Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

D'après M. Baire une fonction $f(x)$ à valeurs réelles est dite semi-continue supérieurement au point x_0, lorsque la condition $\lim x_n = x_0$ entraîne $\lim\sup f(x_n) \leqslant f(x_0)$; elle est dite semi-continue inférieurement, lorsque la même condition entraîne $\lim\inf f(x_n) \geqslant \geqslant f(x_0)$.

La notion de semi-continuité dont nous allons nous servir ici est tout-à-fait analogue à celle-ci, mais concerne le cas où la fonction $F(x)$ admet comme valeurs des sous-ensembles fermés (non-vides) d'un espace métrique et compact $\mathscr{Y}$. Nous dirons, notamment, que la fonction $F(x)$ est *semi-continue supérieurement* (resp. *inférieurement*), lorsque la condition $\lim x_n = x_0$ entraîne $\mathrm{Ls}\, F(x_n) \subset \subset F(x_0)$ (resp. $\mathrm{Li}\, F(x_n) \supset F(x_0)$), le symbole „$\mathrm{Ls}\, A_n$" désignant la limite topologique supérieure (au sens de M. Painlevé) de la suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$ [2]) et le symbole „$\mathrm{Li}\, A_n$" sa limite topologique inférieure [3]).

L'emploi du terme „semi-continuité" est justifié, entre autres, par le fait suivant que l'on démontre d'une façon tout-à-fait élémentaire: $f(x)$ étant une fonction dont les valeurs appartiennent

[1]) note présentée à la Soc. Pol. de Math. à la séance du 10. IV. 1931 à Varsovie.

[2]) c.-à-d. l'ensemble des points de la forme $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n}$, où $p_{k_n} \in A_{k_n}$ et $k_1 < k_2 < \ldots$

[3]) c.-à-d. l'ensemble des points de la forme $\lim p_n$, où $p_n \in A_n$. Pour un cas particulier des fonctions semi-continues, voir W. A. Wilson, Amer. Journ. of Math. 48. (1926), p. 165.

à un intervalle ab, la semi-continuité (supérieure resp. inférieure) de la fonction $f(x)$ équivaut à la semi-continuité de la fonction $F(x) = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[a \leqslant y \leqslant f(x)]$ [1]).

Ce terme s'impose aussi, lorsqu'on considère la famille des sous-ensembles fermés non-vides de l'espace $\mathscr{Y}$ (famille que nous désignerons par le symbole $2^{\mathscr{Y}}$) comme formant, elle-même, un espace métrique et compact [2]). Une suite d'éléments de cet espace $A_1, A_2, \ldots$ converge alors vers A, lorsque la distance de A_n à A tend vers 0; or, comme on prouve, cette dernière condition équivaut à l'égalité $\mathrm{Li}\, A_n = \mathrm{Ls}\, A_n$. Par conséquent, la fonction $F(x)$ est continue, lorsqu'elle est semi-continue supérieurement et inférieurement à la fois.

On verra dans la suite que parmi les fonctions fondamentales que l'on rencontre en Topologie il y en a qui sont semi-continues sans être continues; telle est par ex. la fonction de deux variables $F(X, Y) = X \cdot Y$ (produit de deux ensembles) [3]). Tel est encore le cas suivant: soit $x = f(y)$ une fonction continue qui transforme l'espace compact $\mathscr{Y}$ en l'espace $\mathscr{X}$; la fonction „inverse" $F(x) = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y = f(x)]$ est semi-continue supérieurement.

Parmi les propriétés bien connues des fonctions semi-continues (à valeurs réelles) et dont jouissent aussi les fonctions semi-continues au sens considéré ici, citons les suivantes: toute fonction semi-continue est mesurable B de classe 1 (c. à d. que, quel que soit l'ensemble ouvert G, l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[F(x) \in G]$ est un F_σ); $F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ étant une suite décroissante de fonctions semi-continues supérieurement (c. à d. que $F_1(x) \supset F_2(x) \supset \ldots$), la fonction $\mathrm{Lim}\, F_n(x)$ est également semi-continue supérieurement.

[1]) = ensemble des y tels que $a \leqslant y \leqslant f(x)$.

