Sur une propriété caractéristique des ensembles $G_{\delta\sigma\delta}$.

Par

S t e f a n j a B r a u n (Varsovie).

E étant un ensemble plan donné, désignons par $f(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que *la droite $x = a$ rencontre E en un ensemble dénombrable dont les ordonnées constituent une suite tendant vers $+\infty$.*

Théorème I. *Pour qu'un ensemble linéaire H soit un ensemble $G_{\delta\sigma\delta}$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble plan fermé E tel que $f(E) = H$* [1]).

D é m o n s t r a t i o n I. L a c o n d i t i o n e s t n é c e s s a i r e.

Lemme I. *Soit K un ensemble linéaire $F_{\sigma\delta}$; il existe un ensemble plan fermé P situé entre les droites $y = 0$ et $y = 1$ et tel que*

1º *Si $x_0 \bar{\epsilon} K$, la droite $x = x_0$ rencontre P en un ensemble fini de points.*

2º *Si $x_0 \epsilon K$, la droite $x = x_0$ rencontre P en un ensemble de points qui n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe $0Y$.*

3º *La droite $y = 0$ est contenue dans P.*

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Soit K un ensemble linéaire $F_{\sigma\delta}$. Il existe d'après un théorème de M. S i e r p i ń s k i [2]) une

suite infinie $K_1, K_2, K_3, \ldots$ d'ensembles linéaires fermés tels que

$$K = \overline{\lim_{n=\infty}} K_n \tag{1}$$

[c'est-à-dire $K = (K_1 + K_2 + K_3 \ldots)(K_2 + K_3 \ldots)(K_3 + K_4 \ldots)$].

Désignons par P_n l'ensemble

$$P_n = \mathop{\mathrm{E}}_{x,y}\left[x \epsilon K_n,\ y = \frac{1}{n}\right],$$

c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que

$$x \epsilon K_n,\ y = \frac{1}{n} \quad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Soit D la droite $y = 0$.

Je dis que l'ensemble

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n + D$$

satisfait à toutes les conditions du lemme.

Il résulte de la définition de l'ensemble P que la projection de cet ensemble sur l'axe $0Y$ est un ensemble fermé ayant un seul point d'accumulation $y = 0$. Les ensembles K_n étant fermés (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) et l'axe $0x$ étant contenue dans P, on en déduit que l'ensemble P est fermé.

1º Si $x_0 \bar{\epsilon} K$, il existe, selon (1), un nombre fini (ou vide) d'indices n tels que $x_0 \epsilon K_n$, d'où il résulte, la droite $y = 0$ étant contenue dans P, que l'ensemble $P \cdot \mathop{\mathrm{E}}_{x,y}[x = x_0]$ est fini.

2º Si $x_0 \epsilon K$, il existe (d'après (1)) une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ tels que $x_0 \epsilon K_{n_i}$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne, d'après la définition de l'ensemble P, la relation:

$$\left(x_0, \frac{1}{n_i}\right) \epsilon P \quad (\text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous en concluons que la droite $x = x_0$ rencontre l'ensemble P en un ensemble de points qui, étant ordonné suivant la direction positive de l'axe $0Y$, contient une suite semblable à celle de tous les nombres entiers négatifs, d'où il s'en suit que cet ensemble n'est pas bien ordonné.

La condition 3º étant évidemment satisfaite, le lemme I se trouve ainsi démontré.

[1]) Dans le cas, où E est un ensemble fermé, l'ensemble $\varphi(E)$ est la constituante $\mathcal{E}_\omega$ du complémentaire de l'ensemble criblé au moyen du crible E.
Voir: W. S i e r p i ń s k i: *Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés.* Ce volume, p. 88.

[2]) W. S i e r p i ń s k i: *Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$.* Fund. Math. VI, p. 21.

Soit maintenant H un ensemble linéaire $G_{\delta\sigma\delta}$ donné. Il existe donc une suite infinie $H_1, H_2, H_3, \ldots$ d'ensembles linéaires $G_{\delta\sigma}$ tels que

(2) $$H = \prod_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Désignons par K_n, respectivement par K, les ensembles complémentaires de H_n, respectivement de H, par rapport à l'axe des abscisses.

On a d'après (2)

(3) $$K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Les ensembles K_n étant des ensembles linéaires $F_{\sigma\delta}$, il résulte du lemme I qu'il existe pour tout n naturel un ensemble plan fermé Q_n situé entre les droites $y=0$ et $y=1$ et tel que

1° Si $x_0 \bar{\epsilon} K_n$, la droite $x=x_0$ rencontre l'ensemble Q_n en un ensemble composé d'un nombre fini de points.

2° Si $x_0 \epsilon K_n$, la droite $x=x_0$ rencontre l'ensemble Q_n en un ensemble qui n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe $0Y$.

