Liste des travaux cités.

1. Banach, St.: *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 283—295.
2. Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, Berlin—Leipzig 1927.
3. Hurewicz, W.: *Zur Theorie der analytischen Mengen*, Fund. Math. XV (1930), pp. 4—17.
4. Kuratowski, C.: *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*. Fund. Math. XVII, (1931), pp. 249—272.
5. — *Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 275—282.
6. — *Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés*, Fund. Math. XVIII (1932), pp. 148—159.
7. — et Tarski, A.: *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 240—248.
8. Lusin, N.: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930.
9. Mazurkiewicz, St. et Sierpiński, W.: *Sur un problème concernant les fonctions continues*, Fund. Math. VI (1924), pp. 161—169.
10. Sierpiński, W.: *Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points*, Mathematica (Cluj) V (1931), pp. 49—58.
11. — *Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans*, Comptes-Rendus des séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie XXIV (1931), cl. III, pp. 57—77.
12. — *Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 77—91.
13. — *Sur les cribles projectifs*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 30—31.
14. — *Sur un ensemble fermé conduisant à un ensemble non mesurable (B)* Fund. Math. VII (1925), pp. 198—202.
15. — *Sur les images des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. II (1921), pp. 74—80.

Sur l'hyperespace d'un continu.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

E étant un espace métrique et compact, désignons par 2^E l'hyperespace de E c. à d. l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés non vides de E, métrisé par la distance de M. Hausdorff [1]) Nous désignerons les distances dans E, 2^E, 2^{2^E} par ϱ, ϱ_1, ϱ_2 respectivement, les diamètres par δ, δ_1, δ_2.

Je vais supposer dans la suite que E est un continu.

2^E est alors un continu [2]) „arcwise connected" [3]). Ce continu est péanien, si E est péanien [4]) et vice versa [5]).

Soit (r, φ) un système de coordonnées polaires, p_0 le point $r=0$, P un ensemble parfait, punctiforme, situé sur la circonférence $r=1$. J'appelle *étoile de Cantor*, l'ensemble-somme de segments réctilignes $\overline{p_0 p}$, où $p \in P$.

p_0 est le *centre*, les points $p \in P$ — les *extrémités*, les segments $\overline{p_0 p}$ les *rayons* de l'etoile. Deux étoiles de Cantor sont homéomorphes.

Théorème. *L'hyperespace 2^E d'un continu E est l'image continue d'une étoile de Cantor.*

Lemme 1. Soit: $X_1 \in 2^E$, $X_2 \in 2^E$, $Y_1 \in 2^E$, $Y_2 \in 2^E$; $\varrho_1(X_1, Y_1) \leqq \lambda \geqq \varrho_1(X_2, Y_2)$; $X_1 \subset X_2$ $Y_1 \subset Y_2$. Alors: $\varrho_1(X_1, Y_2) \leqq \lambda \geqq \varrho_1(X_2, Y_1)$.

[1]) Hausdorff: Mengenlehre 1927, § 28. Le symbole 2^E a été introduit par M. Kuratowski, Fund. Math XIII, p. 259 ss..

[2]) Vietoris: Monatsh. f. Math. u. Phys. XXIII, p. 56, Satz (8'').

[3]) Borsuk-Mazurkiewicz: C. R. de la Soc. Scient. de Varsovie. Séance de 21 Mars, 1931.

[4]) Vietoris: l, c., p. 56, Satz (9').

[5]) Ważewski: Fund. Math. p. 214—235 en part p. 232, théorème XXIV.

On a:

$$(1)\qquad \max_{x\epsilon X_1}\varrho(x,\ Y_2)\leqq \max_{x\epsilon X_2}\varrho(x,\ Y_2)\leqq \varrho_1(X_2,\ Y_2)\leqq\lambda$$

$$(2)\qquad \max_{y\ Y_2}\varrho(y,\ X_1)\leqq \max_{y\epsilon Y_1}\varrho(y,\ X_1)\leqq \varrho_1(X_1,\ Y_1)\leqq\lambda$$

$$(3)\qquad \max_{x\epsilon X_2}\varrho(x,\ Y_1)\leqq \max_{x\ X_2}\varrho(x,\ Y_2)\leqq \varrho_1(X_2,\ Y_2)\leqq\lambda$$

$$(4)\qquad \max_{y\epsilon Y_1}\varrho(y,\ X_2)\leqq \max_{y\epsilon Y_1}\varrho(y,\ X_1)\leqq \varrho_1(X_1,\ Y_1)\leqq\lambda$$

ce qui entraîne la thèse de nôtre lemme.