[2]) Nous adoptons la définition de distance entre ensembles (voir N 1) de M. Hausdorff (*Mengenlehre*, § 28; cf. aussi ma note de Fund. Math. 17, p. 259). L'hypothèse que l'espace $\mathscr{Y}$ est compact, hypothèse que nous faisons constamment dans cette note, est ici essentielle. Si l'on ne fait pas cette hypothèse et si l'on suppose seulement que $\mathscr{Y}$ est métrique séparable, l'espace $2^{\mathscr{Y}}$ n'est qu'un espace $(\mathcal{L})$, au sens de M. Fréchet, la limite $\mathrm{Lim}\, A_n$ étant définie par la condition $\mathrm{Ls}\, A_n = \mathrm{Li}\, A_n$. Cet espace peut ne pas être métrisable (d'une manière conforme à cette notion de limite); toutefois, il est une image biunivoque et continue d'un espace métrique séparable.

[3]) tandis que la somme, $X + Y$, est une fonction continue.

Les théorèmes établis dans cette note permettrons de reconnaître la „classe borélienne" de diverses familles d'ensembles (par rapport à l'espace $2^{\mathcal{X}}$). En particulier, nous allons prouver que la famille des arcs simples situés dans un espace compact $\mathcal{X}$, ainsi que celle des courbes simples fermées (ou encore: celle des dendrites) est toujours de classe $F_{\sigma\delta}$ dans l'espace $2^{\mathcal{X}}$.

Dans la note suivante, de M. Szpilrajn et de moi, on trouvera des applications de la notion de semi-continuité aux problèmes du „crible".

1. Notations.

A étant un sous-ensemble fermé d'un espace compact, posons $\varrho(x, A) = \min_{y \in A} |x - y|$, le symbole $|x - y|$ désignant la distance des points x et y. Par définition de (M. Hausdorff):

dist. $(A, B) =$ *le plus grand des nombres* $\max_{x \in B} \varrho(x, A)$ et $\max_{y \in A} \varrho(y, B)$

η étant un nombre positif, soit $R_\eta(A)$ l'ensemble des points dont la distance de A ne dépasse pas η; en symboles:

$$R_\eta(A) = \mathop{\mathrm{E}}_x [\varrho(x, A) \leqslant \eta].$$

Soit, d'une façon analogue: $S_\eta(A) = \mathop{\mathrm{E}}_x [\varrho(x, A) < \eta]$.

On a évidemment:

(1) $$R_\eta(A) = \prod_{n=1}^{\infty} [S_{\eta + \frac{1}{n}}(A)]$$

(2) $$\{dist.\ (A, B) \leqslant \eta\} \equiv \{A \subset R_\eta(B) \quad \text{et} \quad B \subset R_\eta(A)\}$$

(3) $$\{dist.\ (A, B) < \eta\} \equiv \{A \subset S_\eta(B) \quad \text{et} \quad B \subset S_\eta(A)\}$$

En employant l'opérateur logique „$\sum_x$" pour désigner: „il existe un x tel que", on a

$$\{\varrho(x, A) \leqslant \eta\} \equiv \sum_y (y \in A)\ (|x - y| \leqslant \eta)$$

et, par conséquent:

(4) $$R_\eta(A) = \mathop{\mathrm{E}}_x \sum_y \{(y \in A)\ (|x - y| \leqslant \eta)\}$$
$$S_\eta(A) = \mathop{\mathrm{E}}_x \sum_y \{(y \in A)\ (|x - y| < \eta)\}.$$

2. Conditions suffisantes et nécessaires.

Pour que la fonction $F(x)$ soit semi-continue supérieurement, il faut et il suffit que l'ensemble $J = \mathop{\mathrm{E}}_{xy} [y \in F(x)]$ soit fermé [1]).

En effet, la condition pour que la fonction F ne soit pas semi-continue supérieurement au point x est que l'on ait $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, $y_n \in F(x_n)$ et y non-$\in F(x)$; mais cela veut dire que le point (x, y) appartient à $\overline{J} - J$, donc que l'ensemble J n'est pas fermé.

Pour que la fonction $F(x)$ soit semi-continue inférieurement, il faut et il suffit que l'ensemble $J_\eta = \mathop{\mathrm{E}}_{xy}[y \in S_\eta(F(x))]$ soit ouvert, quel que soit $\eta > 0$.