3° La droite $y=0$ est contenue dans Q_n.

Désignons, pour $n=1, 2, 3, \ldots$, par E_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $(x, y-n) \epsilon Q_n$.

Les ensembles fermés E_n sont situés entre les droites $y=n$ et $y=n+1$. On voit sans peine que les conditions 1° et 2° seront satisfaites, si nous y remplaçons les ensembles Q_n par les ensembles E_n; on voit de plus que la droite $y=n$ est contenue dans E_n.

Posons maintenant

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

Les ensembles E_n étant fermés est situés entre les droites $y=n$ et $y=n+1$, l'ensemble E est fermé.

Je dis que l'on a:

(4) $$f(E) = H.$$

En effet, supposons que $x_0 \epsilon H$ et désignons par D la droite $x=x_0$.

On a, d'après (2), $x_0 \epsilon H_n$ (pour $n=1,2,3,\ldots$), donc $x_0 \bar{\epsilon} K_n$ (pour $n=1,2,3,\ldots$), d'où il résulte que l'ensemble $E_n \cdot D$ est fini.

Soit maintenant N un nombre naturel arbitraire.

Il résulte de la définition des ensembles E_n et E que l'on a:

$$E \cdot \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[x = x_0,\ y < N] \subset \sum_{n=1}^{N-1} E_n \cdot D\,^{1)},$$

et on voit, d'après ce qui précède, que cet ensemble est fini (ou vide).

D'autre part, la droite $y=n$ étant contenue dans E_n $(n=1,2,3,\ldots)$, on a $x_0 \epsilon f(E)$. donc

(5) $$H \subset f(E).$$

Supposons maintenant que le point x_0 remplit la relation

(6) $$x_0 \bar{\epsilon} H.$$

Le point x_0 appartenant, d'après (6), à l'ensemble K, il existe, d'après (3), un nombre naturel m tel que $x_0 \epsilon K_m$.

Désignons par D la droite $x=x_0$.

Les ensembles E_n satisfaisant à la condition 2° (pour $n=1,2,3,\ldots$), l'ensemble $E_m \cdot D$ n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe $0Y$. L'ensemble E remplissant la condition $E_n \subset E$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, il en est de même pour l'ensemble $E \cdot D$.

Nous en concluons, d'après la définition de l'ensemble $f(E)$, que l'on a:

(7) $$x_0 \bar{\epsilon} f(E).$$

La formule (6) entraînant (7), on a $f(E) \subset H$, ce qui donne, en vertu de (5), la formule (4).

La condition du théorème est donc nécessaire.

II. La condition est suffisante.

Lemme II [2]). *Soit E un ensemble plan F_σ, n un nombre naturel donné. L'ensemble $\varphi_n(E)$ de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble contenant au moins n points est un ensemble (linéaire) F_σ.*

[1]) pour $N=1$ cet ensemble est vide.

[2]) Les lemmes II et III ont été démontrés par M. Sierpiński dans sa note: *Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points*. Mathematica. Vol. V, p. 51.

Démonstration du lemme.

La projection orthogonale d'un ensemble F_σ plan, étant comme on sait, un F_σ linéaire, on voit que l'ensemble $\varphi_1(E)$ est un F_σ (linéaire).

Le lemme est donc vrai pour $n=1$.

Supposons maintenant qu'il est vrai pour $n=k$ et désignons par E_1 l'ensemble de tous les points (x, y) de E pour lesquels il existe un point (ξ, η) de l'ensemble E tel que

$$\xi = x, \quad \eta > y.$$

D'après la terminologie de M. Mazurkiewicz E_1 est l'ensemble de tous les points de E qui ne sont pas ses points *y-maxima*, donc, dans le cas présent, un ensemble F_σ plan [1]).

Le lemme étant supposé vrai pour $n=k$, il en résulte que l'ensemble $\varphi_k(E_1)$ est un F_σ linéaire. On en conclut, d'après l'égalité évidente $\varphi_{k+1}(E) = \varphi_k(E_1)$, que l'ensemble $\varphi_{k+1}(E)$ est un F_σ linéaire.

Le lemme II est ainsi démontré par l'induction.

Lemme III. *Si E est un ensemble F_σ plan, l'ensemble $\varphi_\infty(E)$ de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble infini de points est un ensemble $F_{\sigma\delta}$.*

Ce lemme résulte immédiatement du lemme II et de la formule évidente

$$\varphi_\infty(E) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(E).$$

Ceci posé, soit E un ensemble plan fermé. Désignons par E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ l'ensemble de tous les points (x, y) de E tels que $y \leqslant n$.

L'ensemble E étant fermé, les ensembles E_n le sont aussi.

Posons $T = \varphi_\infty(E)$ et désignons par M_n le complémentaire de l'ensemble $\varphi_\infty(E_n)$ par rapport à la droite $0X$.

