Sur les cribles fermés et leurs applications [1]).

Par

C. Kuratowski (Lwów) et E. Szpilrajn (Varsovie).

Introduction.

Nous considérons dans la Note présente des opérations sur les ensembles qui présentent une généralisation de l'opération bien connue de la *projection* et de celle du *crible* au sens de M. Lusin [2]).

Nous démontrons en particulier la proposition suivante (théorème 9):

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire E soit analytique est l'existence d'un ensemble plan fermé F, tel que E soit l'ensemble de tous les nombres ξ tels que la droite $x=\xi$ contienne un point (au moins) de F, à ordonnée irrationnelle.

Nous démontrons aussi plusieurs théorèmes (en particulier le théorème 5) qui établissent des rapports entre l'opération générale du crible et les propriétés de diverses classes d'ensembles fermés, considérées comme sous-ensembles de l'espace des ensembles fermés (métrisé par la formule de M. Hausdorff).

Ces théorèmes sont liés au problème de la construction d'un ensemble analytique non-borelien. La construction d'un tel ensemble dans l'espace euclidien est — comme on sait — assez artificielle. Par contre, dans l'espace des ensembles fermés il y a des classes (d'ensembles) non-boreliennes qui se présentent d'une façon tout-à-fait naturelle. Par exemple, comme l'a démontré M. Hurewicz, la classe des ensembles fermés non dénombrables constitue dans cet espace un ensemble analytique non-borelien [1]). La démonstration de M. Hurewicz, basée sur „la théorie des indices" est cependant assez longue.

Les théorèmes que nous énonçons dans cette Note permettent de démontrer d'une façon très simple que la classe considérée par M. Hurewicz, ainsi que d'autres classes encore, constituent (dans l'espace des ensembles fermés) des *ensembles analytiques non-boreliens*: telle est, par exemple, la classe des sous-ensembles fermés de l'intervalle (fermé) qui contiennent des points irrationnels.

La propriété des ensembles considérés d'être *analytique* peut être démontrée aisément à l'aide de la méthode symbolique des MM. Kuratowski et Tarski [2]). L'application des cribles n'est donc essentielle que dans la partie négative de nos démonstrations; d'après laquelle ces ensembles sont *non-boreliens*.

Prémisses sur l'espace, termes et notations.

1. Nous considérons deux espaces métriques indénombrables X et Y et leur produit combinatoire $X\times Y$.

Nous supposons X *complet* et *séparable* et Y — *compact*. En outre, il faudra supposer parfois que Y est l'intervalle fermé $(0, 1)$ que nous désignons par I.

Dans le cas particulier $X=I=Y$ le produit $X\times Y$ est le carré $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. En conservant la terminologie qui se rattache à ce cas spécial, nous appellerons, pour tout point $p=(x, y)$ de $X\times Y$, x — „l'abscisse" et y — „l'ordonnée" de p. Les ensembles X et Y seronts dits „l'axe des abscisses" et „l'axe des ordonnées" et, en conséquence, pour tout ensemble $E\subset X\times Y$, les ensembles $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[$*il existe un point* y *tel que* $(x, y)\,\epsilon\, E]$ et $\underset{y}{\mathrm{E}}\,[$*il existe un point* x *tel que* $(x, y)\,\epsilon\, E]$ seront nommés „la projection de E sur l'axe des abscisses" et respectivement „la projection de E sur l'axe des ordonnées".

2. M étant un espace métrique compact, nous désignons par 2^M l'espace des ensembles fermés, non-vides, contenus dans M — métrisé selon M. Hausdorff [3]).

[1]) Les résultats contenus dans cette Note ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) aux séances du 13. III. et du 10. IV. 1931.

[2]) Récemment deux Mémoires de M. Sierpiński ont été consacrés à l'étude de ces opérations très générales. Voir Liste des travaux cités **10**, **11**.

[1]) Voir **3**.

[2]) Les Mémoires **7** et **4** contiennent l'exposition complète de cette methode.

[3]) Cf. **2**, p. 145.

3. Pour toute fonction $f(p)$ et tout ensemble E posons:

$$f(E) = \underset{q}{\mathrm{E}}\ [\textit{il existe un point } p \in E \textit{ tel que } q = f(p)]$$

$$f^{-1}(E) = \underset{p}{\mathrm{E}}\ [f(p) \in E].$$

4. Les ensembles fermés et ouverts sont dits des ensembles *de classe* 0 *multiplicative* et *additive* resp. Les produits (resp. les sommes) dénombrables d'ensembles de classes $< \alpha$ sont dits *de classe* α *multiplicative* (resp. *additive*).

