Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre.

Par

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

1. **Introduction.** M. C. Kuratowski a posé le problème suivant: *y a-t-il dans toute suite infinie d'ensembles un ensemble qui soit l'image continue d'un des autres* [1]? Je me propose de résoudre dans cette note le problème analogue pour les ensembles plans. Je vais montrer notamment que déjà pour les ensembles fermés et même pour les continus la réponse est négative: je donnerai un exemple effectif d'une *famille $\mathfrak{P}$ de la puissance $\mathfrak{c}$ formée de continus plans bornés dont aucun n'est l'image continue d'un autre.* Il en résulte à plus forte raison l'existence des suites infinies de tels continus.

L'idée de la construction est basée sur le phénomène suivant (qui résulte du lemme 2, VI par le passage à la limite, cf. 5, XIII): aucune fonction continue qui transforme la courbe $y = \sin\dfrac{\pi}{x}$, $0 < x \leqslant 1$ (y compris son continu de condensation) en elle même ne peut transformer en même temps une suite de points $\{p_n\} \to (0,0)$ d'une façon biunivoque en aucune suite partielle de la forme $\{p_{n^k}\}$, où $k > 1$, car dans ce cas les images des arcs $\overline{p_n p_{n+1}}$ contiendraient plus d'oscillations que leurs modèles et en conséquence certains arcs partiels des modèles de longueur infiniment décroissante (tendant vers un point de l'axe Y) seraient transformés en des arcs de longueur constante (tendant vers un segment de l'axe Y), contrairement à la continuité de la fonction. On est donc ici en présence d'un nouveau invariant des transformations continues; je me propose de

[1]) Fund. Math. XIV, p. 235.

revenir sur lui est d'en donner une étude un peu plus détaillée dans une autre note, consacrée aux autres problèmes qu'il permet également de résoudre.

Termes et notations. En dehors des notations topologiques courantes des Fund. Math., je désigne: par $\overline{xy}$ l'arc simple à extrémités x et y, par $\lambda(L)$ la longueur de l'arc simple L et je pose pour tout continu péanien C:

$$\lambda(C) = \mathit{lim\ sup}\ \lambda(L) \quad \textit{pour tout arc simple } L \subset C.$$

Il est évident que l'on a pour tout C péanien:

(1) $$\lambda(C) \geqslant \delta(C)$$

(2) *pour tout système fini des continus C_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ tels que $C = \sum\limits_{i=1}^{N} C_i$ on a*

$$\lambda(C) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda(C_i).$$

2. **Quelques théorèmes généraux.** Etant donnés deux points x et y d'un continu M situé dans un espace métrique et compact, on appelle *distance relative* entre x et y dans M la borne inférieure des diamètres des continus M_{xy} tels que $x + y \subset M_{xy}$ [2]), en formules

$$\varrho_M(x, y) = \inf \delta(M_{xy}) \quad \textit{où} \quad x + y \subset M_{xy} \subset M.$$

M_M désignant l'espace métrique obtenu de M par le changement de la métrique ordinaire en celle des distances relatives ϱ_M [3]), M est — remarquons le de suite — *l'image biunivoque et continue* (dans un sens) *de* M_M, puisqu'on a toujours

$$\varrho_M(x, y) \geqslant \varrho(x, y),$$

de sorte que $\lim\limits_{y \to x} \varrho_M(x, y) = 0$ entraîne $\lim\limits_{y \to x} \varrho(x, y) = 0$.

La transformation de M_M en M étant ainsi définie, je désignerai pour tout $N \subset M$ par N_M le „modèle" de N dans M_M et, réciproquement, pour tout $N_M \subset M_M$ je désignerai par N l'„image" de N_M dans M.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, p. 166.

[3]) P. Urysohn, *Mémoire sur les mutiplicités cantoriennes* II, Verh. Akad. Amsterdam XIII, No 4, p. 35—42.

L'opération N_M (N^* rel. M de Urysohn) s'étant montrée importante en Topologie; surtout dans l'étude des invariants des transformations continues, je commence par en établir ici quelques propriétés qui sont peut-être intéressantes par elles-mêmes; je me borne d'ailleurs à celles qui seront utilisées dans la suite.

I. *Etant donnée une fonction continue $f(x)$ définie sur le continu M, la fonction*

$$g(x_M) = [f(x)]_{f(M)} \quad \textit{pour} \quad x_M \in M_M$$

est continue sur M_M.

En effet, soit $\{(x_k)_M\}$ une suite convergente de points de M_M et $x_M = \lim_{k=\infty} (x_k)_M$. Comme par définition de M_M: $\varrho(x_M, (x_k)_M) = \varrho_M(x, x_k)$, on a

$$(3) \qquad \lim_{k=\infty} \varrho_M(x, x_k) = 0.$$

La fonction $f(x)$ étant continue, la formule (3) entraîne

$$\lim_{k=\infty} \varrho_{f(M)}(f(x), f(x_k)) = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{k=\infty} [f(x_k)]_{f(M)} = [f(x)]_{f(M)}, \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{k=\infty} g((x_k)_M) = g(x_M), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

II. *Si*

(a) *M est un continu,*

(b) *C_M est un sous-ensemble connexe de M_M,*

(c) *f est une fonction continue définie sur M,*

(d) *$I_{f(M)}$ est une composante de $[f(M)]_{f(M)}$ telle que $I_{f(M)} \cdot [f(C)]_{f(M)} \neq 0$,*

alors

$$(4) \qquad f(C) \subset I.$$

En effet, d'après I, (a), (b), (c) et, la connexité étant un invariant des transformations continues [4]), l'ensemble $[f(C)]_{f(M)}$ est connexe, donc contenu dans une composante de $[f(M)]_{f(M)}$. Il en résulte selon (d) que

$$(5) \qquad [f(C)]_{f(M)} \subset I_{f(M)}.$$

La transformation de $[f(M)]_{f(M)}$ en $f(M)$ étant biunivoque, (5) implique (4).

