$ des Limes einer Folge $p_1, p_2,\ldots$ von Punkten aus P^0. Weil K zusammenhängend im kleinen ist, können alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung von p durch Bögen verbunden werden, die zu T^0 fremd sind. Insbesondere kann also auch ein Punkt p_i mit p durch einen zu T^0 fremden Bogen verbunden werden. Da nun p_i als Punkte von P^0 mit P durch einen zu T^0 fremden Bogen verbunden kann, gilt dasselbe für p, d. h. p liegt in P^0. Ähnlich zeigt man die Abgeschlossenheit von Q^0. Das $(n-1)$-Tupel T^0 trennt also die Mengen P und Q, entgegen der Voraussetzung des n-Bogensatzes. Der Raum K erfüllt also auch die Bedingung b) des Hilfssatzes 2.

Wir wählen nun eine Folge von Umgebungen $U_1, U_2,\ldots$ der Menge $P+Q$, sodass die Beziehungen $\bar{U}_{i+1} \subset U_i$ $(i = 1, 2,\ldots$ *ad inf.*$)$ und $\prod_{i=1}^{\infty} U_i = P + Q$ gelten. Setzen wir $R_i = K - U_i$, so gilt also folgendes:

(1) R_i *liegt im Innern von* R_{i+1} $(i = 1, 2,\ldots$ *ad inf.*$)$;

(2) R_i *ist kompakt* $(i = 1, 2,\ldots$ *ad inf.*$)$;

(3) $R_1 + R_2 + \ldots = K - (P+Q)$.

Wir wenden jetzt auf K und die Umgebung $U = U_1$ den Hilfssatz 2 an und erhalten einen Raum K_1 mit $K \supset K_1 \supset \bar{U}_1$. Dieser Raum K_1 erfüllt in bezug auf die Umgebung $U = U_2$ ebenfalls die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. Wenden wir ihn also auf K_1 und U_2 an, so erhalten wir einen Raum K_2 mit $K_1 \supset K_2 \supset \bar{U}_2$. Durch unendlich oftmalige Anwendung des Hilfssatzes 2 erhalten wir auf diese Weise eine Folge $K_1, K_2,\ldots$ von Teilräumen von K mit den Eigenschaften:

(4) $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$;

(5) K_i *ist kompakt* $(i = 1, 2,\ldots$ *ad inf.*$)$;

(6) $K_i - U_i$ *ist Teilmenge einer Summe von endlich vielen Bögen* $\subset K$ $(i = 1, 2,\ldots$ *ad inf.*$)$;

(7) *zu jedem* $(n-1)$*-Tupel* T *enthält* K_i *einen Bogen* (PQ), *der zu* T *fremd ist* $(i = 1, 2,\ldots$ *ad inf.*$)$.

Wir setzen

$$R = P + Q + \sum_{i=1}^{\infty} R_i \cdot K_{i+1}$$

und wollen zeigen, dass der Raum R kompakt, regulär und zwischen P und Q von mindestens n-ter Ordnung ist.

Da $R_j \cdot (P+Q)$ wegen (3) leer ist, so gilt

$$R_j \cdot R = R_j \cdot \sum_{i=1}^{\infty} R_i \cdot K_{i+1}$$

Nun ist wegen (1)

$$R_j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} R_i \cdot K_{i+1} = \sum_{i=1}^{j-1} R_i \cdot K_{i+1}$$

und wegen (1) und (4)

$$R_j \cdot \sum_{i=j}^{\infty} R_i \cdot K_{i+1} = R_j \cdot \sum_{i=j}^{\infty} K_{i+1} = R_j \cdot K_{j+1}.$$

Also ist

$$\text{(8)} \qquad R_j \cdot R = \sum_{i=1}^{j} R_i \cdot K_{i+1}.$$

Hiernach ist wegen (2) und (5) die Menge $R_j \cdot R$ für jedes j kompakt. Ist nun $p_1, p_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus R mit dem Limes p, so wollen wir zeigen, dass auch p in R liegt. Entweder liegt p in $P+Q$; dann liegt er auch in R. Oder er liegt in $K-(P+Q)$. Dann gibt es wegen (3) ein j, sodass p in R_{j-1} und daher wegen (1) im Inneren von R_j liegt. Nun müssen auch fast alle Punkte p_i in R_j also in $R_j \cdot R$ liegen. Da aber $R_j \cdot R$ kompakt ist, liegt auch p in $R_j \cdot R \subset R$. Der Raum R ist also kompakt.