Une fonction $f(p)$ qui transforme un espace métrique A en un sous-ensemble d'un espace métrique B est dite *fonction mesurable* (B) *de classe* α (ou simplement: fonction de classe α) lorsque. quel que soit l'ensemble G ouvert dans B, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive. (Les fonctions continues coïncident donc avec les fonctions de classe 0)[1]).

Lemmes sur les fonctions mesurables (B).

Soient A et B deux espaces métriques séparables et complets. On démontre aisément les lemmes suivants concernant les fonctions mesurables (B) qui transforment l'espace A en un sous-ensemble de B.

(I) $f(p)$ étant une fonction de classe α et E un ensemble de classe β additive (resp. multiplicative) dans B, l'ensemble $f^{-1}(E)$ est un ensemble de classe $\alpha + \beta$ additive (resp. multiplicative) dans A[2]).

(II) $f(p)$ étant une fonction mesurable (B) et E un ensemble analytique dans B, $f^{-1}(E)$ est un ensemble analytique dans A.

(III) $f(p)$ étant une fonction mesurable (B) et E un ensemble analytique dans A, $f(E)$ est un ensemble analytique dans B[3]).

[1]) Voir Banach **1**, p. 284 et Kuratowski **5**, p. 276. Comparer aussi Hausdorff **2**, p. 267.

[2]) Cf. p. ex. Kuratowski **5**, p. 276.

[3]) Cela résulte du fait que l'image d'une fonction mesurable (B) (c'est-à-dire $\underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[y = f(x)]$) est un ensemble borelien. Cf. Sierpiński **15**, p. 78 et Kuratowski **5**, p. 277.

Enonçons encore une proposition, due à M-lle Braun:

(IV) Prémisses: a) $f(p)$ est une fonction mesurable (B) telle que $f(A) = B$.

b) Z est un sous-ensemble de B tel que $f^{-1}(Z)$ est un ensemble borelien dans A.

Thèse: Z est un ensemble borelien dans A.

Démonstration. Posons $E = f^{-1}(Z)$. On a donc:

$$f(E) = Z$$

et d'après a):

$$f(A - E) = B - Z.$$

$f(p)$ étant une fonction mesurable (B), E et $A - E$ des ensembles boreliens dans A, on en déduit d'après (III) que Z et $B - Z$ sont des ensembles analytiques dans B. Il en résulte — en vertu du théorème de Souslin [1]) — que Z est un ensemble borelien.

Théorèmes généraux sur les cribles fermés.

Définition 1. Pour tout ensemble $E \subset X \times Y$ et tout point $\xi \in X$ posons:

$$\Delta(E, \xi) = \underset{\eta}{\mathrm{E}}\,[(\xi, \eta) \in E]$$

Définition 2. Pour tout ensemble $E \subset X \times Y$ et chaque classe K d'ensembles contenus dans Y, posons:

$$\Gamma(E, \mathsf{K}) = \underset{\xi}{\mathrm{E}}\,[\Delta(E, \xi) \in \mathsf{K}].$$

Ainsi, dans le cas où $X = I = Y$, $\Gamma(E, \mathsf{K})$ désigne l'ensemble de tous les nombres $\xi \in I$ tels que la droite $x = \xi$ coupe E selon un ensemble linéaire appartenant à K [2]). En particulier, si K se compose de tous les sous-ensembles non-vides de I, $\Gamma(E, \mathsf{K})$ est la projection de E sur l'axe des abscisses, et si K se compose de tous les sous-ensembles de I, dans lesquels la relation $<$ n'établit pas un bon ordre — $\Gamma(E, \mathsf{K})$ est „l'ensemble criblé au moyen de E" au sens de M. Lusin.

En se servant du même terme on appelle l'opération $\Gamma(E, \mathsf{K})$ „opération générale du crible".

[1]) Voir p. ex. Hausdorff **2**, p. 191, th. III.

[2]) Cf. Sierpiński **11**, p. 49 ou bien **10**, p. 57.

Définition 3. K étant une classe d'ensembles contenus dans Y, $\Phi(\mathsf{K})$ désigne la classe de tous les ensembles $\Gamma(F, \mathsf{K})$, où F est un ensemble fermé variable (contenu dans $X \times Y$).

Dans la suite nous supposerons toujours les ensembles de K fermés et non-vides.