III. *Soit M un continu, $D \subset M$ un semi-continu „arcwise connected" et f une fonction continue définie sur M. Alors $f(D)$ est un sémi-continu „arcwise connected".*

[4]) Voir par ex. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, S. 198, 3, VI.

Soit en effet x un point de C. On a par définition de C l'égalité $C = \sum_{y \subset C} \overline{xy}$ donc:

$$(6) \qquad f(C) = f\Big(\sum_{y \subset C} \overline{xy}\Big) = \sum_{y \subset C} f(\overline{xy}).$$

Or, $f(\overline{xy})$ est un continu péanien. Par conséquent $f(C)$, qui est selon (6) la somme des continus péaniens passant par le point $f(x)$, est un sémi-continu „arcwise connected", c. q. f. d.

IV. J'appelle. *L-composante* de M l'ensemble de tous les points de M qui se laissent joindre dans M deux à deux par des arcs simples [5]).

Si

(a) *M est un continu,*

(b) *C un semi-continu „arcwise-connected" contenu dans M,*

(c) *f une fonction continue définie sur M,*

(d) *I une L-composante de $f(M)$ telle que $I \cdot f(C) \neq 0$,*

alors

$$f(C) \subset I.$$

En effet, l'ensemble $f(C)$ étant, d'après III, (a), (b) et (c), un semi-continu „arcwise connected", il est contenu dans une L-composante de $f(M)$ et, selon (d), c'est I qui contient $f(C)$.

V. *C étant un semi-continu „arcwise connected" contenu dans M, son modèle C_M est connexe* [6]).

VI. *Etant donnée une fonction continue définie sur un arc simple C de longueur finie, l'inégalité $1 \leqslant \lambda[f(C)] < \infty$ implique l'existence d'un arc simple $A \subset C$ tel que $\lambda(A) = \dfrac{\lambda(C)}{\mathrm{E}(\lambda[f(C)])}$, pendant que $\lambda[f(A)] \geqslant 1$.*

En effet, divisons l'arc C en $n = \mathrm{E}(\lambda[f(C)])$ arcs partiels C_i tels que $\lambda(C_i) = \dfrac{\lambda(C)}{\mathrm{E}(\lambda[f(C)])}$.

[5]) Je dois cette notion à M. A. Lindenbaum. L-composante est aussi la somme de tous les sous-continus de M „arcwise-connected" au sens de M. G. T. Whyburn ayant un point commun.

[6]) et même „arcwise connected", car N étant un arc simple, la transformation de N en N_M est par définition une *homéomorphie* (quel que soit $M \supset N$).

D'après $C=\sum_{i=1}^{n} C_i$, on a $f(C)=\sum_{i=1}^{n} f(C_i)$, ce qui entraîne selon (2), la formule $n\leqslant \lambda(f(C))\leqslant \lambda(f(C_1))+\lambda(f(C_2))+\ldots+\lambda(f(C_n))$.

Cette formule implique que l'inégalité $1\leqslant\lambda(f(C_k))$ se présente pour un $k\leqslant n$, donc pour un $A=C_k$, c. q. f. d.

3. Constructions auxiliaires. Désignons dans le plan $z=0$ pour tout $s=1,2,\ldots$ par $A_{1,s}$ la courbe

$$(A_{1,s})\begin{cases} y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2x-1}\right)+\dfrac{1}{2^{s-3}}-\dfrac{1}{2^{s-1}} \quad pour \quad \dfrac{4s+3}{2(4s+1)}\leqslant x\leqslant 1,\\[2ex] y=\dfrac{1}{2^s}\sin\dfrac{\pi}{2x-1}+1+\dfrac{1}{2^{s-3}}-\dfrac{3}{2^s} \quad pour \quad \dfrac{1}{2}<x\leqslant\dfrac{4s+3}{2(4s+1)}.\end{cases}$$

Posons:

$$A_1=\lim_{s=\infty} A_{1,s}.$$

C'est donc la courbe $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2x-1}\right)$ où $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1$.

Soit B_1 la courbe $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2x-1}\right)-1$ pour $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1$.

Considérons les suites des points:

$$c_{1,i}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}},\ 5\right)\quad et\quad c'_{1,i}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^{i+3}},\ 7\right)\quad où\quad i=1,2,\ldots$$

Soient: $C_{1,1}$ *la ligne polygonale infinie* $c_{1,1}, c'_{1,1}, c_{1,2}, c'_{1,2},\ldots, c_{1,i}, c'_{1,i}\ldots$ ($C_{1,1}$ est donc homéomorphe au continu S formé de la courbe $y=\sin\frac{\pi}{x}$ où $0<x\leqslant 1$ et de son continu de condensation $x=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$) et $C_{1,s}$ pour $s=1,2,\ldots$ la courbe qui s'obtient de $C_{1,1}$ par la translation $x'=x$, $y'=y+2-\frac{1}{2^{s-2}}$. En désignant par $(c_{1,1})^s$ l'image de $c_{1,1}$ obtenu par cette translation, soient $F^{(1)}_{1,s}$ le segment à extrémités $(c_{1,1})^{2s-1}$, $(c_{1,1})^{2s}$ et $F^{(2)}_{1,s}$ celui à extrémités $(c_{1,2})^{2s}$ et $(c_{1,2})^{2s+1}$.

Posons:

$$C_1=\sum_{s=1}^{\infty}(C_{1,s}+F^{(1)}_{1,s}+F^{(2)}_{1,s})+G_1,$$

où G_1 est le segment: $y=5$, $\dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1$.

