de (⁑) qu'il existe une suite croissante $\{k_n\}$ de nombres naturels telle que les ensembles

$$E_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[|f(x) - f_{k_n}(x)| < \eta]$$

sont de classe α additive.

Or, il résulte de la convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ que

$$X = E_1 + E_2 + \dots$$

La condition (*) est donc satisfaite.

Sur les ensembles de la même puissance qui ne sont pas effectivement de la même puissance.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous disons que deux ensembles M et N *ont la même puissance*, s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux de N.

Nous disons que deux ensembles M et N *ont effectivement la même puissance*, si *nous savons* établir effectivement une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux de N[1]).

En particulier, nous disons qu'un ensemble E a effectivement la puissance du continu, si nous savons déterminer effectivement une correspondance biunivoque entre les éléments de E et les nombres réels. On connait des exemples d'ensembles qui ont la puissance du continu sans l'avoir effectivement; tels sont: l'ensemble de tous les ensembles dénombrables de nombres réels, l'ensemble de toutes les fonctions de la classe 2 de Baire, l'ensemble de toutes les fonctions représentables analytiquement, l'ensemble de tous les ensembles analytiques, l'ensemble de tous les ensembles projectifs. La démonstration que chacun de ces ensembles a la puissance du continu utilise l'axiome du choix.

Or, nous donnerons *un exemple effectif d'un ensemble dont nous pouvons démontrer sans recours à l'axiome du choix qu'il a la puissance du continu mais ne l'a pas effectivement.*

[1]) Voir *Fund. Math.* t. II, p. 113; voir aussi mon livre *Leçons sur les nombres transfinis,* Paris, Gauthier-Villars 1928, p. 23. et l'opinion de M. Henri Lebesgue. l. c., p. 24, note (¹). Cf. les notions *einwertig*, resp. *vielwertig äquivalent* de M. F. Bernstein, *Götting. Nachrichten* 1904, p. 558, ainsi que la notion d'un ensemble *effectivement énumérable* de M. Emile Borel, *Acc. dei Lincei* vol. 28 série 5ᵉ, 1919, p. 164.

Soit X l'ensemble de tous les nombres réels et Y l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables de X. S'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles X et Y, posons $E=Y$; si une telle correspondance n'existe pas, posons $E=X$.

Il est évident qu'on démontre sans recours à l'axiome du choix (en examinant les deux cas possibles) que l'ensemble E est de puissance du continu, mais nous ne savons pas, dans l'état actuel de la science, établir aucune correspondance biunivoque entre les éléments de E et ceux de X: l'ensemble E n'est pas donc effectivement de puissance du continu.

Nous disons qu'un ensemble E a effectivement la puissance $\aleph_1$ si nous savons établir une correspondance biunivoque entre les éléments de E et ceux de l'ensemble Z_2 de tous les nombres transfinis de seconde classe de Cantor. Posons $E=X$. s'il existe une correspondance biunivoque entre les élements de l'ensemble Z_2 et ceux de l'ensemble X (de tous les nombres réels), et posons $E=Z_2$, si une telle correspondance n'existe pas. On voit sans peine sans recours à l'axiome du choix que l'ensemble E a la puissance $\aleph_1$, mais nous ne pouvons pas dire qu'il l'a effectivement.

Nous avons ainsi *un exemple effectif d'un ensemble dont nous pouvous démontrer sans recours à l'axiome du choix qu'il a la puissance* $\aleph_1$ *sans l'avoir effectivement.* L'ensemble E est en même temps *un exemple d'un ensemble qui „peut" être bien ordonné* (dans le sens purement idéaliste du mot „pouvoir") *sans que nous sachions le bien ordonner effectivement.*

On peut aussi donner sans peine *un exemple effectif d'un ensemble* E *dont nous savons démontrer sans faire appel à l'axiome du choix qu'il peut être bien ordonné, mais dans lequel nous ne savons choisir aucun élément.*

En effet, soit Z_3 l'ensemble de tous les nombres transfinis de la troisième classe de Cantor, et soit T l'ensemble de toutes les fonctions discontinues $f(x)$ d'une variable réelle qui satisfont (pour tous les nombres réels x et y) à l'équation fonctionnelle $f(x+y)=$ $=f(x)+f(y)$.

S'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de T et ceux de Z_3, posons $E=T$; sinon, posons $E=Z_3$ Comme on voit sans peine, l'ensemble E ainsi défini jouit des propriétés annoncées. L'ensemble E est en même temps un exemple d'un ensemble de puissance $\aleph_2$ qui n'est pas effectivement de puissance $\aleph_2$.