Zweitens ist R regulär. Denn zunächst folgt aus $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$, dass $R_i \cdot K_{i+1} \subset K_{i+1} - \overline{U}_{i+1}$ gilt. Also ist wegen (6) jede Menge $R_i \cdot K_{i+1}$ und daher wegen (8) für jedes j die Menge $R_j \cdot R$ Teilmenge einer Summe von endlich vielen Bögen, also regulär. Ist nun einerseits p ein beliebiger Punkt von $K-(P+Q)$, so gibt es wegen (3) ein j, sodass p in $R_j \cdot R$ und daher wegen (1) im Innern von $R_{j+1} \cdot R$ liegt. Da $R_{j+1} \cdot R$ regulär ist, so ist R in p regulär. Ist anderseits p ein Punkt von $P+Q$, so kann man wegen der Endlichkeit von $P+Q$ im Raume R eine beliebig kleine Umgebung U von p angeben, deren Begrenzung B bzgl. R in $R-(P+Q)$ liegt. Wegen der Kompaktheit von R kann man diese Begrenzung B durch endlich viele beliebig kleine Umgebungen $V_1, \ldots, V_s$ des Raumes R

mit endlichen Begrenzungen bzgl. R überdecken. Dann hat die Umgebung $U+V_1+\ldots+V_s$ eine endliche Begrenzung. Also ist R in p regulär, womit die Regularität des Raumes R nachgewiesen ist.

Wir nehmen drittens an, es gebe in R ein zu $P+Q$ fremdes $(n-1)$-Tupel T, sodass $R-T=A_1+A_2$ ist, wobei $P \subset A_1$ und $Q \subset A_2$ gilt und die Mengen A_1 und A_2 fremd und relativ abgeschlossen sind. Nun wählen wir eine positive Zahl ε, die kleiner ist als die Abstände der Mengen P und A_2, Q und A_1, $P+Q$ und T. Sind dann V_1 und V_2 zwei fremde in der ε-Umgebung von $P+Q$ gelegene Umgebungen von P bzw. Q, so sind die Mengen $A_1+\overline{V}_1$ und $A_2+\overline{V}_2$ fremd und relativ abgeschlossen. Setzen wir noch $V=V_1+V_2$, so trennt also das $(n-1)$-Tupel T die Mengen P und Q in $V+R$. Dies ist aber unmöglich. Wählen wir nämlich ein i so gross, dass $U_i \subset V$ gilt, so ist $K_{i+1} \subset U_i + K_{i+1} R_i \subset V + K_{i+1} R_i \subset V+R$. Nun enthält nach (7) die Menge K_{i+1} und daher auch $V+R$ zu jedem T einen Bogen (PQ), der zu T fremd ist. Es gibt also kein P und Q in R trennendes $(n-1)$-Tupel, d. h. R ist zwischen P und Q von mindestens n-ter Ordnung.

Wir haben bisher folgendes bewiesen: der Raum K, der kompakt, im kleinen zusammenhängend und zwischen den endlichen Teilmengen P und Q von mindestens n-ter Ordnung ist, enthält einen regulären Teilraum, der dieselben Eigenschaften hat. Wir dürfen also von jetzt an den Raum K selbst als regulär annehmen.

Bezeichnen wir mit $o(p)$ die Ordnung des Punktes p bzgl. K, so müssen die beiden Relationen

$$\sum_{p \subset P} o(p) \geqq n, \quad \sum_{q \subset Q} o(q) \geqq n$$

gelten. Nach Menger[1]) gibt es also zwei zueinander fremde abgeschlossene Umgebungen $\overline{U}(P)$ und $\overline{U}(Q)$ von P bzw. Q mit mindestens n-punktigen Begrenzungen, deren Randpunkte sich mit P bzw. Q durch n Bögen K verbinden lassen, sodass je zwei dieser Bögen höchstens die in P bzw. Q gelegenen Endpunkte gemein haben.