Nous appellons *segment de* 2^E un ensemble $\mathfrak{A}\,\epsilon\,2^{2^E}$ (c. à d. un sous-ensemble fermé de 2^E) si 1) $\mathfrak{A}$ est connexe, 2) pour $X_1\,\epsilon\,\mathfrak{A}$, $X_2\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ on a l'une des relations: $X_1\subset X_2$, $X_1\supset X_2$.

Lemme 2. Tout segment $\mathfrak{A}$ de 2^E contient un (et un seul) *element initial* $X_0(\mathfrak{A})$, tel que $X\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ entraîne $X\subset X_0(\mathfrak{A})$ et un (et un seul) *element final* $X_1(\mathfrak{A})$ tel que $X\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ entraîne $X_1(\mathfrak{A})\subset X$.

En effet l'element initial est l'ensemble-element de $\mathfrak{A}$ saturé par rapport à la propriété d'être element de $\mathfrak{A}$. Cet ensemble saturé existe [6]), car $\mathfrak{A}$ étant fermé les relations: $X_n\,\epsilon\,\mathfrak{A}$, $X_n\subset X_{n+1}$ entraînent: $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} X_n}=\lim X_n\,\epsilon\,\mathfrak{A}$.

De même l'element final est l'ensemble-element de $\mathfrak{A}$ irréductible par rapport à la propriété d'être element de $\mathfrak{A}$. Cette propriété étant inductive l'ensemble irréductible existe en vertu du théorème classique de Brouwer [7]).

Désignons par Γ l'ensemble de tous les segments de 2^E, qui admettent E comme element initial

Lemme 3. Si $Y\,\epsilon\,2^E$, il existe un $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\Gamma$ tel que $X_1(\mathfrak{A})=Y$. La démonstration de ce lemme se trouve dans la note cité de M. Borsuk et de moi.

Lemme 4. Γ est un sous-ensemble fermé de 2^{2^E}.

En effet soit $\mathfrak{A}_n\,\epsilon\,\Gamma$, $n=1,2,\ldots$ $\lim\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_0$. D'abord $\mathfrak{A}_0$ est un continu. Soit: $X\,\epsilon\,\mathfrak{A}_0$, $Y\,\epsilon\,\mathfrak{A}_0$; il existe deux suites: $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ telles que: $X_n\,\epsilon\,\mathfrak{A}_n$ $Y_n\,\epsilon\,\mathfrak{A}_n$, $\lim X_n=X$, $\lim Y_n=Y$. $\mathfrak{A}_n$ étant un segment on a pour

[6]) v. p. ex. Mazurkiewicz, Fund. Math. 1, pp. 195—196.

[7]) v. p. ex. Menger. *Dimensionstheorie*, pp. 69—70, 78.

tout n l'une au moins des relations $X_n\subset Y_n$, $Y_n\subset X_n$, donc l'une au moins de ces relations a lieu pour une infinité des n. Il en résulte que l'on a l'une au moins des relations: $X\subset Y$, $Y\subset X$. Donc $\mathfrak{A}_0$ est un segment. Comme pour $n=1,2,\ldots$ $E=X_0(\mathfrak{A}_n)\,\epsilon\,\mathfrak{A}_n$ on a $E\,\epsilon\,\mathfrak{A}_0$; évidemment $E=X_0(\mathfrak{A}_0)$. Donc $\mathfrak{A}_0\,\epsilon\,\Gamma$ c. q. f. d.

Lemme 5. Tout segment $\mathfrak{A}$ est un arc simple. En effet il suffit de remarquer que si $X\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ et $X\neq X_0(\mathfrak{A})$, $X\neq X_1(\mathfrak{A})$ alors $\mathfrak{A}-(X)$ n'est pas connexe [8]).

Soit $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\Gamma$; désignons par $\Phi(\mathfrak{A})$ la classe de toutes les fonctions $Z(t)$ qui satisfont aux conditions suivantes: 1) $Z(t)$ est continue pour $0\leqq t\leqq 1$; 2) $Z(t)$ transforme l'intervalle $0\leqq t\leqq 1$ en $\mathfrak{A}$; 3) $Z(0)=E$, et $Z(t_2)\subset Z(t_1)$ pour $t_1<t_2$. La classe $\Phi(\mathfrak{A})$ n'est pas vide; en effet elle contient toute fonction $Z(t)$ établissant un homéomorphisme entre l'intervalle $0\leqq t\leqq 1$ et le segment $\mathfrak{A}$ et satisfaisant à la condition $Z(0)=E$. Or il existe une telle fonction d'après le lemme 5.