En désignant par H_1 le segment vertical $x=1$, $-\frac{3}{2}\leqslant y\leqslant 12$, qui passe par les points initiaux de toutes les courbes $A_{1,s}$, A_1 et C_1 posons:

$$I_1=\sum_{s=1}^{\infty}A_{1,s}+A_1+B_1+C_1+H_1.$$

Pour désigner les mêmes constructions, mais faites dans les intervalles $\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$ au lieu de $\left(\frac{1}{2},1\right)$ de l'axe X, nous *ferons varier* dans les symboles introduits *le premier indice.*

On aura donc pour $k\geqslant 1$:

$$\begin{cases} A_{k,s}:\ \begin{cases} y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2^k\cdot x-1}\right)+\dfrac{1}{2^{s-3}}-\dfrac{1}{2^{s-1}} \ pour\ \dfrac{4s+3}{2^k(4s+1)}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2^{k-1}},\\[2ex] y=\dfrac{1}{2^s}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^k\cdot x-1}\right)+1+\dfrac{1}{2^{s-3}}-\dfrac{3}{2^s}\ pour\ \dfrac{1}{2^k}<x\leqslant\dfrac{4s+3}{2^k(4s+1)},\end{cases}\\[4ex] A_k=\lim\limits_{s=\infty}A_{k,s}\left(\text{c. à d. } y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2^k\cdot x-1}\right)\ où\ \dfrac{1}{2^k}<x\leqslant\dfrac{1}{2^{k-1}}\right),\end{cases}\tag{7}$$

$$B_k:\ y=\frac{1}{2^k}\sin\left(\frac{\pi}{2^k\cdot x-1}\right)-1\quad pour\quad \frac{1}{2^k}<x\leqslant\frac{1}{2^{k-1}},\tag{8}$$

$$\begin{cases} c_{k,i}=\left(\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^{k+i}},\ 5\right)\quad et\quad c'_{k,i}=\left(\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{3}{2^{k+i+2}},\ 7\right),\\[2ex] C_{k,1}=\textit{ligne polygonale infinie}\ c_{k,1}, c'_{k,1}, c_{k,2}, c'_{k,2},\ldots, c_{k,i}, c'_{k,i},\ldots\end{cases}\tag{9}$$

$F^{(1)}_{k,s}=$ *segment à extrémités* $(c_{k,1})^{2s-1}$, $(c_{k,1})^{2s}$,

$F^{(2)}_{k,s}=$ *segment à extrémités* $(c_{k,2})^{2s}$, $(c_{k,2})^{2s+1}$,

$$C_k=\sum_{s=1}^{\infty}(C_{k,s}+F^{(1)}_{k,s}+F^{(2)}_{k,s})+G_k\quad où\quad G_k:\ y=5,\ \frac{3}{2^{k+1}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}.\tag{10}$$

Posons:

$$\begin{cases} H_k:\ x=\dfrac{1}{2^{k-1}},\quad -\dfrac{3}{2}\leqslant y\leqslant 9,\\[2ex] I_k=\sum\limits_{s=1}^{\infty}A_{k,s}+A_k+B_k+C_k+H_k,\end{cases}\tag{11}$$

et ajoutons à $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ le segment H_ω $\left(\text{c. à d. } -\frac{3}{2} \leqslant y \leqslant 12\right)$ de l'axe Y, qui contient le continu de condensation de la courbe $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$.

Soit

(12) $$J = \sum_{k=1}^{\infty} I_k + H_\omega.$$

Pour tout $n > 0$ soient: K_n le segment $x = \frac{3}{2^{n+1}}$, $7 \leqslant y \leqslant 10$ et

(13) $$D_n = \lim_{s=\infty} C_{n,s};$$

c'est donc la ligne polygonale infinie $d_{n,1}, d'_{n,1}, d_{n,2}, d'_{n,2}, \dots$ où $d_{n,k} = \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+k}}, 7\right)$ et $d'_{n,k} = \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^{n+k+2}}, 9\right)$ pour $k = 1, 2, \dots$

Nous terminons la construction par une ligne polygonale infinie (homéomorphe à S) et réunissons successivement les extrémités supérieures des K_n, en effectuant entre elles un nombre variable d'oscillations que nous ferons dépendre d'un paramètre naturel $i = 1, 2, \dots$

Unissons à ce but les extrémités des segments K_1, K_2 par la ligne brisée

$$(L_1^{(i)}),\quad \left(\frac{3}{4}, 10\right),\quad \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16}, 12\right),\quad \left(\frac{3}{8}, 10\right)$$

et posons d'une façon générale $L_n^{(i)} =$ *somme de* $2\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})$[7]) *segments*:

$$\left(\frac{3}{2^{n+1}}, 10\right),\quad \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+3}\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})}, 12\right),\quad \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})}, 10\right), \dots$$

$$\dots \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3(s-1)}{2^{n+2}\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})}, 10\right),\quad \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3(2s-1)}{2^{n+3}\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})}, 12\right), \dots$$

$$\dots \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3(2\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})-1)}{2^{n+3}\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}})}, 12\right),\quad \left(\frac{3}{2^{n+2}}, 10\right).$$

7) E désignant l'„entier".

Remarquons que l'on a par définition

(14) $$\lambda(L_n^{(i)}) = 2\lambda_n\,\mathrm{E}(n^{\frac{2}{i}}) \quad \text{où} \quad 2 < \lambda_n < 3.$$

Soit

(15) $$L^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(i)}.$$

$\overline{L}^{(i)}$ est donc aussi homéomorphe à S. Posons

(16) $$M^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \{L_n^{(i)} + K_n + D_n\}$$

et enfin:

(17) $$P^{(i)} = J + M^{(i)}.$$

Soient

(18) E_k *le continu de condensation de la courbe* D_k (c. à d. le segment: $x = \frac{1}{2^k}$, $7 \leqslant y \leqslant 9$)
N *le continu de condensation de la courbe* $L^{(i)}$ (c. à d. le segment: $x = 0$, $10 \leqslant y \leqslant 12$)

et h_k le point de H_{k+1} à coordonnées $\left(\frac{1}{2^k}, 1\right)$.