Nous définirons maintenant *un ensemble de nombres réels qui est de puissance du continu* (ce qu'on démontre sans recours à l'axiome du choix) *sans l'être effectivement.*

Soit H un ensemble non vide de nombres de l'intervalle $(0, 1)$ dans lequel nous ne savons choisir aucun élément (c'est-à-dire nous ne savons nommer aucun élément individuel de l'ensemble H).

Le problème d'existence d'un tel ensemble a été posé par M. E. Borel[1]) et résolu affirmativement par M. N. Lusin au moyen de la théorie des ensembles analytiques[2]). Voici encore un autre exemple d'un tel ensemble H basé sur des considérations d'un ordre un peu différent.

Soit

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnels (Nous savons définir effectivement une telle suite).

x étant un nombre réel, intérieur à l'intervalle $(0, 1)$,

$$x=\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_3}}+\dots$$

où $n_1<n_2<n_3<\dots$, son développement en fraction dyadique essentiellement infinie, désignons par $\varphi(x)$ le type d'ordre de l'ensemble de tous les nombres r_{n_k} $(k=1, 2, 3, \dots)$, ordonné d'après leur grandeur.

Désignons maintenant par M l'ensemble de tous les nombres réels x intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$, pour lesquels $\alpha=\varphi(x)$ est un nombre ordinal, tel que $2^{\aleph_0}=\aleph_\alpha$.

Or, désignons par H l'ensemble M. si $M\neq 0$, et l'ensemble de tous les nombres réels x, intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$, si $M=0$. L'ensemble H est ainsi défini effectivement et on démontre évidemment sans faire appel à l'axiome du choix qu'il n'est pas vide. Or, dans l'état actuel de la science nous ne savons nommer aucun élément de l'ensemble H.

Définissons maintenant l'ensemble E comme l'ensemble de tous les nombres réels

(1) $$x=0, a_1\, a_2\, a_3 \dots,$$

pour lesquels le nombre

(2) $$0, a_1\, a_3\, a_5 \dots$$

appartient à H.

L'ensemble E contient évidemment un sous-ensemble de puis-

[1]) E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 3me éd. 1928, p. 162.

[2]) N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques,* Paris 1930, p. 294; cf. *Fund. Math.* t. X, p. 62.

sance du continu. En effet, l'ensemble H étant non vide, il existe un nombre réel $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ appartenant à H, et il résulte de la définition de E que tout nombre réel $0, b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3 \dots$, où $c_1, c_2, c_3, \dots$ est une suite infinie quelconque de chiffres décimaux, appartient à E: ces nombres forment évidemment un sous ensemble de E de puissance du continu. L'ensemble E étant un sous-ensemble de l'ensemble de tous les nombres réels, il en résulte (sans faire appel à l'axiome du choix) d'après le théorème de Cantor-Bernstein que l'ensemble E est de puissance du continu.

Or, l'ensemble E n'est pas effectivement de puissance du continu, puisqu'on pourrait dans ce cas définir effectivement une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, dont l'ensemble de valeurs (toutes distinctes) est E; par conséquent on pourrait nommer un élément de E, p. e. $f(0) = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, donc aussi un élément de H $(0, a_1 a_3 a_5 \dots)$ ce qui est impossible dans l'état actuel de la science.

Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus.

Par

N. Aronszajn (Paris) et K. Borsuk (Varsovie).

1. Définitions [1]. Etant donnée une fonction continue φ définie sur un sous-ensemble A d'un espace topologique [2] T, une fonction continue ψ définie sur T est dite *extension de la fonction φ sur T relative à un ensemble B*, lorsque:

1° *La fonction ψ est définie sur T,*
2° $\psi(T) \subset B$,
3° $\psi(x) = \varphi(x)$ *pour tout* $x \in A$.

En particulier, si $\varphi(x) = x$ pour chaque $x \in A$, une extension de φ sur T relative à A est dite *fonction rétractante T en A*. En cas d'existence d'une fonction rétractante T en A, nous disons que *A est un rétracte de T.*

Nous appelons un espace *A rétracte absolu*, lorsqu'il remplit la condition suivante:

(α) *A est un espace séparable et métrisable* [3] *et constitue un rétracte de chacun de ses sur-espaces métrisables.*

La condition (α) est équivalente [4] à la condition

[1] Cf. K. Borsuk, Fund. Math. XVII, p. 153, **2**, p. 156, **8** et p. 159, **15**.
[2] au sens de Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 228.
[3] c. à d. que la notion de limite dans T peut être définie à l'aide d'une métrique (distance). Cf. M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1927, p. 61, espace $\mathfrak{D}$.
[4] K. Borsuk, l. c., p. 160, **18**.