Théorème 1. *Si K constitue un ensemble de classe α additive (resp. multiplicative) dans 2^Y, alors $\Gamma(F, \mathsf{K})$ est un ensemble de classe $1+\alpha$ additive (resp. multiplicative) pour tout ensemble fermé $F \subset X \times Y$.*

Démonstration. Soit F un ensemble fermé fixe, contenu dans $X \times Y$. Posons

$$H(x) = \Delta(F, x). \tag{1}$$

$H(x)$ est une fonction semi-continue [1]), donc une fonction mesurable (B) de première classe [2]).

On a d'après (1) et la définition 1:

$$\Gamma(F, \mathsf{K}) = H^{-1}(\mathsf{K}).$$

K étant un ensemble de classe α additive (resp. multiplicative) dans l'espace 2^Y (qui est compact, donc complet et séparable), on déduit de (I) que $\Gamma(F, \mathsf{K})$ est un ensemble de classe $1+\alpha$ additive (resp. multiplicative).

Dans le même ordre d'idées on déduit de (II) le suivant

Théorème 2. *Si K constitue un ensemble analytique dans 2^Y, alors $\Gamma(F, \mathsf{K})$ est un ensemble analytique pour tout ensemble fermé $F \subset X \times Y$.*

Désignons à présent par U un ensemble fermé, contenu dans $X \times Y$, „universel" au sens de M. Lusin, c'est-à-dire tel que F étant un sous ensemble fermé arbitraire de Y, il existe un point $\xi \in X$ pour lequel on a: $\Delta(U, \xi) = F$.

La construction d'un ensemble fermé universel dans le cas d'espace euclidien est bien connue [3]). Dans le cas général, où les espaces

[1]) Voir Kuratowski 6, p 151.
[2]) Ibid., p. 152.
[3]) Voir p. ex. Sierpiński 14.

X et Y satisfont aux conditions énoncées au début (p. 161), X contient un sous-ensemble V, homéomorphe à l'ensemble parfait non-dense de Cantor. Or, tout espace métrique compact, donc en particulier l'espace 2^Y, est une image continue de V [1]). Soit donc $H(x)$ la fonction définie et continue sur V et telle que $H(V) = 2^Y$. Posons:

$$U = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[x \in V,\ y \in H(x)].$$

Il résulte immédiatement de cette définition que U est un ensemble fermé [2]) et que, pour tout sous-ensemble fermé F de Y, il existe un point $\xi \in X$ pour lequel $\Delta(U, \xi) = H(\xi) = F$ [3]).

Théorème 3 [4]). *Si $\Gamma(U, \mathsf{K})$ est un ensemble borelien dans X, alors K constitue un ensemble borelien dans 2^Y.*

Démonstration. Soit (comme auparavant) V la projection de U sur l'axe des abscisses, et posons pour tout $x \in V$:

$$H(x) = \Delta(U, x).$$

Donc

$$\Gamma(U, \mathsf{K}) = H^{-1}(\mathsf{K}). \tag{2}$$

$H(x)$ satisfait aux prémisses de la proposition (IV) pour $A = V$, $B = 2^Y$, $f(p) = H(x)$. Il en résulte d'après (2) et notre prémisse que K est un ensemble borelien dans 2^Y.

On obtient de même d'après (III), le

Théorème 4. *Si $\Gamma(U, \mathsf{K})$ est un ensemble analytique dans X, alors K constitue un ensemble analytique dans 2^Y.*

Les théorèmes 1—4 entraînent le

Théorème 5. *Pour que la classe $\Phi(\mathsf{K})$ soit contenue dans la classe des ensembles boreliens, resp. analytiques (dans X), il faut et il suffit que K constitue un ensemble borelien resp. analytique (dans 2^Y).*

Les théorèmes 1 et 3 entraînent le suivant

[1]) Voir p. ex. Hausdorff 2. p. 198.
[2]) Voir Kuratowski 6, p. 151.
[3]) Cette construction est due à M. Aronszajn.
[4]) Ce théorème est démontré en collaboration avec M-lle Braun.

Corollaire 6. Si la classe $\Phi(\mathbf{K})$ est contenue dans la classe des ensembles boreliens, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ tel que tous les ensembles de $\Phi(\mathbf{K})$ sont de classe α.

Démonstration. $\Phi(\mathbf{K})$ étant contenue dans la classe des ensembles boreliens, l'ensemble $\Gamma(U, \mathbf{K})$ est borelien. Il en résulte, d'après le théorème 3, que $\mathbf{K}$ constitue dans 2^Y un ensemble borelien, donc un ensemble de classe β, pour un certain nombre ordinal $\beta < \Omega$.