On a donc par définition

(19) $$E_k \subset H_{k+1} \subset I_{k+1} \subset J \quad \text{et} \quad N \subset H_\omega \subset J.$$

Remarquons que $P^{(i)}$ contient par définition tous les continus de condensation des courbes qui en font partie. C'est donc un ensemble fermé. Comme ensemble connexe (voir 5, VII) $P^{(i)}$ *est donc un continu.*

Enfin on a par définition de D_k, J, I_k et $M^{(i)}$:

(20) $$\overline{D}_k \cdot J = E_k,$$

(21) $$\overline{I}_k \cdot M^{(i)} = D_k,$$

(22) $$\overline{J} \cdot M^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n,$$

(23) $$J \cdot \overline{M}^{(i)} = N + \sum_{k=1}^{\infty} E_k + E_\omega \quad \text{où} \quad E_\omega = \lim E_k.$$

4. Définition de la famille $\mathfrak{P}$. Soient $t=0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3..$ $(1<\alpha_1\leqslant 9,$ $0\leqslant\alpha_k\leqslant 9,$ $k=2,3,\ldots)$ le développement normal en fraction décimale du nombre réel t $(0,1\leqslant t\leqslant 0,9)$ et n_k le nombre naturel qui s'écrit $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$, c. à d. le nombre $E(10^k\cdot t)$. Faisons correspondre à t la suite des nombres naturels $n_1, n_2,\ldots$ ainsi définis; à deux nombres réels distincts de l'intervalle considéré viennent donc correspondre les suites distinctes de nombres naturels, à savoir n'ayant qu'un nombre fini de termes communs. La famille $T=\{n_1,n_2,\ldots\}$ de telles suites a, par conséquent, la puissance du continu [8]).

Considérons la suite $\{p_k\}$ des points de l'axe X

$$(24)\qquad p_k=2-2^{2-k}\quad \text{où}\quad k=1,2,\ldots$$

Soit $n_1, n_2,\ldots$ la suite de T correspondant au nombre t. Divisons chaque intervalle (p_k, p_{k+1}) où $k=1,2,\ldots$ en 2^{n_k} intervalles partiels, égaux deux à deux, par les points $p_k=x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3},\ldots x_{k,2^{n_k}+1}=p_{k+1}$. Inscrivons ensuite dans chaque bande $Q_{k,j}$ donnée par les équations: $y\geqslant 0$ et $x_{k,j}\leqslant x\leqslant x_{k,j+1}$ où $j=1,2,3,\ldots 2^{n_k}$, la courbe $P_j^{(n_k)}$ semblable (au sens géométrique élémentaire) à $P^{(n_k)}$ de façon que les points $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ et $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ de $P^{(n_k)}$ tombent respectivement sur les points $x_{k,j}, x_{k,j+1}$ de $Q_{k,j}$. Les parties de $P_j^{(n_k)}$ correspondant à $J, M^{(n_k)}, L^{(n_k)}$... etc. seront désignées par $J_j^{(n_k)}$, $M_j^{(n_k)}$, $L_j^{(n_k)},\ldots$ etc. (d'ailleurs nous allons négliger l'indice inférieur dans les cas ne donnant occasion aux malentendus).

Soit P_{n_k} la somme ainsi obtenue de 2^{n_k} courbes inscrites $P_j^{(n_k)}$; en formules

$$(25)\qquad P_{n_k}=\sum_{j=1}^{2^{n_k}}P_j^{(n_k)}.$$

Posons

$$(26)\qquad P_t=\overline{\sum_{j=1}^{\infty}P^{(n_k)}}$$

et soit

$\mathfrak{P}$ *la famille de puissance* $\mathfrak{c}$ *de toutes les courbes* P_t *où* $0,1\leqslant t\leqslant 0,9$.

[8]) L'idée de baser la construction de la famille indénombrable $\mathfrak{P}$ sur l'ensemble de telles suites m'a été communiquée par M. B. Knaster.

Je démontrerai (voir 6) qu'aucune courbe de $\mathfrak{P}$ n'est l'image continue d'une autre. A présent notons ce qui suit.

La courbe P_{n_k} étant inscrite dans le rectangle de cotés $\frac{1}{2^k}$ et $\frac{13,5}{2^{k+n_k}}$, on a $\delta(P_{n_k})<\frac{15}{2^k}$ où $k=1,2,\ldots,$ d'où

$$(27)\qquad \lim_{k=\infty}\delta\left(\sum_{l=k}^{\infty}P_{n_l}\right)=0$$

et par conséquent la suite p_k étant convergeante, la suite P_{n_k} converge vers le même point, à savoir, selon (24), vers le point $p_t=$ $=(2,0)=\lim_{k=\infty}p_k=\lim_{k=\infty}P_{n_k}$. D'après la définition de P_t on a donc

$$(28)\qquad P_t=\overline{\sum_{k+1}^{\infty}P_{n_k}}=p_t+\sum_{k=\infty}^{\infty}P_{n_k}.$$

Par définition de $P_j^{(n_k)}$ au dépens de $P^{(n_k)}$ on a d'après (17):

$$P_j^{(n_k)}\cdot P_i^{(n_p)}\subset J_j^{(n_k)}\cdot J_i^{(n_p)}\quad \text{où}\quad k\neq p\quad \text{ou}\quad i\neq j.$$

On a donc, remarquons le de suite:

$$(29)\qquad M_j^{(n_k)}\cdot\overline{M}_i^{(n_p)}+\overline{M}_j^{(n_k)}\cdot M_i^{(n_p)}\subset J_j^{(n_k)}\cdot J_i^{(n_p)}\cdot M_j^{(n_k)}+J_j^{(n_k)}\cdot J_i^{(n_p)}\cdot M_i^{(n_p)}=0.$$