On vérifie sans peine que l'on a

$$f(E) = T \cdot \prod_{n=1}^{\infty} M_n. \tag{8}$$

[1]) On démontre cette proposition à l'aide de la même méthode que M. Sierpiński a utilisé pour démontrer que, si E est un ensemble analytique, E_1 l'est aussi.

Voir: W. Sierpiński: *Sur les ensembles analytiques*. Fund. Math. XI, p. 293.

D'après le lemme III, l'ensemble T est un $F_{\sigma\delta}$ et les ensembles M_n sont des $G_{\delta\sigma}$. Il en résulte, en vertu de la formule (8), que l'ensemble *$f(E)$ est un $G_{\delta\sigma\delta}$*.

Notre théorème est ainsi démontré.

E étant un ensemble plan donné, désignons par $\varphi(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E en un ensemble *isolé* (ou vide).

M. Sierpiński a remarqué qu'en modifiant un peu la démonstration de notre théorème I on peut démontrer que:

Pour qu'un ensemble linéaire H soit un $G_{\delta\sigma\delta}$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble plan fermé E tel que $\varphi(E) = H$.

I. La condition est nécessaire. Cela résulte tout de suite de la démonstration de la nécessité de la condition de notre théorème I.

II. La condition est suffisante. Soit E un ensemble plan fermé, et désignons par E_n l'ensemble de tous les points (x, y) de E tels que $|y| \leqslant n$. Désignons par H_n l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre H_n en un ensemble fini (ou vide). D'après le lemme III les ensembles H_n (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des $G_{\delta\sigma}$. Or, pour qu'un ensemble linéaire fermé soit isolé (ou vide), il faut et il suffit qu'il soit fini ou vide dans tout intervalle $(-n, n)$ où $n = 1, 2, 3, \ldots$ Il en résulte tout de suite que $\varphi(E) = H_1 H_2 H_3 \ldots$, ce qui prouve que l'ensemble $H = \varphi(E)$ est un $G_{\delta\sigma\delta}$.

M. Sierpiński remarque encore qu'on peut en déduire facilement une propriété caractéristique des ensembles $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$. En effet, désignons par $\psi(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre l'ensemble plan E en un ensemble linéaire qui contient au moins un point d'accumulation à l'intérieur de tout intervalle aux extrémités entières. On démontre sans peine [1]) que

Pour qu'un ensemble linéaire H soit un $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble plan fermé E tel que $\psi(E) = H$.

Le théorème I subsiste, comme on voit sans peine, si l'on y remplace les ensembles fermés par les ensembles F_σ.

[1]) Pour le voir il ne faut qu'appliquer les théorèmes généraux que M. Sierpiński a démontré dans son Mémoire des C. R. de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Année XXIV (1931), pp. 59, 63.

Théorème II. *Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble G_δ plan E tel que $f(E)=H$, il faut et il suffit que H soit complémentaire d'un ensemble analytique.*

Démonstration. I. La condition et nécessaire.

Soit E un ensemble plan mésurable (B). Désignons par E'_n $(n=1,2,3,\ldots)$ l'ensemble de tous les points (x,y) de E tels que $y\leqslant n$, par E''_n $(n=1,2,3\ldots)$ l'ensemble de tous les points (x,y) de E tels que $y\geqslant n$.

En conservant les notations précédentes, désignons par M_n le complémentaire de l'ensemble $\varphi_\infty(E'_n)$ par rapport à l'axe $0X$.

Or, en raisonnant comme plus haut (voir les lemmes II et III), on peut démontrer que, si K est un ensemble mésurable (B), ou plus généralement un ensemble analytique, $\varphi_\infty(K)$ est un ensemble analytique.

Les ensembles E'_n étant mésurables (B), nous en concluons que les ensembles M_n sont des complémentaires analytiques (pour $n=1,2,3\ldots$).

Désignons maintenant par T_n l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x=a$ rencontre E''_n en un ensemble contenant au moins un point isolé.

Or, M. Lusin a démontré[1]) que *l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x=a$ rencontre un ensemble mésurable (B) donné en un seul point, est un complémentaire analytique.*

En s'appuyant sur ce théorème, on peut démontrer[2]) que les ensembles T_n sont des complémentaires analytiques.

Il en résulte, en vertu de la formule

$$f(E)=\prod_{n=1}^{\infty} M_n\cdot T_n,$$

que $f(E)$ est complémentaire d'un ensemble analytique.

II. La conditon est suffisante.

Soit H le complémentaire d'un ensemble analytique K. Il existe, comme on sait, un ensemble G_δ plan E^*, situé entre les droites

[1]) N. Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, p. 259.

[2]) W. Sierpiński: *Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points.* Mathematica Vol. V, p. 54—55.