Nécessité. Soit $(x, y) \in J_\eta$, $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$. Il s'agit de prouver que, pour n suffisamment grand, on a $(x_n, y_n) \in J_\eta$, donc que $y_n \in S_\eta(F(x_n))$. Or, par définition de S_η, il existe un z tel que $z \in F(x)$ et $|y - z| < \eta$; la fonction F étant supposée semi-continue inférieurement, il existe une suite z_n telle que $z_n \in F(x_n)$ et que $z = \lim z_n$. La dernière égalité entraîne, pour n suffisamment grand: $|z_n - y_n| < \eta$, d'où on conclut que $y_n \in S_\eta(F(x_n))$.

Suffisance. Supposons que la fonction F ne soit pas semi-continue inférieurement au point x. On a par conséquent: $y \in F(x)$, $x = \lim x_n$, y non-$\in$ Li $F(x_n)$. Il existe donc une suite d'indices $k_1, k_2, \ldots$ telle que $\varrho[y, F(x_{k_n})] > \eta > 0$, donc que y non-$\in S_\eta[F(x_{k_n})]$, d'où (x_{k_n}, y) non-$\in J_\eta$. Comme, d'autre part, les points (x_{k_n}, y) convergent vers le point (x, y), qui appartient à J_η, on en conclut que l'ensemble J_η n'est pas ouvert.

3. Semi-continuité et fonctions de I-re classe.

Lemme. Si les valeurs de la fonction $f(x)$ appartiennent à un espace compact et si, pour chaque sphère fermée R, l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x [f(x) \in R]$ est un G_δ, la fonction $f(x)$ est de I-re classe.

En effet, M étant un ensemble fermé arbitraire, il existe, en vertu du théorème de Borel, un ensemble L_n composé d'un nombre

[1]) dans le „produit combinatoire" des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, c.-à-d, dans l'ensemble des couples $z = (x, y)$, métrisé par la formule:

$$|z - z_1| = \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2}.$$

fini de sphères de rayon $<1/n$. Par conséquent, $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x)\in L_n]$ est un G_δ et $M=\prod_n L_n$. L'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x)\in M]$, comme égal à $\prod_n \mathop{\mathrm{E}}_x[f(x)\in L_n]$, est donc un G_δ.

Théorème. *Les fonctions semi-continues appartiennent à la I-re classe.*

Démonstration.

A étant un ensemble fermé arbitraire extrait de l'espace $\mathcal{Y}$, soit, dans l'espace $2^{\mathcal{Y}}$, $\mathfrak{K}$ une sphère fermée de centre A et de rayon η. En symboles:

(5) $\quad X\in\mathfrak{K}\equiv\{dist.\,(A,X)\leqslant\eta\}\equiv\{A\subset R_\eta(X) \quad \text{et} \quad X\subset R_\eta(A)\}$

selon (2).

Il s'agit de prouver que l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[F(x)\in\mathfrak{K}]$ est un G_δ. Nous allons nous servir à ce but de la méthode d'évaluation des classes boréliennes exposée dans le vol. 17 de ce Journal.

1. $F(x)$ est semi-continue supérieurement.

En employant l'opérateur logique „$\prod_x$" pour désigner „quel que soit x, on a..." et le symbole „$\rightarrow$" pour désigner l'implication logique, on peut remplacer l'inclusion „$X\subset Y$" par: „$\prod_x[(x\in X)\rightarrow(x\in Y)]$", ce qui équivaut à „$\prod_x[(x \text{ non-}\in X)+(x\in Y)]$", le symbole „$+$" désignant la somme logique. En tenant compte des formules (4) et (5), où l'on remplace X par $F(x)$, il vient:

$$F(x)\in\mathfrak{K}\equiv\{\prod_y[(y \text{ non-}\in A)+$$
$$+\sum_z(z\in F(x))\,(|z-y|\leqslant\eta)]\cdot\prod_y[y \text{ non-}\in F(x))+(y\in R_\eta(A))]\}.$$

L'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_{zx}(z\in F(x))$ étant fermé (selon N 2), l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_{xyz}[(z\in F(x))\,(|z-y|\leqslant\eta)]$ l'est également. Il en est encore de même de sa „projection" $\mathop{\mathrm{E}}_{xy}\sum_z(z\in F(x))\,(|z-y|\leqslant\eta)$ (voir Fund. Math. 17, p. 253 (6)). De là on conclut aussitôt (ib. p. 254 (8)) que l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[F(x)\in\mathfrak{K}]$ est un G_δ.