Or, le théorème 1 entraîne que tous les ensembles de $\Phi(\mathbf{K})$ sont de classe $1+\beta$.

Notre corollaire se trouve ainsi démontré.

Ce corollaire implique la proposition suivante, démontrée sur une autre voie par M. Sierpiński [1]): il n'existe aucune classe $\mathbf{K}$ telle que $\Phi(\mathbf{K})$ se compose de tous les ensembles boreliens.

Les cribles fermés et les ensembles analytiques.

Nous allons considérer à présent les classes $\mathbf{K}$ telles que $\Phi(\mathbf{K})$ coïncide avec la classe de tous les ensembles analytiques dans X.

Désignons par

$\mathbf{M}$ — la classe de tous les ensembles fermés *indénombrables*, contenus dans Y;

$\mathbf{N}$ — la classe de tous les ensembles fermés, contenus dans I, dans lesquels la relation $<$ *n'établit pas un bon ordre* [2]);

$\mathbf{Q}$ — la classe de tous les ensembles fermés, contenus dans I et *contenant des points irrationnels*.

Enonçons d'abord deux théorèmes connus:

Théorème 7. $\Phi(\mathbf{M})$ *est la classe de tous les ensembles analytiques dans* X.

Ce théorème a été démontré par MM. Mazurkiewicz et Sierpiński dans le cas $X = Y =$ une droite [3]).

[1]) Voir **11**, p. 60.

[2]) En d'autres termes, un ensemble contenu dans I appartient à $\mathbf{N}$, lorsqu'il contient une suite décroissante de points.

[3]) Voir **9**.

Dans le cas général, la démonstration de l'une partie du théorème, d'après laquelle l'ensemble $\Gamma(F, \mathbf{M})$ est analytique, quel que soit l'ensemble fermé F, se trouve dans le Mémoire de M. Kuratowski [1]).

Quant à la généralisation de la seconde, d'après laquelle pour tout ensemble analytique $Z \subset X$ il existe un ensemble fermé $F \subset$ $\subset X \times Y$ tel que $Z = \Gamma(F, \mathbf{M})$ — elle n'exige qu'une modification légère de la démonstration de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński.

Voici l'esquisse de cette démonstration modifiée:

Soit Z un ensemble analytique dans X. L'axe des ordonnées Y étant compact et indénombrable, elle contient un ensemble M, homéomorphe à l'ensemble parfait non-dense de Cantor. M contient donc un ensemble N, homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels et tel que $M - N$ est dénombrable.

Z étant un ensemble analytique, il existe une fonction $f(y)$, définie et continue sur N, telle que $f(N) = Z$.

Soit à présent $x = \varphi(y)$ une fonction définie et continue sur N, telle que $\varphi(N) = N$ et que $\varphi^{-1}(x)$ est indénombrable pour tout $x \in N$. La construction d'une telle fonction est bien connue [2]).

Soit enfin $F(y) = f(\varphi(y))$. Désignons par W l'image de cette fonction, c'est-à-dire $W = \underset{x,y}{\mathrm{E}}[y \in N;\ x = F(y)]$. On démontre facilement que $Z = \Gamma(\overline{W}, \mathbf{M})$, en vertu de la définition de la fonction $F(y)$ et de l'ensemble N.

Théorème 8. $\Phi(\mathbf{N})$ *est la classe de tous les ensembles analytiques dans* X (pour $Y = I$).

Ce théorème est dû aux MM. Lusin et Sierpiński.

M. Lusin a démontré que $\Gamma(E, \mathbf{N})$ pour tout ensemble E analytique, donc, en particulier, pour tout E fermé, est analytique [3]). Par conséquent $\Phi(\mathbf{N})$ est contenue dans la classe des ensembles analytiques. M. Lusin démontre ce théorème pour le cas $X = Y =$ une droite. La démonstration du cas général se trouve dans le Mémoire de M. Kuratowski [4]).

La démonstration de la seconde partie du théorème est dû à M. Sierpiński, qui a construit pour tout ensemble analytique

[1]) Voir **4**, p. 261.

[2]) Voir p. ex. Mazurkiewicz et Sierpiński **9**, p. 162.

[3]) Voir **8**, p. 180. Cf. aussi Sierpiński **13**.