Le rapport d'homothétie des courbes $P_i^{(n_k)}$ et $P^{(n_k)}$ étant égal a $\frac{1}{2^{n_k+k}}$ on a, d'après (14)

$$(30)\qquad \lambda(L_{j,s}^{(n_k)})=\frac{1}{2^{n_k+k}}\,2\,\lambda_s\,E\,(s^{\frac{1}{n_k}})=\lambda_{n,s}E\,(s^{\frac{1}{n_k}})\quad \text{où}\quad \frac{1}{2^{n_k+k-2}}<\lambda_{n_k,s}<\frac{3}{2^{n_k+k-1}}.$$

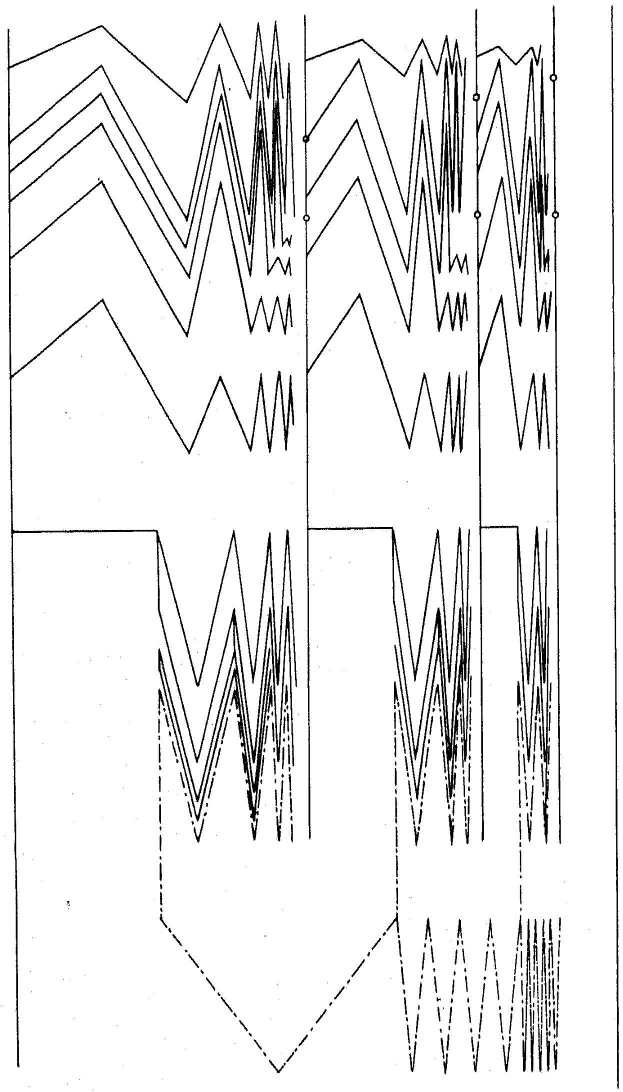
5. Propriétés auxiliaires. Parmi les propriétés des continus P_t nous utiliserons les suivantes:

VII. $P_{P(i)}^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$ *est la somme de ses deux composantes* $M_{P(i)}^{(i)}$ *et* $J_{P(i)}$ (réprésentées sur la figure respectivement par les lignes discontinues et continues).

En effet, en vertu de V,

$$(31)\qquad M_{P(i)}^{(i)}\ \text{est connexe},$$

puisque $M^{(i)}$ est „arcwise connected" comme somme des „sinusoïdes ouvertes" $L^{(i)}$ et D_k réunies par les segments K_n (voir (15) et (16)).



La figure répresente le continu auxiliaire $P^{(1)}$. La courbe $M^{(1)}$ y est répresentée par une ligne discontinue, J — par des lignes continues.

Selon la formule (11), $(I_k)_{P^{(l)}}$ $(k=1, 2, \ldots)$ est connexe pour la même raison. Or, $(h_k)_{P^{(l)}} \subset (I_{k+1})_{P^{(l)}}$ *est le point d'accumulation de l'ensemble* $(I_k)_{P^{(l)}}$, puisque, $a_{k,s}$ désignant l'extrémité inférieure du segment de condensation de la „sinusoïde" $A_{k,s}$, on a selon (7) et (11):

$$a_{k,s} = \left(\frac{1}{2^k}, 1 + \frac{1}{2^{s-3}} - \frac{4}{2^s}\right) \subset H_{k+1} \text{ et } \varrho(a_{k,s}, h_k) = \varrho_{P^{(l)}}(a_{k,s}, h_a) = \frac{1}{2^{s-3}} - \frac{4}{2^s}$$

et comme, en outre, $\varrho_{P^{(l)}}(a_{k,s}, I_k) \leqslant \varrho_{P^{(l)}}(a_{k,s}, A_{k,s}) = \frac{1}{2^{s-1}}$ (= amplitude de la „sinusoïde" $A_{k,s}$), on a:

$$\varrho_{P^{(l)}}(h_k, I_k) \leqslant \varrho_{P^{(l)}}(I_k, a_{k,s}) + \varrho_{P^{(l)}}(a_{k,s}, h_k) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{4}{2^s} \text{ pour } s=1,2,\ldots,$$

donc $\varrho_{P^{(l)}}(h_k, I_k) = 0$, c. à d., précisément $(h_k)_{P^{(l)}} \subset (\overline{I_k})_{P^{(l)}}$. Cette formule montre que $(I_k)_{P^{(l)}} + (I_{k+1})_{P^{(l)}}$ est connexe, d'où il résulte par induction que

$$(32) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (I_k)_{P^{(l)}} \text{ est connexe.}$$