2. $F(x)$ est semi-continue inférieurement.

Il vient, selon (1) et (3):

$$F(x)\in\mathfrak{K}\equiv\{A\subset\prod_n S_{\eta+\frac{1}{n}}[F(x)] \quad et \quad F(x)\subset R_\eta(A)\}$$

Donc:

$$F(x)\in\mathfrak{K}\equiv\{\prod_y[(y \text{ non-}\in A)+\prod_n(y\in S_{\eta+\frac{1}{n}}F(x))]\cdot[F(x)\subset R_\eta(A)]\}.$$

L'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_{xy}[y\in S_{\eta+\frac{1}{n}}(F(x))]$ étant ouvert selon N 2, on en conclut, en raisonnant comme auparavant, que l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x\prod_y[(y \text{ non-}\in A)+ +\prod_n(y\in S_{\eta+\frac{1}{n}}F(x))]$ est un G_δ. Pour prouver que l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[F(x)\in\mathfrak{K}]$ est un G_σ, il suffit de montrer que l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[F(x)\subset R_\eta(A)]$ est fermé. Or, ceci est une conséquence du fait que $F(x)$ étant une fonction semi-continue inférieurement et R un ensemble fermé arbitraire, l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[F(x)\subset R]$ est fermé (en effet, la condition $F(x_n)\subset R$ entraîne $\mathrm{Li}\,F(x_n)\subset R$ et la condition $x=\lim x_n$ entraîne $F(x)\subset\mathrm{Li}\,F(x_n)$, d'où $F(x)\subset R$, ce qui prouve que l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_x[F(x)\subset R]$ est fermé).

Corollaire. *Les points de discontinuité d'une fonction semi-continue constituent un ensemble F_σ de I-re catégorie. Donc, si l'espace des x est complet, l'ensemble des points de continuité est dense dans lui.*

Car ces propriétés appartiennent à chaque fonction de I-re classe [1]).

4. Opérations sur les fonctions semi-continues.

Nous allons nous servir des formules suivantes dont la démonstration ne présente aucune difficulté:

(6) $\quad \overline{\mathrm{Ls}\,A_n}=\mathrm{Ls}\,A_n=\mathrm{Ls}\,\overline{A}_n, \quad \overline{\mathrm{Li}\,A_n}=\mathrm{Li}\,A_n=\mathrm{Li}\,\overline{A}_n$

[1]) d'après un théorème qui provient de Baire. Dans le cas général, où les valeurs de la fonction $f(x)$ parcourent un espace séparable et les arguments varient dans un espace métrique arbitraire, ce théorème peut être démontré de la façon suivante.

L'ensemble des points de discontinuité D est égal à $\sum\{f^{-}(G)-I[f^{-1}(G)]\}$, $I(X)$ désignant l'ensemble des points intérieurs de X et la somme étant étendue à tous les ensembles ouverts; or, en vertu de la séparabilité on peut restreindre cette somme à une infinité dénombrable de termes (notamment aux „sphères rationnelles"). L'ensemble D est donc somme d'une série dénombrable de termes de la forme $X-I(X)$ donc d'ensembles frontières; ces ensembles sont, en outre, F_σ (puisque la fonction f est supposée de I-re classe); ce sont donc des ensembles de I-re catégorie. Il en résulte que D, comme somme dénombrable d'ensembles de I-re catégorie, l'est également.

(7) $$\mathrm{Ls}\,(A_n + B_n) = \mathrm{Ls}\,A_n + \mathrm{Ls}\,B_n$$

(8) $\mathrm{Ls}(A_n B_n) \subset \mathrm{Ls}\,A_n \cdot \mathrm{Ls}\,B_n$, plus généralement: $\mathrm{Ls}\prod_t A_n^t \subset \prod_t \mathrm{Ls}\,A_n^t$

(9) $\mathrm{Li}\,A_n + \mathrm{Li}\,B_n \subset \mathrm{Li}(A_n + B_n)$, plus généralement: $\sum_t \mathrm{Li}\,A_n^t \subset \mathrm{Li}\sum_t A_n^t$