[4]) Voir **4**, p. 257.

linéaire Z un ensemble fermé plan F, contenu entre les droites $y=0$ et $y=1$, et tel que $Z=\Gamma(E, \mathbf{N})$ [1] La généralisation de cette construction pour le cas, quand l'axe des abscisses est un espace métrique quelconque, ne présente aucune difficulté: il suffit de remplacer le système déterminant d'intervalles $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ par un système déterminant d'ensembles fermés. D'ailleurs la construction, de même que la démonstration, ne change pas.

Nous allons démontrer à présent le

Théorème 9. $\Phi(\mathbf{Q})$ *est la classe de tous les ensembles analytiques dans* X (pour $Y=I$).

Démonstration. 1. Soit $E \epsilon \Phi(\mathbf{Q})$. Il existe donc un ensemble F fermé, contenu dans $X \times I$ tel que $E=\Gamma(F, \mathbf{Q})$.

Désignons par N l'ensemble de tous les nombres irrationnels contenus dans I et posons: $T=X \times N$.

Il résulte de la définition de $\mathbf{Q}$ que $\Gamma(F, \mathbf{Q})$ coïncide avec la projection de l'ensemble FT sur l'axe des abscisses.

Supposons, en effet: $\xi \epsilon \Gamma(F, \mathbf{Q})$. L'ensemble $\Delta(F, \xi)$ contient donc un point η irrationnel. Le point (ξ, η) appartient ainsi à FT et par conséquent ξ appartient à la projection de FT sur l'axe des abscisses.

Soit à présent ξ un point de la projection de FT sur l'axe des abscisses. Il existe donc un nombre irrationnel $\eta \epsilon N$ tel que $(\xi, \eta) \epsilon FT$. Par conséquent l'ensemble $\Delta(F, \xi)$ contient un point irrationnel, donc appartient à $\mathbf{Q}$. En d'autres mots $\xi \epsilon \Gamma(F, \mathbf{Q})$.

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble $E=\Gamma(F, \mathbf{Q})$ est la projection de l'ensemble FT, qui est un G_δ. E est donc un ensemble analytique.

2. Soit E un ensemble analytique $\subset X$. Il existe donc une fonction $x=f(y)$ définie et continue sur N, tel que $E=f(N)$.

Soit W l'image de cette fonction, c'est-à-dire $\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y \epsilon N; x=f(y)]$.

[1] Voir **12**, p. 76. Il est à remarquer que le théorème suivant, plus fort que le théorème de M. Sierpiński, subsiste:

Pour tout ensemble analytique linéaire, borné E, il existe une fonction $f(x)$ continue sur I et tel que $E=\underset{y}{\mathrm{E}}[f^{-1}(y) \epsilon \mathbf{N}]$.

La note de M. Szpilrajn, contenant la démonstration de ce théorème, est en préparation.

Posons $F=\overline{W}$. Nous allons voir que $E=\Gamma(F, \mathbf{Q})$.

Supposons, en effet, $\xi \epsilon E$. Il existe donc un nombre irrationnel $\eta \epsilon N$ tel que $\xi=f(\eta)$. Donc $(\xi, \eta) \epsilon W \subset F$, d'où $\eta \epsilon \Delta(F, \xi)$. η étant irrationnel, $\Delta(F, \xi) \epsilon \mathbf{Q}$, donc $\xi \epsilon \Gamma(F, \mathbf{Q})$.

Soit ensuite $\xi \epsilon \Gamma(F, \mathbf{Q})$. Il existe donc un nombre η irrationnel tel que $\eta \epsilon \Delta(F, \xi)$, c'est-à-dire $(\xi, \eta) \epsilon F$. Mais $f(y)$ étant continue sur N, l'ensemble W est fermé dans $T=X \times N$, d'où $\overline{W}T=W$; par conséquent comme $(\xi, \eta) \epsilon FT=\overline{W}T$, alors $(\xi, \eta) \epsilon W$. En d'autres mots $\xi=f(\eta)$, d'où il vient $\xi \epsilon E$.

Le théorème 9 se trouve ainsi démontré.

Les théorèmes 7—9 impliquent, en vertu du théorème 5, le suivant

Théorème 10. *Les ensembles* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *et* $\mathbf{Q}$ *sont analytiques et non-boreliens.*

Car, si l'on pose $X=I$, l'espace X contient un ensemble analytique non-borelien.

L'application des cribles — comme nous l'avons remarqué dans l'introduction — n'est essentielle que lorsqu'on démontre que les ensembles $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$ sont non-boreliens.