$y=0$ et $y=1$, et tel que la projection de cet ensemble sur l'axe $0X$ coïncide avec l'ensemble K.

Désignons par E_n l'ensemble qu'on obtient par la transformation suivante de l'ensemble E^*:

$$\xi=x$$

$$\eta=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}y.$$

Soit D_n la droite $y=n-1$ (où $n=1,2,3,\ldots$).

L'ensemble $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n+\sum_{n=1}^{\infty}D_n$ est un ensemble G_δ plan remplissant la relation $f(E)=H$.

Remarquons qu'on peut démontrer le théorème suivant:

Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble G_δ plan E tel que $\varphi(E)=H$, il faut et il suffit que H soit complémentaire d'un ensemble analytique.

I. La condition est nécessaire.

L'ensemble E étant un ensemble G_δ plan, ou plus généralement un ensemble analytique plan, désignons par Q l'ensemble de tous les points (x,y) du plan qui sont des points d'accumulation de la partie de l'ensemble E située sur la droite $\eta=x$.

L'ensemble E étant analytique, l'ensemble Q l'est aussi[1]).

[1]) W. Sierpiński: *Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points.* Mathematica, Vol. V, p. 56.

En désignant par Q_n l'ensemble de tous les points (x,y) du plan pour lesquels il existe un point (ξ,η) de E tel que

$$\xi=x,\ 0<|\eta-y|<\frac{1}{n},$$

nous obtenons la formule

$$Q=Q_1\,Q_2\,Q_3\ldots$$

Désignons par R_n l'ensemble de tous les points (x,y,z) de l'espace à trois dimensions tels que $(x,y)\in E$ et $0<|z|<\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

L'ensemble Q_n est l'image continue de l'ensemble R_n (la correspondance entre ces ensembles étant établie par les formules

$$\xi=x,\quad \eta=y+z).$$

L'ensemble E étant analytique, les ensembles R_n et Q_n le sont aussi; donc Q, comme produit d'une infinité dénombrable d'ensembles analytiques, est aussi un ensemble analytique.

Il en résulte, l'ensemble $\varphi(E)$ étant complémentaire de la projection de l'ensemble $Q \cdot E$ sur l'axe $0X$, que $\varphi(E)$ est un complémentaire analytique.

II. La condition est suffisante. Cela résulte de la démonstration de la deuxième partie de notre théorème II.

Il résulte de ce dernier théorème, en vertu des théorèmes généraux de M. Sierpiński [1]):

Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble G_δ plan E tel que $\psi(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un ensemble analytique.

Théorème III. *Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H, un ensemble plan projectif E de classe P_ξ (ξ étant un nombre ordinal $< \Omega$), tel que $f(E) = H$, il faut et il suffit que H soit une différence de deux ensembles projectifs de classe P_ξ* [2]).

I. La condition est nécessaire. La démonstration de la nécessité est analogue à celle de la deuxième partie de notre théorème I.

II. La condition est suffisante. Soit $\xi < \Omega$ un nombre ordinal et soient H_1 et H_2 deux ensembles P_ξ linéaires. Posons $H = H_1 - H_2$. Désignons par E_1 l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $x \in H_1$ et y est un nombre naturel, par E_2 l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $x \in H_2$.

L'ensemble somme $E = E_1 + E_2$ est un ensemble P_ξ plan tel que $f(E) = H$.

Il est ainsi démontré que la condition du théorème III est aussi suffisante.

Quant aux ensembles projectifs de classe $C_\xi (\xi < \Omega)$, on déduit du théorème III la proposition suivante:

Si E est un ensemble projectif plan de classe C_ξ $(\xi < \Omega)$, $f(E)$ est une différence de deux ensembles linéaires projectifs de classe $P_{\xi+1}$.

[1]) Voir p. 143.

[2]) Pour la définition des ensembles projectifs de classe P_ξ et C_ξ pour les nombres ordinaux ξ de la première ou deuxième classe, voir: L. Kantorowitch et E. Livenson: *Sur les ensembles projectifs de M. Lusin*. Comptes Rendus, t. 190, p. 1114.

Je ne sais pas si le théorème inverse est vrai.

Remarquons que de la même manière dont nous avons démontré les théorèmes analogues concernant les ensembles G_δ plans, on peut démontrer les théorèmes suivants:

Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble plan projectif E de classe P_ξ $(\xi < \Omega)$ tel que $\varphi(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un ensemble de classe C_ξ.

Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble plan projectif E de classe P_ξ $(\xi < \Omega)$ tel que $\psi(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un ensemble projectif de classe P_ξ.

Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble plan projectif E de classe C_ξ $(\xi < \Omega)$ tel que $\varphi(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un ensemble de classe $C_{\xi+1}$.

Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble plan projectif E de classe C_ξ $(\xi < \Omega)$ tel que $\psi(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un ensemble de classe $P_{\xi+1}$.