(10) $$\mathrm{Li}\,A_n - \mathrm{Ls}\,B_n \subset \mathrm{Li}(A_n - B_n).$$

Théorèmes sur l'addition. 1) *Si $F(x)$ et $G(x)$ sont semi-continues supérieurement au point x, la somme $F(x) + G(x)$ l'est également.*

Soit, en effet, $x = \lim x_n$. On a: $\mathrm{Ls}\,F(x_n) \subset F(x)$ et $\mathrm{Ls}\,G(x_n) \subset$ $\subset G(x)$. Par conséquent (form. 7): $\mathrm{Ls}\,[F(x_n) + G(x_n)] \subset F(x) + G(x)$, c. q. f. d.

2) *Si chacune des fonctions $F_t(x)$ est semi-continue inférieurement au point x, la fonction $\overline{\sum_t F_t(x)}$ l'est également.*

Soit, comme auparavant, $x = \lim x_n$. On a, pour chaque t: $F_t(x) \subset \mathrm{Li}\,F_t(x_n)$. D'où, en tenant compte de (9): $\sum_t F_t(x) \subset \sum_t \mathrm{Li}\,F_t(x_n) \subset$ $\subset \mathrm{Li}\sum_t F_t(x_n)$, donc (6): $\overline{\sum_t F_t(x)} \subset \overline{\mathrm{Li}\sum_t F_t(x_n)} = \mathrm{Li}\,\overline{\sum_t F_t(x_n)}$.

D'une façon analogue, la formule (8) implique le

Théorème sur la multiplication. Le produit (non-vide) de fonctions semi-continues supérieurement au point x l'est également.

Enfin la formule (10) entraîne le

Théorème sur la soustraction. Si $F(x)$ est semi-continue inférieurement et $G(x)$ l'est supérieurement (au point x), la fonction $\overline{F(x) - G(x)}$ (supposée non-vide) est semi-continue inférieurement.

Les deux premiers théorèmes entraînent le

Corollaire. La limite d'une suite décroissante (croissante) de fonctions semi-continues supérieurement (inférieurement) est semi-continue supérieurement (inférieurement).

Car, en supposant $F_1(x) \supset F_2(x) \supset \ldots$, on a $\mathrm{Lim}\,F_n(x) = \prod_n F_n(x)$, et en supposant $F_1(x) \subset F_2(x) \subset \ldots$, on a $\mathrm{Lim}\,F_n(x) = \overline{\sum_n F_n(x)}$.

Applications.

5. *Inversion des fonctions continues. Décompositions semi-continues.*

Soit $x = f(y)$ une fonction continue, définie sur l'espace compact $\mathcal{Y}$.

Posons $F(x) = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[x = f(y)]$. La fonction $F(x)$ est *semi-continue supérieurement.* On a, en effet, l'équivalence:

(11) $\{y \in F(x)\} \equiv \{x = f(y)\}$, d'où $\underset{xy}{\mathrm{E}}\,[y \in F(x)] = \underset{xy}{\mathrm{E}}\,[x = f(y)]$

et ce dernier ensemble étant fermé (en vertu de la continuité de la fonction f), on en conclut, en tenant compte du théor. du N 2, que la fonction F est semi-continue supérieurement.

Inversement, soit $F(x)$ une fonction semi-continue à valeurs disjointes, c. à d. que l'inégalité $x \neq x'$ entraîne la formule $F(x) \cdot F(x') = 0$; la fonction f définie par la formule (11) est *continue.* En effet, d'après le théorème précité, l'ensemble $\underset{xy}{\mathrm{E}}\,[y \in F(x)]$ est fermé. Il en est donc de même de l'ensemble $\underset{xy}{\mathrm{E}}\,[x = f(y)]$. On en conclut (l'espace $\mathcal{Y}$ étant compact) que la fonction f est continue.

L'inversion des fonctions continues conduit à la notion de „*décomposition semi-continue* (*supérieurement*) *d'un espace en tranches*" [1]). On appelle ainsi toute décomposition en sous-ensembles disjoints („tranches") telle qu'à chaque suite convergente de tranches correspond une tranche qui contient la limite de cette suite. On prouve [2]) qu'une décomposition semi continue n'est rien d'autre qu'une décomposition en ensembles $F(x) = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[x = f(y)]$, où f est une fonction continue convenablement choisie. D'après ce qui précède toute décomposition semi continue est de la forme $\mathcal{Y} = \sum_x F(x)$, F étant une fonction semi-continue supérieurement à valeurs disjointes.