Offenbar ist K zwischen den Begrenzungen von $U(P)$ und $U(Q)$ mindestens n-punktig zusammenhängend[4]). Die Begrenzungen von $U(P)$ und $U(Q)$ können also durch n zueinander fremde Bögen C miteinander irreduzibel verbunden werden. Die Bögen B und C

schliessen sich zum n die Mengen P und Q verbindenden Bögen zusammen, die zu je zwei höchstens Endpunkte gemein haben.

Damit ist der n-Bogensatz bewiesen.

Der n-Bogensatz lässt sich noch verschärfen durch den folgenden

Zusatz. *Es gibt in K ein festes Gerüst von abzählbar vielen Bögen $B_1, B_2, \ldots$, mit folgender Eigenschaft: ist K zwischen zwei beliebigen Teilmengen P und Q von mindestens n-ter Ordnung, so enthält die Menge $(P+Q)+(B_1+B_2+\ldots)$ n bis auf die Endpunkte fremde Bögen (PQ).*

Beweis. Es sei $p_1, p_2, \ldots$, eine in K dicht liegende Punktfolge. Zu je zwei Punkten p_i, p_j dieser Folge lassen sich, wie wir oben sahen, abzählbar viele sie verbindende Bögen $B_1^{ij}, B_2^{ij}, \ldots$, so angeben, dass zu jedem beliebigen die Punkte p_i und p_j irreduzibel verbindenden Bogen B und jedem positiven ε ein Bogen B_k^{ij} existiert, der in der ε-Umgebung jenes Bogens B liegt. Bezeichnen wir die Bögen B_k^{ij} $(i, j, k = 1, 2, \ldots$ ad inf.) in irgendeiner Reihenfolge mit $B_1, B_2, \ldots$, so hat das Gerüst $B_1, B_2, \ldots$, die Eigenschaft:

(1) *Sind die Punkte p_i und p_j durch einen Bogen B irreduzibel verbunden und ist ε eine positive Zahl, so gibt es einen die Punkte p_i und p_j verbindenden Bogen $B_0 \subset B_1 + B_2 + \ldots$, der in der ε-Umgebung jenes Bogens B liegt.*

Wir wollen zeigen, dass die Bögen $B_1, B_2, \ldots$, die in unserem Zusatz behauptete Eigenschaft haben.

Es seien für irgendein n zwei höchstens n-punktige zueinander fremde Mengen $P = \{p_1^*, \ldots, p_n^*\}$ und $Q = \{q_1^*, \ldots, q_n^*\}$ gegeben, sodass die Punkte p_ν^* und q_ν^* durch einen Bogen C_ν irreduzibel verbunden sind und je zwei Bögen C_ν höchstens Endpunkte gemein haben.

Wir wählen zwei Folgen $U_1, U_2, \ldots; V_1, V_2, \ldots$, von Umgebungen der Mengen P und Q mit den Eigenschaften:

(2) $$\overline{U}_{i+1} \subset U_i; \quad \overline{V}_{i+1} \subset V_i \quad (i = 1, 2, \ldots \textit{ ad inf.});$$

(3) $$\prod_{i=1}^{\infty} U_i = P, \qquad \prod_{i=1}^{\infty} V_i = Q;$$

(4) $$\overline{U}_1 \cdot \overline{V}_1 = 0;$$

und sodass die Begrenzungen von U_i und V_i mit jedem Bogen C_ν genau einen Punkt p_ν^i bzw. q_ν^i gemein haben $(\nu = 1, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots$ *ad inf.*).