Considérons maintenant les points $b_k = \left(\frac{1}{2^k}, -1\right) \subset H_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots)$ et le point

$$(33) \qquad b_\omega = (0, -1) \subset H_\omega.$$

On a selon les formules (8), (11) et (12) la relation

$$\varrho_{P^{(l)}}(b_k, b_\omega) \leqslant \delta\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} B_n\right) \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

donc puisque $b_k \subset H_{k+1} \subset I_k$ selon (19), on a $\varrho_{P^{(l)}}(\sum_{k=1}^{\infty} I_k, b_\omega) \leqslant \leqslant \varrho_{P^{(l)}}(b_k, b_\omega) \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}$ pour tout $k=1, 2,\ldots$; il en résulte $\varrho_{P^{(l)}}(\sum_{k=1}^{\infty} I_k, b_\omega)=0$, d'où $(b_\omega)_{P^{(l)}} \subset (\overline{\sum_{k=1}^{\infty} I_k})_{P^{(l)}}$. Or, comme, selon (33), $(b_\omega)_{P^{(l)}} \subset (H_\omega)_P$ et selon (12), $J_{P^{(l)}} = (H_\omega)_{P^{(l)}} + \sum_{k=1}^{\infty}(I_k)_{P^{(l)}}$, nous concluons de (32) que

$$(34) \qquad J_{P^{(l)}} \text{ est connexe.}$$

Ainsi $P^{(l)}_{P^{(l)}} \doteq J_{P^{(l)}} + M^{(l)}_{P^{(l)}}$ *a au plus deux composantes.*

Il suffit maintenant de montrer que la distance entre $J_{P^{(i)}}$ et $M^{(i)}_{P^{(i)}}$ est positive; or en formule on a exactement

(35) $$\varrho_{P^{(i)}}(M^{(i)}, J) \geqslant 2,$$

car tout sous-continu de $P^{(i)}$ unissant $M^{(i)}$ à J contient un terme de la somme $\overline{M^{(i)}}\cdot J = \sum_{k=1}^{\infty} E_k + E_\omega + N$ (voir (23)) dont chaque élément est, selon les formules (13), (15) et (18), de diamètre égal à 2. Par conséquent, selon (31) et (34), $M^{(i)}_{P^{(i)}}$ *et* $J_{P^{(i)}}$ *sont les seules composantes de* $P^{(i)}_{P^{(i)}}$.

VIII. *Pour tout*

(36) $$J_t = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} J_i^{(n_k)} + p_t$$

l'ensemble $(J_t)_{P_t}$ *est connexe.*

En effet, la somme $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} (J_i^{(n_k)}) = (\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} J_i^{(n_k)})_{P_t}$ est connexe, puisque chaque terme en est connexe selon VII et possède par définition des points communs avec le terme consécutif. Il reste à montrer que $(p_t)_{P_t} \subset \overline{(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} J_i^{(n_k)})_{P_t}}$.

Or, p_t étant d'après (27) et (28) le point de convexité locale du continu P_t, on a $\varrho_{P_t}(p_t, \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} J_i^{(n_k)}) = 0$, de sorte que $(p_t)_{P_t}$ est le point d'accumulation de $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} (J_i^{(n_k)})_{P_t}$.

IX. *Les seules composantes de* $(P_t)_{P_t}$ *sont* $(J_t)_{P_t}$ *et* $(M_i^{(n_k)})_{P_t}$ *où* $k=1,2,\dots$ *et* $i=1,2,\dots,2^{n_k}$.

En vertu de VIII et comme $(P_t)_{P_t} = (J_t)_{P_t} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} (M_i^{(n_k)})_{P_t}$ (voir (17), (25) et (28)), il suffit de montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et $i \leqslant 2^n$ $(M_i^{(n_k)})_{P_t}$ est une composante de $(P_t)_{P_t}$.

Or, $(M_i^{(n_k)})_{P_t}$ est connexe en vertu de VII. De plus $(M_i^{(n_k)})_{P_t}$ et $(J_t)_{P_t}$ sont séparés puisque selon (35), on a $\varrho_{P_t}(M_i^{(n_k)}, J_t) = \varrho_{P_t}(M_i^{(n_k)}, J_i^{(n_k)}) > 0$. Enfin, lorsque $k \neq l$ ou bien $i \neq j$ les ensembles $(M_i^{(n_k)})_{P_t}$ et $(M_j^{(n_l)})_{P_t}$ sont selon (29) séparés.

X. *Le point p_t est le (seul) point d'accumulation des composantes de $(P_t)_{P_t}$.*

On a, en effet, d'après (17) et (25): $\delta(\sum_{i=1}^{2^{n_k}} M_i^{(n_k)}) \leqslant \delta(P_{n_k})$ et les formules (27) et (28) entraînent que $\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{2^{n_k}} M_i^{(n_k)} = p_t$.

XI. *Pour tout $k=1,2,\dots$ l'ensemble I_k est une L-composante de $P^{(i)}$.*

En effet, I_k étant d'après (11), un semicontinu „arcwise connected", il suffit en vertu de (12) et de (35) de prouver qu'il n'existe dans J aucun arc simple L unissant un point x de I_k à un point de $\overline{I_k}(J - I_k) \subset H_{k+1}$ (voir (7)—(12)).

Supposons, par impossible qu'il en existe un et soit $\overline{xy}$ son arc partiel, où y désigne le premier point de L situé sur H_{k+1}. Or, I_k étant d'après (11) somme des „sinusoïdes" $A_{k,s}$, A_k, B_k et $C_{k,s}$ dont les segments de condensation appartiennent à H_{k+1}, y est soit situé sur l'un de ces segments, soit est leur point d'accumulation. Nous pouvons supposer, en outre, que le diamètre de $\overline{xy}$ est assez petit pour que $\overline{xy} - y$ soit compris tout entier dans une de ces „sinusoïdes" (d'après (9)—(11) il suffit de poser $\delta(L) \leqslant \frac{5}{2^{k+2}} = \varrho(H_{k+1}, H_k + \sum_{s=1}^{\infty}(F^{(1)}_{k,s} + F^{(2)}_{k,s}))$. Or, c'est impossible, puisque la fermeture d'une sinusoïde ne contient aucun arc simple qui l'unit à son continu de condensation.

