Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B.

Par

B. Gagaeff (Kazan, U. R. S. S.).

Introduction. Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions réelles continues, définies sur un intervalle fermé I, convergente vers une fonction $f(x)$. On sait, d'après un théorème bien connu de Arzelà, que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit aussi continue, est celle de la *convergence quasi-uniforme* de la suite $\{f_n(x)\}$. Cette condition peut être énoncée comme il suit:

(†) pour tout $\eta > 0$ et tout N il existe une suite finie $E_1, E_2, \ldots, E_j$ [1]) d'ensembles telle que

$$I = E_1 + E_2 + \ldots + E_j$$

et une suite $k_1, k_2, \ldots, k_j$ de nombres naturels $> N$ telle que pour $n = 1, 2, \ldots, j$ la relation: $x \in E_n$ entraîne

$$|f_{k_n}(x) - f(x)| < \eta.$$

Il est à remaquer qu'on peut dans cet énoncé supposer les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_j$ *ouverts* dans I. En effet, la condition (†) modifiée ainsi reste suffisante *a fortiori* et, quant à sa nécessité, il suffit de remarquer que $f_n(x)$ et $f(x)$ étant continues, tout ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[|f_n(x) - f(x)| < \eta]$ est ouvert dans I [2]).

[1]) j dépend de N et η.

[2]) Remarquons encore qu'en supposant les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_j$ ouverts, on peut supprimer la condition que les nombres $k_1, k_2, \ldots, k_j$ soient arbitrairement grands. Voir p. 187.

Dans la Note présente nous allons donner *une condition nécessaire et suffisante pour que la limite d'une suite convergente de fonctions mesurables B de classe α soit aussi de cette classe.*

Cette condition sera analogue (dans une certaine mesure) à la condition de la convergence quasi-uniforme, modifiée comme plus haut.

Notre théorème sera énoncé pour les fonctions mesurables B dans les espaces métriques.

Prémisses sur l'espace, termes et notations.

p et q étant deux points d'un espace métrique, $|p - q|$ désigne leur *distance*.

Le *diamètre* d'un sous-ensemble E d'un espace metrique (c. à d. la borne supérieure des nombres $|p - q|$ pour $p \in E$, $q \in E$) sera désigné par $d(E)$.

$f(x)$ étant une fonction quelconque, nous posons:

$$f(E) = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[\text{il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x)]$$

$$f^{-1}(E) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) \in E]$$

Les ensembles *fermés* et *ouverts* sont dits *de classe* 0 *multiplicative* et *additive* resp. Les produits dénombrables (resp. les sommes) d'ensembles de classe $< \alpha$ sont dits *de classe α multiplicative* (resp. *additive*).

Nous considérons des fonctions qui transforment un espace *métrique* X en sous-ensembles d'un espace *métrique séparable* Y. $f(x)$ est dite *mesurable B de classe α* (ou simplement: fonction de classe α) lorsque pour tout sous-ensemble ouvert G de Y, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive [1]).

1. Nous utiliserons dans la démonstration de notre proposition le théorème suivant, démontré par M. Lebesgue dans le cas des variables réelles [2]):

Pour qu'une fonction $\varphi(x)$ soit de classe α il faut et il suffit que

(0) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $\{Z_n\}$ d'ensembles de classe additive α telle que*

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots$$

et

$$d[\varphi(Z_n)] \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[1]) Cf. C. Kuratowski: *Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques*, Fund. Math. XVII (1931), p. 273.

[2]) *Sur les fonctions représentables analytiquement*, Journa de Mathém. 1905.

Démonstration. 1. La condition est nécessaire.

Supposons la fonction $\varphi(x)$ de classe α.

Soit $r_1, r_2, \ldots$, une suite des points dense dans Y et soit ε un nombre positif arbitraire.

Désignons par S_n les sphères de centre r_n et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ (c. à d. les ensembles $\underset{y}{\mathrm{E}}\left[|y - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$). Posons à présent:

$$Z_n = \varphi^{-1}(S_n).$$

On a donc:

$$\varphi(Z_n) \subset S_n$$

et par conséquent $d[\varphi(Z_n)] \leqslant \varepsilon$.

$\varphi(x)$ étant de classe α et S_n ouverts, tout ensemble Z_n est de classe α additive. Enfin il résulte de l'égalité: $Y = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ que $X = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$.

La condition (0) est donc satisfaite.