Lemme 6. Soit $\mathfrak{A}_1\,\epsilon\,\Gamma$; $Z_1(t)\,\epsilon\,\Phi(\mathfrak{A}_1)$; $\eta>0$. Pour tout $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\Gamma$ satisfaisant à l'inégalité $\varrho_2(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A})<\frac{1}{8}\eta$ il existe une fonction $Z(t)\,\epsilon\,\Phi(\mathfrak{A})$ telle que $\varrho_1(Z_1(t)\ Z(t))<\eta$, pour $0\leqq t\leqq 1$

Remarquons d'abord, que l'on a:

$$(5)\qquad \varrho_1(X_1(\mathfrak{A}_1),\ \ X_1(\mathfrak{A}))<\tfrac{1}{8}\eta$$

en effet on peut détérminer un $U_1\,\epsilon\,\mathfrak{A}_1$ et un $U\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ de manière à avoir:

$$(6)\qquad \varrho_1(U,\ X_1(\mathfrak{A}_1))<\tfrac{1}{8}\eta>\varrho_1(U_1,\ X_1(\mathfrak{A}))$$

comme d'autre part $U\supset X_1(\mathfrak{A})$ et $U_1\supset X_1(\mathfrak{A})$ on a (5) d'après le lemme 1.

$Z_1(t)$ étant continue, nous pouvons détérminer la suite $t_0=0<$ $<t_1<t_2\ldots<t_k=1$ de manière à avoir:

$$(7)\qquad \varrho_1(Z_1(t_i),\ Z_1(t_{i+1}))<\tfrac{1}{8}\eta\quad i=0,1,\ldots,k-1.$$

Posons $Y_0=E$, $Y_k=X_1(\mathfrak{A})$ et détérminons pour $i=1,2,\ldots,k-1$, $Y_i\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ de manière à avoir:

$$(8)\qquad \varrho_1(Z_1(t_i),\ Y_i)<\tfrac{1}{8}\eta$$

[8]) Comp. Straszewicz. Math. Ann. 78, p. 369 ss.

en tenant compte de (5) on voit que (8) est verifiée pour $i = 0, 1, \ldots, k$. Déterminons la suite $\{Y'_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$ par les conditions suivantes:

I) $Y'_0 = Y_0$.

II) supposons détérminé $Y'_i \in \mathfrak{A}$. Si $Y_{i+1} \subset Y'_i$ on pose $Y'_{i+1} = Y_{i+1}$, dans le cas contraire $Y'_{i+1} = Y'_i$. On voit bien que $Y'_k = Y_k$.

Démontrons par induction l'inégalité:

$$\varrho_1(Z_1(t_i)),\ Y'_i) < \tfrac{1}{6}\eta \tag{9}$$

d'après (8) elle est vérifiée pour $i = 0$. Supposons la vérifiée pour un i; elle est encorre vérifie, d'après (8) pour $i+1$, si $Y'_{i+1} = Y_{i+1}$. Si $Y'_{i+1} \neq Y_{i+1}$, on a: $Y'_{i+1} = Y'_i$ et on ne peut pas avoir $Y_{i+1} \subset Y'_i$, donc, $\mathfrak{A}$ étant un segment:

$$Y_{i+1} \supset Y'_i = Y'_{i+1} \tag{10}$$

d'autre part:

$$Z_1(t_{i+1}) \subset Z_1(t_i) \tag{11}$$

$$\varrho_1(Z_1(t_{i+1}),\ Y_{i+1}) < \tfrac{1}{6}\eta \tag{12}$$

(9), (10), (11), (12) et le lemme 1 donnent:

$$\varrho_1(Z_1(t_{i+1}),\ Y'_{i+1}) = \varrho_1(Z_1(t_{i+1}),\ Y'_i) < \tfrac{1}{6}\eta. \tag{13}$$

Donc (9) est démontrée.