Da der Raum K im kleinen zusammenhängend ist, kann man zu jedem Punkt p_ν^i $(\nu = 1, \ldots, n;\ i = 2, \ldots$ *ad inf.*) einen Punkt $\overline{p}_\nu^i$ unserer Folge $p_1, p_2, \ldots$, so finden, sodass p_ν^i mit $\overline{p}_\nu^i$ durch einen Bogen $(p_\nu^i\ \overline{p}_\nu^i)$ verbunden werden kann, derart, dass folgendes gilt:

(5) $$(p_\nu^i\ \overline{p}_\nu^i) \subset U_{i-1} \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ i = 2, 3, \ldots \textit{ ad inf.}),$$

(6) *zu jedem Bogen $(p_\nu^i\ \overline{p}_\nu^i)$ gibt es eine positive Zahl δ, sodass $(p_\nu^i\ \overline{p}_\nu^i)$ von jedem Bogen C_μ und $(p_\mu^j\ \overline{p}_\mu^j)$ mit $\mu \neq \nu$ einen Abstand $> \delta$ hat.*

Bezeichnen wir nun mit $(p_\nu^i\ p_\nu^{i+1})$ den Teilbogen von C_ν mit den Endpunkten p_ν^i und p_ν^{i+1}, so enthält wegen (2) und (5) die Summe $(\overline{p}_\nu^i\ p_\nu^i) + (p_\nu^i\ p_\nu^{i+1}) + (p_\nu^{i+1}\ \overline{p}_\nu^{i+1})$ einen Teilbogen $(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})$ mit den Endpunkten $\overline{p}_\nu^i$ und $\overline{p}_\nu^{i+1}$, sodass gilt:

(7) $$(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1}) \subset U_{i-1} \quad i = 2, 3, \ldots \textit{ ad inf.});$$

(8) *zu jedem Bogen $(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})$ gibt es eine positive Zahl ε, sodass $(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})$ von allen Bögen $(\overline{p}_\mu^i\ \overline{p}_\mu^{i+1})$ mit $\mu \neq \nu$ einen Abstand $> \varepsilon$ hat.*

Aus (1), (7) und (8) folgt nun die Existenz eines die Punkte $\overline{p}_\nu^i$ und $\overline{p}_\nu^{i+1}$ verbindenden Bogens $(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})^*$ mit den Eigenschaften:

(9) $$(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})^* \subset B_1 + B_2 + \ldots \quad (i = 2, 3, \ldots \textit{ ad inf.});$$

(10) $$(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})^* \subset U_{i-1};$$

(11) *jeder Bogen $(\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})^*$ hat mit jedem Bogen $(\overline{p}_\mu^j\ \overline{p}_\mu^{j+1})^*$ einen leeren Durchschnitt $(\mu \neq \nu)$.*

Aus (3) und (10) folgt, dass die Summe

$$\{p_\nu^*\} + \sum_{i=2}^{\infty} (\overline{p}_\nu^i\ \overline{p}_\nu^{i+1})^*$$

einen Bogen $(\overline{p}_\nu^2\ p_\nu^*)$ mit den Endpunkten $\overline{p}_\mu^2$ und p_ν^* enthält, für welchen folgendes gilt:

(12) $$(\overline{p}_\nu^2\ p_\nu^*) \subset \{p_\nu^*\} + B_1 + B_2 + \ldots;$$

(13) $$(\overline{p}_\nu^2\ p_\nu^*) \subset U_1;$$

(14) *zwei Bögen* $(\bar{p}_\nu\ p_\nu^*)$ *und* $(\bar{p}_\mu^2\ p_\mu^*)$ *haben höchstens den Endpunkt* $p_\nu^* = p_\mu^*$ *gemein.*

Analog zeigt man die Existenz von n Bögen $(\bar{q}_\nu^2\ q_\nu^*)$ mit den Endpunkten $\bar{q}_\nu^2$ und q_ν^*, sodass gilt:

(12′) $$(\bar{q}_\nu^2\ q_\nu^*) \subset \{q_\nu^*\} + B_1 + B_2 + \dots;$$

(13′) $$(\bar{q}_\nu^2\ q_\nu^*) \subset V_1;$$

(14′) *je zwei Bögen* $(\bar{q}_\nu^2\ q_\nu^*)$ *und* $(\bar{q}_\mu^2\ q_\mu^*)$ *haben höchstens den Endpunkt* $q_\nu^* = q_\mu^*$ *gemein.*