Le corollaire du N 3 conduit à la conclusion suivante: en appelant tranche de continuité toute tranche T telle que pour chaque suite convergente de tranches la condition $T \cdot \mathrm{Lim}\,T_n \neq 0$ entraîne $T = \lim T_n$, les tranches de continuité constituent (dans l'espace des tranches) un ensemble G_δ dense [3]).

6. *Opérations sur des ensembles fermés (non-vides) situés dans un espace compact $\mathcal{Y}$*

Le produit de deux ensembles: $Z = X \cdot Y$ est une fonction semi-continue supérieurement.

[1]) La notion provient de M. R. L. Moore (Proc. Nat. Ac. Sc. v. 10, 1924). Voir ma note de Fund. Math. XI.

[2]) P. Alexandroff, Math. Ann. 96, pp. 555—571.

[3]) J'ai démontré ce théorème d'une autre façon dans la note citée de Fund. Math. XI (p. 176). Cf. aussi L. S. Hill, Amer. Journ. of Math. 1927.

Posons, en effet, $G(X, Y) = X$ et $H(X, Y) = Y$. Chacune de ces deux fonctions étant évidemment continue, on conclut du théorème sur la multiplication (N4) que leur produit $G(X, Y)\cdot H(X, Y) = X\cdot Y$ est semi-continue supérieurement.

Il est à remarquer que la fonction $X\cdot Y$ (dont les arguments et les valeurs appartiennent à l'espace $2^{\mathcal{Y}}$) n'est définie que sur l'ensemble $\mathfrak{A}$ des couples (X, Y) tels que $X\cdot Y \neq 0$ (l'ensemble $\mathfrak{A}$ est fermé dans le „carré combinatoire" $\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}$). Le produit $X\cdot Y$ n'est pas une fonction continue, même relativement aux variables séparément; soit, notamment, $\mathcal{Y}$ l'intervalle 01, Y l'ensemble composé des deux extrémités, X_n l'intervalle $1/n, 1$; il vient $\mathrm{Lim}\,(X_n\cdot Y) \neq (\mathrm{Lim}\,X_n)\cdot Y$. Par contre, *la somme* $X+Y$ *est toujours une fonction continue,* comme on déduit directement des deux théorèmes sur l'addition.

D'une façon analogue, le théorème sur la soustraction implique que *la fonction* $\overline{X-Y}$ *est semi-continue inférieurement* (mais, en général, discontinue, comme il résulte de l'exemple suivant: $\mathcal{Y} = X =$ l'intervalle 01, $Y_n =$ l'intervalle $[1/n, 1/2]$, $n = 3, 4, \ldots$).

De là nous concluons que *la frontière d'un ensemble,* $Fr(X) = X\cdot\overline{\mathcal{Y}-X}$ *est une fonction de deuxième classe,* comme superposition de deux fonctions de première classe: $Fr(X) = G[X, H(X)]$ où $G(X, Y) = X\cdot Y$ et $H(X) = \overline{\mathcal{Y}-X}$.

L'ensemble $\mathfrak{B} = \underset{X}{\mathrm{E}}(X\cdot\overline{\mathcal{Y}-X} \neq 0)$, c. à d. l'ensemble des X pour lesquels la fonction $Fr(X)$ est définie, est un G_δ (dans l'espace $2^{\mathcal{Y}}$). En effet, $\mathfrak{A}$ désignant l'ensemble des couples (X, Y) tels que $X\cdot Y \neq 0$ et $C(X)$ désignant le couple $(X, \overline{\mathcal{Y}-X})$, il vient $\mathfrak{B} = \underset{X}{\mathrm{E}}\{C(X)\in\mathfrak{A}\}$. Or, l'ensemble $\mathfrak{K}$ étant fermé et la fonction $C(X)$ étant de I-re classe, il en résulte que l'ensemble $\mathfrak{B}$ est un G_δ.