Soit $Z^*(t) \in \Phi(\mathfrak{A})$. Posons $t'_0 = 0$, $t'_k = 1$ et désignons pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$ par t'_i le plus petit nombre réel tel que: $Z^*(t'_i) = Y'_i$. D'après la construction des Y'_i on a: $Y'_i \supset Y'_{i+1}$, donc $t'_i \leqq t'_{i+1}$. Détérminons la fonction $Z(t)$ par les conditions suivantes:

(I) $Z(t_i) = Y'_i = Z^*(t'_i)$

(II) pour $t_i < t < t_{i+1}$ et $Y'_i = Y'_{i+1}$ soit $Z(t) = Y' = Y'_{i+1}$

(III) pour $t_i < t < t_{i+1}$ et $Y'_i \neq Y'_{i+1}$ on a certainement $t'_i < t'_{i+1}$.

Posons dans ce cas: $Z(t) = Z^*\left(t_i + \dfrac{t - t'_i}{t'_{i+1} - t'_i}(t_{i+1} - t_i)\right)$.

On vérifie aisément que $Z(t) \in \Phi(\mathfrak{A})$. D'après (17), (13), (I) on a:

$$\varrho_1(Z(t_i),\ Z(t_{i+1})) < \tfrac{1}{2}\eta \tag{15}$$

donc pour $t_i \leqq t \leqq t_{i+1}$ on obtient en tenant compte de (7), (I) et de ce que: $Z_1(t_i) \supset Z_1(t) \supset Z_1(t_{i+1})$; $Z(t_i) \supset Z(t) \supset Z(t_{i+1})$:

$$\begin{aligned}\varrho_1(Z_1(t), Z(t)) &\leqq \varrho_1(Z_1(t),\ Z_1(t_i)) + \varrho_1(Z_1(t_i),\ Z(t_i)) + \\ &+ \varrho_1(Z(t_i),\ Z(t)) < \tfrac{1}{6}\eta + \tfrac{1}{6}\eta + \tfrac{1}{2}\eta < \tfrac{5}{6}\eta < \eta.\end{aligned} \tag{15}$$

Le lemme est ainsi démontré.

Démonstration du théorème. Désignons par G une étoile de Cantor ayant p_0 comme centre et P comme ensemble d'extrémités. Il existe [9]) une fonction continue $\mathfrak{A}(p)$ determinée pour $p \in P$ et transformant P en Γ c. à d. telle que $\mathfrak{A}(P) = \Gamma$.

Considérons un système d'ensembles fermés $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$; $k = 1, 2, \ldots$; $n_i = 1, 2, \ldots, l_i$ possèdant les propriétes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{l_1} P_n = P \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{l_{k+1}} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n} = P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{17}$$

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n} \times P_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, m} = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n \tag{18}$$

$$\delta_2(\mathfrak{A}(P_{n_1, n_2, \ldots, n_k})) < (\tfrac{1}{6})^k \tag{19}$$

l'existence d'un tel système se démontre sans peine.

A chaque $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ faisons correspondre un point $p_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

D'après (17), (19) on aura:

$$\varrho_2(\mathfrak{A}(p_{n_1, n_1, \ldots, n_k}),\ \mathfrak{A}(p_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}})) < (\tfrac{1}{6})^k. \tag{20}$$

Determinons maintenant le système de fonctions: $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(t)$ par les conditions suivantes:

a) $Z_{n_1}(t)$ est une fonction de la classe $\Phi(\mathfrak{A}(p_{n_1}))$

b) Supposons determinées les fonctions $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(t)$ pour une valeur de k et supposons que $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(t) \in \Phi(\mathfrak{A}(p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}))$.

$Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}(t)$ est une fonction telle que:

$$Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}(t) \in \Phi(\mathfrak{A}(p_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}})) \tag{21}$$

$$\varrho_1(Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}(t),\ Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(t)) < (\tfrac{1}{6})^{k-1} \tag{22}$$

une telle fonction existe d'après le lemme 6.

[9]) Comp. Menger. op. cit., pp. 233—4.