Aus (4), (13) und (13′) folgt:

(15) *je zwei Bögen* $(\bar{p}_\nu^2\ p_\nu^*)$ *und* $(\bar{q}_\mu^2\ q_\mu^*)$ *sind zu einander fremd.*

Wir bezeichnen nun mit $(p_\nu^2\ q_\nu^2)$ den Teilbogen von C_ν mit den Endpunkten p_ν^2 und q_ν^2. Dann sind die Punkte $\bar{p}_\nu^2$ und $\bar{q}_\nu^2$ miteinander verbunden durch einen Teilbogen von $(\bar{p}_\nu^2\ p_\nu^2) + (p_\nu^2\ q_\nu^2) + (q_\nu^2\ \bar{q}_\nu^2)$, der zu allen Bögen $(\bar{p}_\mu^2\ p_\mu^*)$ und $(\bar{q}_\mu^2\ q_\mu^*)$ mit $\mu \neq \nu$ wegen (6) fremd ist; und je zwei dieser Teilbögen sind ebenfalls wegen (6) zueinander fremd. Wegen (1) kann man also für jedes ν einen Bogen $(\bar{p}_\nu^2\ \bar{q}_\nu^2)$ mit den Endpunkten $\bar{p}_\nu^2$ und $\bar{q}_\nu^2$ finden, sodass folgendes gilt:

(16) $$(\bar{p}_\nu^2\ \bar{q}_\nu^2) \subset B_1 + B_2 + B_3 \dots;$$

(17) $(\bar{p}_\nu^2\ \bar{q}_\nu^2)$ *ist zu* $(\bar{p}_\mu^2\ \bar{q}_\mu^2)$, $(\bar{p}_\mu^2\ p_\mu^*)$ *und* $(\bar{q}_\mu\ q_\mu^*)$ *fremd* $(\mu \neq \nu)$.

Die Bogensumme $(p_\nu^*\ \bar{p}_\nu^2) + (\bar{p}_\nu^2\ \bar{q}_\nu^2) + (\bar{q}_\nu^2\ q_\nu^*)$ enthält einen Bogen C_ν^* mit den Endpunkten p_ν^* und q_ν^*. Aus (14), (14′), (15) und (17) folgt erstens:

C_μ^* und C_ν^* haben höchstens Endpunkte gemein $(\mu \neq \nu)$.

Aus (12), (12′) und (16) ergibt sich zweitens:

$$C_\nu^* \subset P + Q + B_1 + B_2 + \dots.$$

Damit ist auch der Zusatz bewiesen.

Wien, 1930.

A point set characterization of closed 2-dimensional manifolds [1]).

By

J. H. Roberts [2]) (Philadelphia).

Much work has been done on the problem of characterizing various point sets by internal properties. For example R. L. Moore has given [3]) a set of axioms in terms of *point* and *region* which determine the euclidean plane. C. Kuratowski has characterized [4]) the topological sphere as a Peano space with no cut point and having the property of Janiszewski [5]). This result is also contained in work of Leo Zippin [6]).

Miss I. Gawehn has given [7]) a set of four conditions in terms of *point* and *neighborhood* which are necessary and sufficient that a point set be a *closed 2-dimensional manifold* [8]). It readily follows

[1]) Presented to the American Mathematical Society, Feb. 22, 1930.

[2]) National Research Fellow.

[3]) *On the foundations of plane analysis situs*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 17 (1916), pp. 131—164.

[4]) *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fundamenta Mathematicae, vol. 13 (1929), pp. 307—318.

[5]) A space M has the property of Janiszewski if, given a continuum C in M which does not cut M, for every decomposition of C into two continua K and L the product $K \cdot L$ is a continuum.

[6]) *A study of continuous curves and their relation to the Janiszewski-Mullikin theorem*, Transactions of the American Math. Soc., vol. 31 (1929), pp. 744—770.

[7]) *Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, vol. 98 (1927) pp. 321—354.

[8]) For a definition of this term see O. Veblen, *Analysis situs*, Cambridge Colloquium Lectures, vol. 5, part II, pp. 44—45; or Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, p. 132.