Il importe de remarquer que la frontière n'est pas une fonction de I-re classe. Soit, notamment, $\mathcal{Y} =$ l'ensemble parfait non-dense de Cantor, $\mathfrak{M}$ la famille des ensembles X tels que $Fr(X) \neq 0$ et que X contient deux points au moins. Evidemment $\mathfrak{M}$ est un G_δ. Il suffit donc de prouver qu'en chaque „point" X, la fonction $Fr(X)$ est discontinue lorsqu'on restreint le domaine de la variation de son argument à $\mathfrak{M}$.

Or, $\mathcal{Y}$ étant 0-dimensionnel, l'ensemble X est le produit d'une suite d'ensembles X_n, fermés et ouverts simultanément, donc tels que $Fr(X_n) = 0$. Soit: $p\in Fr(X)$, $q\in X$, $p\neq q$, $q = \lim q_n$, où q_n appartient à X_n et n'est pas une extrémité d'un intervalle contigu. Posons $X_n^* = X_n -$ l'intérieur de l'intervalle $q_n q +$ le point q_n. On a donc $q_n\in Fr(X_n^*) \subset$ (le couple q_n, q), $X_n^*\in\mathfrak{M}$, $\mathrm{Lim}\,X_n^* = X$ et $\mathrm{Lim}\,Fr(X_n^*) \neq Fr(X)$, puisque $\mathrm{Lim}\,Fr(X_n^*) = q$.

Remarquons enfin que *le dérivé d'un ensemble est une fonction de deuxième classe* (définie pour chaque ensemble infini) [1].

Posons, en effet, $F_k(X) =$ l'ensemble des points x tels que 1° $x\in X$, 2° $\varrho(x, X-x) < 1/k$. On a évidemment (en désignant par X^d le dérivé de X): $X^d = \prod_{k=1}^{\infty} F_k(X)$, donc $X^d = \mathrm{Lim}\,F_k(X)$.

Pour prouver que X^d est une fonction de deuxième classe, il suffit donc de démontrer que $F_k(X)$ est semi-continue inférieurement.

Posons à ce but (pour k fixe): $x\in F_k(X)$, $X = \mathrm{Lim}\,X_n$. La dernière égalité entraîne l'existence d'une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\lim x_n = x$ et $x_n\in X_n$. Reste à prouver que $x_n\in F_k(X_n)$, pour n suffisamment grand. Or, l'hypothèse que $x\in F_k(X)$ entraîne l'existence d'un point $x^*\neq x$ tel que $x^*\in X$ et $|x^*-x| < 1/k$. En vertu de l'égalité $X = \mathrm{Lim}\,X_n$, on a: $x^* = \lim x_n^*$ où $x_n^*\in X_n$. Par conséquent, pour n suffisamment grand on a $x_n^*\neq x_n$ et $|x_n^* - x_n| < 1/k$; d'où $\varrho(x_n, X_n - x_n) < 1/k$, donc $x_n\in F_k(X_n)$, c. q. f. d.

Pour se convaincre que la fonction X^d n'est pas de première classe on tient compte du fait, facile à établir, que cette fonction est discontinue pour chaque valeur de l'argument (c'est à dire pour chaque ensemble fermé infini).

7. *Continus unicohérents. Dendrites.*

On appelle continu unicohérent tout continu C tel que, pour chaque couple de continus K et L, la condition $C = K + L$ implique que KL est un continu. En symboles:

$$\{C \text{ est unicohérent}\} \equiv \prod_{K,L}\{(C = K+L)\rightarrow(KL\in\mathfrak{L})\},$$

$\mathfrak{L}$ désignant la famille des continus; K et L parcourent $\mathfrak{L}$.

Je dis que $\mathcal{X}$ étant un espace compact, *la famille des continus unicohérents est un* G_δ (relativement à l'espace $2^{\mathcal{X}}$).