Soit $q \epsilon G$; désignons par $p(q)$ l'extrémité du rayon de l'étoile G contenant q par $t(q)$ la distance $\varrho(q, p_0)$. Déterminons pour $k = 1, 2, \dots$ la fonction $V_k(q)$ de manière suivante: pour $p(q) \epsilon P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ on a:

$$V_k(q) = Z_{n_1, n_2, \dots, n_k}(t(q)). \tag{23}$$

D'apres (17), (18) la définition est univoque pour $t(q) > 0$; elle l'est encore pour $t(q) = 0$ c. à d. pour $q = p_0$, car $Z_{n_1, n_2, \dots, n_k}(0) = E$. D'après (17), (18) $V_k(q)$ est une fonction continue. Il résulte enfir de (17), (22) que:

$$\varrho_1(V_{k+1}(q), V_k(q)) < (\tfrac{1}{3})^{k-1} \tag{24}$$

donc la suite $\{V_k(q)\}$ est uniformément convergente. Posons:

$$V(q) = \lim_{k=\infty} V_k(q) \tag{25}$$

la fonction $V(q)$ est continue sur l'étoile G.

Soit $U \epsilon 2^E$. D'après le lemme 3 il existe un $\mathfrak{A}' \epsilon \Gamma$ tel que $U = X_1(\mathfrak{A}')$. D'autre part P contient un point p' tel que $\mathfrak{A}(p') = \mathfrak{A}'$. Le système $\{P_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ étant un système determinant pour P (d'après (16), (17)) il existe une suite d'indices: $m_1, m_2, \dots$ tel que:

$$p' \subset \prod_{k=1}^{\infty} P_{m_1, m_2, \dots, m_k} \tag{26}$$

donc:

$$V_k(p') = Z_{m_1, m_2, \dots, m_k}(1) = X_1(\mathfrak{A}(p_{m_1, m_2, \dots, m_k})) \tag{27}$$

D'après (19), (26) on a:

$$\varrho_2(\mathfrak{A}(p'), \mathfrak{A}(p_{m_1, m_2, \dots, m_k})) < (\tfrac{1}{3}))^k \tag{28}$$

donc, d'après la relation (5):

$$\varrho_1(U, V_k(p')) = \varrho_1[X_1(\mathfrak{A}(p')), X_1(\mathfrak{A}(p_{m_1, m_2, \dots, m_k}))] < (\tfrac{1}{3})^k \tag{29}$$

$$U = \lim V_k(p') = V(p'). \tag{30}$$

On voit que $V(G) \supset 2^E$. Comme d'autre part on a évidemment $V(G) \subset 2^E$ il s'ensuit: $V(G) = 2^E$ et le théorème est démontré.

En utilisant la notion du *type* c [10], nous pouvons enoncer notre théorème comme il suit. *Le type c de 2^E est $\leqq$ type c de l'étoile de Cantor.*

[10] **Sierpiński**, Fund. Math. XIV, pp. 234—236.

Le type c de l'étoile de Cantor est donc la limite supérieure des types c appartenant aux hyperespace des continus. Or *cette limite est exacte*; en effet *elle est atteinte pour tout continu E tel que E^* est non séparable* [11]).

Posons pour simplifier les notations: $E_1 = 2^E$. E^* n'étant pas séparable il existe une constante positive λ et un ensemble non dénombrable $W \subset E$ tel que pour $x \epsilon W$, $y \epsilon W$, $-\varrho_E(x, y) > \lambda$. L'ensemble $\mathfrak{W}$ de tous les ensembles (x) où $x \epsilon W$, c. à d de tous les sous-ensembles de E qui se réduisent à un point de W est non dénombrable et $\mathfrak{W} \subset 2^E$. Or il résulte des théorèmes X et XXIII da M. **Ważewski** [12]), que

$$\varrho_E(x, y) \leqq 2\, \varrho_{E_1}((x), (y)) \tag{31}$$

donc pour $(x) \epsilon \mathfrak{W}$, $(y) \epsilon \mathfrak{W}$, on a $\varrho_{E_1}((x), (y)) > \frac{\lambda}{2}$. Il en résulte que E_1^* n'est pas séparable, donc, G étant une étoile de Cantor, — G est l'image continue de $E_1 = 2^E$, en d'autres [13]) termes $c\,G \leqq c\,2^E$. Comme d'autre part d'après nôtre théorème: $c\,G \leqq c\,2^E$, on a le résultat: *si E^* n'est pas séparable alors $c\,2^E = c\,G$.*

[11]) E^* est l'espace de **Urysohn** (Verh. Akad. Amsterdam. Erste Sectie Deel XIII, Nr. 4, pp. 35–42).

[12]) Fund. Math. pp. 221, 231.

[13]) **Mazurkiewicz**. C. R. du Premier Congrès des Mathématicies des Pays Slaves, pp. 68—9.

Warszawa 24/IX 1931.