Un exemple d'une fonction semicontinue, universelle pour les fonctions continues.

Par

L. Kantorovitch (Leningrad, U. R. S. S.).

On peut démontrer sans peine qu'il n'existe aucune fonction *continue* de deux variables qui était universelle pour les fonctions continues d'une variable.

Le but de cette note est de construire une fonction universelle, semicontinue par rapport à ses deux arguments. Notamment, nous allons construire *une fonction semicontinue inférieurement* $F(x, t)$ *de deux variables* x *et* t *(pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$), *continue par rapport à la variable* x *et telle que, pour tout fonction positive* [1] *et continue* $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *il existe toujours une valeur* t' *de* t, *telle que*

$$F(x, t') = f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Numérotens maintenant tous les polynômes aux coefficients rationnels qui ne prennent que des valeurs positives dans l'intervalle (0, 1). Nous avons ainsi une suite:

$$(1) \qquad P_1(x), \; P_2(x), \ldots, \; P_n(x), \ldots$$

Désignons par $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de tous les nombres, dont les premiers k quotients incomplets dans le dévelloppement en fraction continue sont précisement $n_1, n_2, \ldots, n_k$, c.-à-d. l'intervalle *ouverts*:

$$(2) \qquad \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \left(\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k}; \;\; \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k} + \frac{1|}{|1}\right).$$

[1]) Cela ne restreint pas la généralité.

Posons, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$(3) \qquad \varphi_n(x, t) = \begin{cases} P_{n_k}(x), & si\ t \in \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \\ 0, & si\ t\ n'appartient\ à\ aucun\ \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \end{cases}$$

(c.-à-d, si t est l'extremité d'un de ces intervalles).

D'après la définition, nous voyons que la fonction $\varphi_k(x, t)$ est continue par rapport à x et qu'elle est semicontinue inférieurement par rapport à la couple de variables (x, t).

Définissons maintenant la suite des fonctions $\psi_k(x, t)$ de la manière suivante:

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi_1(x, t) = \varphi_1(x, t) \\ \psi_{k+1}(x, t) = \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Max}\,[\psi_k(x, t),\; \varphi_{k+1}(x, t)],\; \psi_k(x, t) + \frac{1}{2^k}\right\}. \end{cases}$$

On voit sans peine que la fonction $\psi_k(x, t)$, ainsi définie par récurrence, 1) est elle aussi continue par rapport à x et 2) semicontinue inférieurement par rapport à la couple de variables (x, t). En outre, on a évidemment:

3) $\psi_k(x, t) \geqslant 0$,

4) $\psi_k(x, t) \leqslant \psi_{k+1}(x, t) \leqslant \psi_k(x, t) + \frac{1}{2^k}$.

Il résulte de 4), en vertu de principe général de convergence (du à Cauchy), que la suite des fonctions $\psi_k(x, t)$ converge uniformément vers une fonction limite $F(x, t)$:

$$(5) \qquad F(x, t) = \lim_{k \to \infty} \psi_k(x, t).$$

Cette fonction $F(x, t)$ jouit des propriétés suivantes:

I. Elle est continue par rapport à x;

II. Elle est semicontinue inférieurement par rapport à la couple (x, t);

III. $F(x, t) \geqslant 0$;

IV. Elle est universelle pour les fonctions continues positives d'une variable, c.-à-d., qu'elle que soit la fonction continue $f(x) > 0$, il existe un nombre t', $0 \leqslant t' \leqslant 1$, tel que:

$$(6) \qquad F(x, t') = f(x).$$

Les propriétées I, II, III sont évidentes. Démontrerons la propriété IV.

Soit donnée une fonction continue $f(x) > 0$.

D'après le théorème connu de Weierstrass, on peut choisir une suite partielle de polynomes (1):

$$P_{n_1}(x),\ P_{n_2}(x), \dots,\ P_{n_k}(x), \dots \tag{7}$$

telle que l'on ait:

$$f(x) - \frac{1}{2^k} < P_{n_k}(x) < f(x),\ \lim_{k\to\infty} P_{n_k}(x) = f(x) \tag{8}$$

$$P_{n_{k+1}}(x) \geqslant P_{n_k}(x);\ \ P_{n_{k+1}}(x) \leqslant P_{n_k}(x) + \frac{1}{2^k}. \tag{9}$$

Posons maintenant

$$t' = \frac{1}{\underline{|n_1}} + \frac{1}{\underline{|n_2}} + \dots + \frac{1}{\underline{|n_k}} + \dots,$$

cette valeur de t vérifie bien la relation (6) à démontrer.

En effet, en vertu de (3)

$$\varphi_k(x, t') = P_{n_k}(x). \tag{10}$$

D'après (4), nous avons

$$\psi_1(x, t') = P_{n_1}(x).$$

Supposons qu'on vérifie déjà la relation:

$$\psi_k(x, t') = P_{n_k}(x). \tag{11}$$

Alors, en s'appuyant sur (4), (9), (10) et (11), on obtiendra facilement:

$$\psi_{k+1}(x, t') = \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Max}\,[\psi_k(x, t'),\ \varphi_{k+1}(x, t')],\ \psi_k(x, t') + \frac{1}{2^k}\right\} =$$

$$= \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Max}\,[P_{n_k}(x),\ P_{n_{k+1}}(x)],\ P_{n_k}(x) + \frac{1}{2^k}\right\} =$$

$$= \mathrm{Min}\left\{P_{n_{k+1}}(x),\ P_{n_k}(x) + \frac{1}{2^k}\right\} = P_{n_{k+1}}(x).$$

Donc, la relation (11) est démontrée pour toutes les valeurs d'index k.

Or,

$$F(x, t') = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x, t') = \lim_{k\to\infty} P_{n_k}(x) = f(x).$$

C. Q. F. D.

Il ce pose bien naturellement le problème que voici:

Existe-t-il une fonction $F_\alpha(x, t)$ du type $g_{\alpha+1}$ (dans la classification de M. W. H. Young) qui soit universelle pour les fonction d'une variable $f(x)$ de classe α (dans la classification de M. R. Baire.

Ici nous venons de donner une réponse positive, pour le cas $\alpha = 0$ [1]).

[1]) Il est intéressant de rattacher cette question deux résultats antérieurs que voici [v. ma note: *Sur les fonctions universelles*. Journ. de la Soc. Ph.-Math. de Leningrad, t. 11, f. 2, p. 13]: 1) Il existe une fonction $F(x, t)$ du type g_α, universelle pour les fonctions $f(x)$ du même type et 2) il n'existe aucune fonction $F(x, t)$ de classe α, universelle pour les fonctions $f(x)$ de la même classe.