En effet, la somme étant une fonction continue, l'ensemble $\underset{C,K,L}{\mathrm{E}}(C = K+L)$ est fermé. L'ensemble $\mathfrak{L}$ étant fermé et le pro-

[1]) Cet énoncé a été démontré par M. Banach.

duit étant une fonction de I-re classe, l'ensemble $\underset{K,L}{\mathrm{E}}(KL \in \mathfrak{L})$ est G_δ relativement à l'ensemble $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{A}$ désignant, comme auparavant, l'ensemble $\underset{X,Y}{\mathrm{E}}(XY \neq 0)$), est donc un G_δ relativement à l'espace $2^{\mathfrak{X}}$ (puisque $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{L}$ est fermé). On en conclut aussitôt que l'ensemble $\underset{C,K,L}{\mathrm{E}}\{(C \neq K+L)+(KL \in \mathfrak{L})\}$ est un G_δ et, en tenant compte du fait que l'espace $\mathfrak{L}$ est compact, on tire de la formule déjà citée de Fund. Math. 17, p. 254 (8) la conclusion demandée.

Il résulte de là que *la famille des continus dont chaque sous-continu est unicohérent est aussi* G_δ. En effet, il s'agit ici des continus C tels que $\underset{Q}{\Pi}\{(Q \subset C)\,(Q \in \mathfrak{L}) \rightarrow (Q \text{ est unicohérent})\}$; donc d'après le théorème général de Fund. Math. 17, p. 264 (III), la famille considérée est un G_δ.

Cette dernière conclusion permet d'évaluer la classe des dendrites. On appelle ainsi chaque continu péanien (= image continue d'un intervalle) qui ne contient aucune courbe simple fermée. Or, on prouve facilement[1]) que la famille des dendrites coïncide avec celle des continus péaniens dont chaque sous-continu est unicohérent. La famille des continus péaniens étant un $F_{\sigma\delta}$[2]), la famille des dendrites, comme produit d'un $F_{\sigma\delta}$ et d'un G_δ, est un $F_{\sigma\delta}$.

8. *Arcs. Courbes simples fermées.*

Un arc (= image bicontinue d'un intervalle) peut être caractérisé comme dendrite qui ne contient aucun point de ramification. Cela revient à dire que K, L et M étant trois sous-continus de la dendrite tels que $KLM \neq 0$, l'un d'eux est contenu dans la somme des deux autres. (Car, en cas de point de ramification, il existe trois arcs K, L et M n'ayant que ce point en commun, — la condition n'est donc pas satisfaite; d'autre part, on vérifie facilement qu'elle est satisfaite sur un intervalle, donc sur chaque arc).

On a ainsi l'équivalence:

(12) $\{$*une dendrite D est un arc*$\} \equiv \underset{K,L,M}{\Pi}[(K+L+M \subset D)(KLM \neq 0) \rightarrow$
$\rightarrow (K \subset L+M)+(L \subset K+M)+(M \subset K+L)]$.

[1]) Cf. K. **Menger**, Math. Ann. 96 (1926), p. 575.
[2]) théor. de M. **Mazurkiewicz**. Voir sa note de Fund. Math. 17, p. 273 et ma note citée, ib., p. 269.

L'ensemble $\underset{X,Y}{\mathrm{E}}(X \subset Y)$ étant fermé, on voit sans peine que l'ensemble défini par la condition entre crochets [ ] est un G_δ. En effectuant sur lui l'opération $\underset{K,L,M}{\Pi}$, on parvient à un G_δ (puisque les variables K, L, M parcourent l'espace $\mathfrak{L}$ compact). En multipliant cet ensemble par l'ensemble des dendrites (qui est un $F_{\sigma\delta}$), on obtient *l'ensemble des arcs; c'est donc un* $F_{\sigma\delta}$[1]).

Pour démontrer que *les courbes simples fermées constituent un* $F_{\sigma\delta}$, il suffit de prouver que le membre gauche de la formule (12) peut être remplacé par: „un continu péanien non-unicohérent est une courbe simple fermée".

Or, les dendrites étant unicohérentes, il en résulte que les continus péaniens non-unicohérents contiennent toujours des courbes simples fermées. Si un continu péanien C contient une courbe simple fermée Q, mais ne se réduit pas à elle, on peut tracer dans C un arc qui n'a avec Q qu'un seul point p commun; C contient alors trois arcs K, L et M qui n'ont deux à deux que le point p en commun; la condition exprimée dans le membre droit de la formule (12) n'est donc pas réalisée. Cette condition est donc suffisante pour qu'un continu péanien non-unicohérent soit une courbe simple fermée. Elle est aussi nécessaire, comme on le voit facilement.

[1]) cette démonstration est due à M. **Mazurkiewicz**.