XII. *Tout arc simple de la courbe $M_i^{(n_k)}$ ($n_k \geqslant 1$, $i = 1,2,3,\dots,2^{n_k}$) de longueur $\geqslant 1$ possède le diamètre surpassant un nombre positif $a_{n_k} \geqslant \frac{1}{2^{n_k+k}}$.*

En effet, la courbe $M^{(n_k)}$ est selon (13) et (16) somme des segments (à savoir des K_n et de ceux qui forment les courbes $L_n^{(n)}$ et D_n) dont la longueur dépasse par définition le nombre 2. La borne inférieure des longueurs des segments formant la courbe $M_i^{(n_k)}$ ne dépend que de n_k et dépasse, par définition de $M_i^{(n_k)}$ à l'aide de $M^{(n_k)}$, le nombre $\frac{1}{2^{n_k+k-1}}$ (voir (30)). Tout arc simple A de $M_i^{(n_k)}$ de longueur $\geqslant 1$ qui n'est pas contenu dans un segment de $M_i^{(n_k)}$ (c. à d.

lorsque $\lambda(A) \neq \delta(A) < 1$) en contient nécessairement au moins une moitié et on a, par conséquent $\delta(A) \geqslant \frac{1}{2^{n_k+1}}$.

XIII. *Il n'existe aucune transformation continue f de $\overline{M}_i^{(n_p)}$ en un sous-ensemble de $\overline{M}_j^{(m_q)}$ où $n_p > m_q$ et $1 \leqslant i \leqslant 2^{n_p}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{m_q}$ telle que l'on ait*

$$f(D_{i,s}^{(n_p)}) \subset D_{j,s+r-1}^{(m_q)} \quad \text{où} \quad s = 1, 2, \ldots \tag{37}$$

pour un $r > 0$.

En effet, supposons la relation (37) vérifiée. Soit $R_{i,s}^{(n_p)}$ l'arc irréductible de la courbe $M_i^{(n_p)}$ qui unit les courbes $D_{i,s}^{(n_p)}$ et $D_{i,s+1}^{(n_p)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$, c. à d. l'arc

$$R_{i,s}^{(n_p)} = K_{i,s}^{(n_p)} + L_{i,s}^{(n_p)} + K_{i,s+1}^{(n_p)}. \tag{38}$$

D'après $f(\overline{M}_i^{(n_p)}) \subset \overline{M}_j^{(m_q)}$ et (37), $f(R_{i,s}^{(n_p)})$ contient l'arc simple unissant $D_{j,s+r-1}^{(m_q)}$ à $D_{j,s+r}^{(m_q)}$, donc

$$R_{j,s+r-1}^{(m_q)} \subset f(R_{i,s}^{(n_p)}). \tag{39}$$

D'après (38) on a $\lambda(R_{i,s}^{(n_p)}) = \lambda(K_{i,s}) + \lambda(L_{i,s}^{(n_p)}) + \lambda(K_{i,s+1})$, ces trois arcs n'empiétant pas l'un sur l'autre. Par conséquent, en vertu de (30) on a

$$\left\{\begin{aligned} \lambda(R_{i,s}^{(n_p)}) &= 2\frac{1}{2^{n_p+p}} + \lambda_{n_p,s}\,\mathrm{E}\,(s^{\frac{2}{n_p}}), \\ \lambda(R_{j,s+r-1}^{(m_q)}) &= 2\,\frac{1}{2^{m_q+q}} + \lambda_{m_q,s+r-1}\,\mathrm{E}\,[(s+r-1)^{\frac{2}{m_q}}]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Comme $\lambda_{m_q,s+r-1} > \frac{1}{2^{m_q+q-2}}$ (voir (30)), on a donc pour

$$s \geqslant n = 2^{(m_q+q-2)\frac{m_q}{2}} + 1 > \left(\frac{1}{\lambda_{m_q,s+r-1}}\right)^{\frac{m_q}{2}} + 1$$

l'inégalité (où j'omets les indices i et j, comme fixés):

$$\lambda(R_{s+r-1}^{(m_q)}) \geqslant 1. \tag{41}$$

Les formules (39) et (41) montrent que les conditions du lemme VI sont réalisées pour $C = R_s^{(n_p)}$ où $s \geqslant n$. En appliquant ce lemme pour tout $s = n$, $n+1$, $n+2, \ldots$, on conclut donc que dans chacun des arcs $R_s^{(n_p)}$ il existe un arc R_s de longueur $l_s = \frac{\lambda(R_s^{(n_p)})}{\mathrm{E}\{\lambda[f(R_s^{(n_p)})]\}}$ tel que $\lambda(f(R_s)) \geqslant 1$. En vertu de XII on a donc

$$\delta(f(R_s)) > \alpha_{n_p} > 0 \quad \textit{pour} \quad s > n. \tag{42}$$

Les formules (39) et (40) donnent

$$l_s = \frac{\lambda(R_s^{(n_p)})}{\mathrm{E}\{\lambda[f(R_s^{(n_p)})]\}} \leqslant \frac{\lambda(R_s^{(n_p)})}{\mathrm{E}\,(\lambda(R_{s+r-1}^{(m_q)}))} \leqslant \frac{\frac{1}{2^{n_p+p-1}} + \lambda_{n_p,s}\,\mathrm{E}\,(s^{\frac{2}{n_p}})}{\lambda_{m_q,s+r-1}\,\mathrm{E}\,(s^{\frac{2}{m_q}}) - 1},$$

d'où, comme $n_p > m_q$

$$\lim_{s=\infty} \delta(R_s) = 0. \tag{43}$$

Les formules (42) et (43) entraînent la discontinuité de la fonction $f(x)$ dans $\overline{M}_i^{(n_p)}$.