2. La condition est suffisante. Supposons la condition (0) vérifiée. Il existe donc pour tout k naturel une suite $Z_1^{(k)}, Z_2^{(k)}, \ldots$ d'ensembles de classe α additive telle que

$$X = Z_1^{(k)} + Z_2^{(k)} + \ldots$$

et

$$d[\varphi(Z_i^{(k)})] \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

G étant un sous-ensemble arbitraire ouvert de Y, il faut démontrer que $\varphi^{-1}(G)$ est de classe α additive. A cet effet nous allons démontrer que $\varphi^{-1}(G)$ est égal à la somme S de tous les ensembles $Z_i^{(k)}$ tels que $\varphi(Z_i^{(k)}) \subset G$. Tous les ensembles $Z_i^{(k)}$ étant de classe α additive, il en résultera que $\varphi^{-1}(G)$ l'est aussi.

Si $x \epsilon S$, alors il existe un ensemble $Z_i^{(k)}$ tel que $x \epsilon Z_i^{(k)}$ et $\varphi(Z_i^{(k)}) \subset G$, donc $\varphi(x) \epsilon G$, et par conséquent $x \epsilon \varphi^{-1}(G)$.

Supposons à présent $x \epsilon \varphi^{-1}(G)$. Soit m un nombre naturel tel que la sphère de centre $\varphi(x)$ et de rayon $\frac{2}{m}$ est contenue dans G. L'égalité: $X = Z_1^{(m)} + Z_2^{(m)} + \ldots$ entraîne l'existence d'un nombre naturel i, pour lequel: $x \epsilon Z_i^{(m)}$. Il résulte de (1) (pour $k = m$) et de la définition du nombre m que $\varphi(Z_i^{(m)}) \subset G$, donc $x \epsilon S$.

2. *Théorème. Pour que la limite $f(x)$ d'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions de classe α soit de classe α, il faut et il suffit que*

(*) *pour tout $\eta > 0$ il existe une suite infinie $\{E_n\}$ d'ensembles de classe additive α telle que*

$$X = E_1 + E_2 + \ldots$$

et une suite infinie $\{k_n\}$ de nombres naturels telle que pour tout n naturel la relation: $x \epsilon E_n$ entraîne

$$|f(x) - f_{k_n}(x)| < \eta$$ [1].

Démonstration. 1. La condition est nécessaire. Supposons toutes les fonctions $f_n(x)$ et $f(x)$ de classe α. Soit η un nombre arbitraire positif. Posons pour tout n naturel:

$$k_n = n$$

et

$$E_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\,|f(x) - f_n(x)| < \eta].$$

La suite $f_n(x)$ étant convergente vers $f(x)$, on a évidemment

$$X = E_1 + E_2 + \ldots$$

D'autre part, les fonctions $f_n(x)$ et $f(x)$ sont de classe α et par conséquent les ensembles E_n sont de classe additive α [2]).

Enfin, il résulte directement de la définition de E_n qu'on a pour tout $x \epsilon E_n$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \eta.$$

La nécessité de la condition (*) est donc démontrée.

2. La condition est suffisante. Supposons les fonctions $f_n(x)$ de classe α convergentes vers $f(x)$, et la condition (*) vérifiée.

[1]) Cf. B. Gagaeff: *Über Bairesche Klassen*, Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan, 3 série, t. III, fasc. 1 (1928), p. 18.

[2]) Ceci est évident dans le cas de fonctions réelles, mais dans le cas général la démonstration ne présente non plus aucune difficulté. Il suffit de démontrer que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant de classe α, la distance $|\varphi(x) - \psi(x)|$ est aussi une fonction de cette classe. En effet, le couple $[\varphi(x), \psi(x)]$ représente une fonction („complexe") de classe α, transformant l'espace X en un sous-ensemble de l'espace $Y \times Y$. La distance $|p - q|$, considérée pour tout couple $[p, q] \epsilon Y \times Y$ est continue dans $Y \times Y$. Par conséquent, la fonction $|\varphi(x) - \psi(x)|$ peut être traitée comme une fonction „composée": une fonction continue d'une fonction de classe α — elle est donc une fonction de classe α. Voir Kuratowski, l. c. pp. 279 et 276.

Les fonctions $f_n(x)$ satisfont donc à la condition (0) et nous en conclurons que $f(x)$ lui satisfait de même.

Soit δ un nombre positif arbitraire. Il existe, d'après (*), une suite infinie E_n d'ensembles de classe α additive telle que

(1) $$X = E_1 + E_2 + \cdots$$

et une suite $\{k_n\}$ de nombres naturels telle que pour $n = 1, 2 \ldots$

(2) $$|f(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{\delta}{3} \quad \text{pour} \quad x \in E_n.$$

Ensuite, il existe d'après (0) pour tout n naturel une suite $Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}, \ldots$ d'ensembles de classe additive α telle que

(3) $$X = Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} + \cdots$$

et

(4) $$d[f_{k_n}(Z_i^{(n)})] \leqslant \frac{\delta}{3} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

On a d'après (3) pour tout n naturel:

$$E_n = E_n Z_1^{(n)} + E_n Z_2^{(n)} + E_n Z_3^{(n)} + \cdots$$

donc, en vertu de (1):

(5) $$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} E_n Z_i^{(n)}.$$

Tous les ensembles $E_n Z_i^{(n)}$ sont de classe α additive. Nous allons démontrer à présent que

(6) $$d[f(E_n Z_i^{(n)})] \leqslant \delta \qquad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ i = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

En effet, soit $x_1 \in E_n Z_i^{(n)}$ et $x_2 \in E_n Z_i^{(n)}$.