Quant à la démonstration que ces ensembles sont analytiques, la méthode symbolique de MM. Kuratowski et Tarski permet d'obtenir ces résultats d'une façon directe. On a notamment:

$$F \epsilon \mathbf{M} \equiv \sum_D (D \text{ est parfait})\,(D \subset F)$$

$$F \epsilon \mathbf{N} \equiv \sum_y \prod_n \sum_x (x \epsilon F)\left(0 < x-y < \frac{1}{n}\right)$$

$$F \epsilon \mathbf{Q} \equiv \sum_x (x \text{ est irrationnel})\,(x \epsilon F).$$

Les ensembles parfaits formant un ensemble G_δ dans l'espace des ensembles fermés [1]), $\mathbf{M}$, comme projection [2]) d'un G_δ, est analytique. $\mathbf{N}$ est projection d'un $F_{\sigma\delta}$ et $\mathbf{Q}$ d'un G_δ; ce sont donc aussi des ensembles analytiques.

[1]) Théorème de M. Banach, voir Kuratowski **4**, p. 260.

[2]) Voir Kuratowski et Tarski **7**, p. 243.

Liste des travaux cités.

1. Banach, St.: *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 283—295.
2. Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, Berlin—Leipzig 1927.
3. Hurewicz, W.: *Zur Theorie der analytischen Mengen*, Fund. Math. XV (1930), pp. 4—17.
4. Kuratowski, C.: *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*. Fund. Math. XVII, (1931), pp. 249—272.
5. — *Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 275—282.
6. — *Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés*, Fund. Math. XVIII (1932), pp. 148—159.
7. — et Tarski, A.: *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 240—248.
8. Lusin, N.: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930.
9. Mazurkiewicz, St. et Sierpiński, W.: *Sur un problème concernant les fonctions continues*, Fund. Math. VI (1924), pp. 161—169.
10. Sierpiński, W.: *Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points*, Mathematica (Cluj) V (1931), pp. 49—58.
11. — *Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans*, Comptes-Rendus des séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie XXIV (1931), cl. III, pp. 57—77.
12. — *Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 77—91.
13. — *Sur les cribles projectifs*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 30—31.
14. — *Sur un ensemble fermé conduisant à un ensemble non mesurable (B)* Fund. Math. VII (1925), pp. 198—202.
15. — *Sur les images des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. II (1921), pp. 74—80.

Sur l'hyperespace d'un continu.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

E étant un espace métrique et compact, désignons par 2^E l'hyperespace de E c. à d. l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés non vides de E, métrisé par la distance de M. Hausdorff[1]) Nous désignerons les distances dans E, 2^E, 2^{2^E} par ϱ, ϱ_1, ϱ_2 respectivement, les diamètres par δ, δ_1, δ_2.

Je vais supposer dans la suite que E est un continu.

2^E est alors un continu[2]) „arcwise connected" [3]). Ce continu est péanien, si E est péanien[4]) et vice versa[5]).

Soit (r, φ) un système de coordonnées polaires, p_0 le point $r=0$, P un ensemble parfait, punctiforme, situé sur la circonférence $r=1$. J'appelle *étoile de Cantor*, l'ensemble-somme de segments réctilignes $\overline{p_0 p}$, où $p \in P$.

p_0 est le *centre*, les points $p \in P$ — les *extrémités*, les segments $\overline{p_0 p}$ les *rayons* de l'etoile. Deux étoiles de Cantor sont homéomorphes.

Théorème. *L'hyperespace 2^E d'un continu E est l'image continue d'une étoile de Cantor.*

Lemme 1. Soit: $X_1 \in 2^E$, $X_2 \in 2^E$, $Y_1 \in 2^E$, $Y_2 \in 2^E$; $\varrho_1(X_1, Y_1) \leqq \lambda \geqq \varrho_1(X_2, Y_2)$; $X_1 \subset X_2$ $Y_1 \subset Y_2$. Alors: $\varrho_1(X_1, Y_2) \leqq \lambda \geqq \varrho_1(X_2, Y_1)$.

[1]) Hausdorff: Mengenlehre 1927, § 28. Le symbole 2^E a été introduit par M. Kuratowski, Fund. Math XIII, p. 259 ss..

[2]) Vietoris: Monatsh. f. Math. u. Phys. XXIII, p. 56, Satz (8″).

[3]) Borsuk-Mazurkiewicz: C. R. de la Soc. Scient. de Varsovie. Séance de 21 Mars, 1931.

[4]) Vietoris: l. c., p. 56, Satz (9′).

[5]) Ważewski: Fund. Math. p. 214—235 en part p. 232, théorème XXIV.