Il résulte de (4) que

$$|f_{k_n}(x_1) - f_{k_n}(x_2)| \leqslant \frac{\delta}{3}$$

et d'après (2):

$$|f(x_1) - f_{k_n}(x_1)| < \frac{\delta}{3}$$

et

$$|f(x_2) - f_{k_n}(x_2)| < \frac{\delta}{3},$$

donc

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta.$$

L'inégalité (6) est donc démontrée.

δ étant un nombre positif arbitraire, les relations (5) et (6) démontrent que la fonction $f(x)$ satisfait à la condition (0).

Elle est donc de classe α.

3. Notre théorème donne pour le cas $\alpha = 0$:

Pour que la limite $f(x)$ d'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions continues soit continue il faut et il suffit que pour tout $\eta > 0$ il existe une suite infinie $\{G_n\}$ d'ensembles ouverts telle que

$$X = G_1 + G_2 + \cdots$$

et une suite infinie $\{k_n\}$ de nombres naturels telle qu'on ait pour tout n naturel:

$$|f(x) - f_{k_n}(x)| < \eta \quad \textit{pour} \quad x \in G_n.$$

Or, il est à remarquer que dans le cas d'espace X *compact* on peut remplacer les suites *infinies* $G_1, G_2, \ldots$ et $k_1, k_2, \ldots$ par des suites *finies*, en s'appuyant sur le théorème de Heine-Borel.

4. Remarquons encore [1]) que la condition (*) peut être remplacée dans notre théorème par la condition suivante:

($\ast\ast$) *pour tout $\eta > 0$ et tout N il existe un nombre naturel $n > N$ tel que l'ensemble*

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\,[|f(x) - f_n(x)| < \eta]$$

est de classe α additive.

La nécessité de cette condition est évidente et pour démontrer sa suffisance, remarquons que ($\ast\ast$) entraîne (*).

En effet: η étant un nombre positif arbitraire, il résulte

[1]) Cette remarque est due à M. Szpilrajn.

de $(\ast\ast)$ qu'il existe une suite croissante $\{k_n\}$ de nombres naturels telle que les ensembles

$$E_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[|f(x) - f_{k_n}(x)| < r_i]$$

sont de classe α additive.

Or, il résulte de la convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ que

$$X = E_1 + E_2 + \dots$$

La condition $(\ast)$ est donc satisfaite.

Sur les ensembles de la même puissance qui ne sont pas effectivement de la même puissance.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous disons que deux ensembles M et N *ont la même puissance*, s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux de N.

Nous disons que deux ensembles M et N *ont effectivement la même puissance,* si *nous savons* établir effectivement une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux de N [1]).

En particulier, nous disons qu'un ensemble E a effectivement la puissance du continu, si nous savons déterminer effectivement une correspondance biunivoque entre les éléments de E et les nombres réels. On connait des exemples d'ensembles qui ont la puissance du continu sans l'avoir effectivement; tels sont: l'ensemble de tous les ensembles dénombrables de nombres réels, l'ensemble de toutes les fonctions de la classe 2 de Baire, l'ensemble de toutes les fonctions représentables analytiquement, l'ensemble de tous les ensembles analytiques, l'ensemble de tous les ensembles projectifs. La démonstration que chacun de ces ensembles a la puissance du continu utilise l'axiome du choix.

Or, nous donnerons *un exemple effectif d'un ensemble dont nous pouvons démontrer sans recours à l'axiome du choix qu'il a la puissance du continu mais ne l'a pas effectivement.*

[1]) Voir *Fund. Math.* t. II, p. 113; voir aussi mon livre *Leçons sur les nombres transfinis,* Paris, Gauthier-Villars 1928, p. 23. et l'opinion de M. Henri Lebesgue. l. c., p. 24, note (1). Cf. les notions *einwertig*, resp. *vielwertig äquivalent* de M. F. Bernstein, *Götting. Nachrichten* 1904, p. 558, ainsi que la notion d'un ensemble *effectivement énumérable* de M. Emile Borel, *Acc. dei Lincei* vol. 28 série 5e, 1919, p. 164.