XIV. *Si l'on a pour une fonction f définie sur P_x*

$$f(P_x) = P_y \tag{44}$$

et

$$f(p_x) \neq p_y, \tag{45}$$

la fonction f n'est pas continue.

En effet, dans le cas contraire il existerait selon (45), par suite de la continuité de f, un ensemble U ouvert dans P_x et un ensemble V ouvert dans P_y tel que $p_x \in U$, $p_y \in V$ et que $f(U) \cdot V = 0$, Il en résulte selon (44) que

$$V \subset f(P_x) - f(U) \subset f(P_x - U). \tag{46}$$

En vertu de X,

$$V \textit{ contient une infinité de composantes de } (P_y)_{P_y}. \tag{47}$$

Soient d'autre part $(C_1)_{P_x}$, $(C_2)_{P_x}, \ldots$, $(C_u)_{P_x}$ les composantes de $(P_x)_{P_x}$ qui ont des points communs avec $(P_x - U)_{P_x}$. Il n'y en a qu'un nombre fini, $p_x \in U$ étant d'après X le seul point d'accumulation des composantes de $(P_x)_{P_x}$.

Comme $P_x - U \subset \sum_{i=1}^{u} C_i$, on a $f(P_x - U) \subset \sum_{i=1}^{u} f(C_i)$ et d'après (46):

$$V \subset \sum_{i=1}^{u} f(C_i). \tag{48}$$

Mais chacune des composantes de $[P_y]_{P_y}$ contenues dans V possède, en vertu de (48), un point commun avec un $(f(C_i))_{P_y}$ où $1 \leqslant i \leqslant u$ et en vertu de II (en posant $M = P_x$, $C = C_i$) elle la contient entièrement. La somme $\sum\limits_{i=1}^{u} f(C_i)$ serait donc contenue dans tout au plus u composantes de $(P_y)_{P_y}$ situées dans V. Il en résulte en vertu de (47) que $X - \sum\limits_{i=1}^{u} f(C_i) \neq 0$, contrairement à (48).

XV. *Si l'on a pour une courbe partielle $M^{(m)}$ de P_y*

$$f(J_x) \subset M^{(m)}, \tag{49}$$

la formule (44) *entraîne la discontinuité de f.*

En effet, supposons la formule (49) vérifiée pour un m naturel. D'après (36) on a $p_x \subset J_x$ et, en outre, p_y *non*-$\subset M^{(m)}$, puisque, selon IX, $M^{(m)} \cdot J_y = 0$. L'inclusion (49) entraîne donc (45) et d'après XIV f n'est pas continue.

XVI. *La fonction f étant continue et l'égalité* (44) *étant vérifiée pour un $x \neq y$, il existe une telle paire d'indices $n_p > m_q$ que l'on a*

$$f(M^{(n_p)}) \subset M^{(m_q)}. \tag{50}$$

Soient, en effet $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$ les suites des nombres naturels assignées respectivement à x et y par la convention de 4, p. 126 et m_q le premier terme de la suite $m_1, m_2, \ldots$ ne figurant pas dans la suite $n_1, n_2, \ldots$ Supposons que la fonction f soit continue. En vertu de (44) et XIV on a donc $f(p_x) = p_y$. Par suite de la continuité de f cette égalité entraîne pour tout ensemble V ouvert dans P_y et tel que $p_y \subset V$ l'existence d'un ensemble U ouvert dans P_x tel que $p_x \subset U$ et que

$$f(U) = V. \tag{51}$$

En effet, il suffit de poser $U = f^{-1}(V)$. D'après (28)

(52) *U contient tout P_{n_i} pour i suffisamment grand.*

Prenons V assez petit pour que $P_{m_q} \cdot V = 0$. On aura alors, en vertu de (28), (44) et (51), $P_{m_q} \subset f(P_x) - f(U) \subset f(P_x - U)$; selon (52) P_{m_q} est donc contenu dans une somme finie d'images d'ensembles P_{n_i}; en formule

$$P_{m_q} \subset \sum_{i=1}^{r} f(P_{n_i}). \tag{53}$$

Or je dis que cette inclusion implique pour toute courbe $M_s^{(m_q)}$ de la somme $\sum\limits_{i=1}^{2^{m_q}} M_i^{(m_q)} \subset P_{m_q}$ la formule

$$M_s^{(m_p)} \subset \sum_{i=1}^{r} \sum_{u=1}^{2^{n_i}} f(M_u^{(n_i)}). \tag{54}$$

En effet, comme d'après (17) et (25), $P_{n_i} = \sum\limits_{u=1}^{2^{n_i}} \{J_u^{(n_i)} + M_u^{(n_i)}\}$, l'inclusion (53) donnerait dans le cas contraire $M_s^{(m_q)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{u=1}^{2^{n_i}} f(J_u^{(n_i)}) \neq 0$, donc selon (36), $M_s^{(m_q)} \cdot f(J_x) = M_s^{(m_q)} \cdot f(\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{u=1}^{2^n} J_u^{(n_i)} + p_x) \neq 0$ et en vertu de VIII, VII et II (en posant $M = P_x$, $C_M = (J_x)_{P_x}$ et $(I)_{f(M)} = (M_s^{(m_q)})_{P_y}$) la formule (49).

Or, les formules (44) et (48) entraînent d'après XV la discontinuité de f.

La formule (54) étant ainsi établie par tout $s = 1, 2, 3, \ldots, 2^{m_q}$, remarquons que, en vertu de (25),

(55) *la somme $\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{u=1}^{2^{n_i}} f(M_u^{(n_i)})$ ne contient que tout au plus $2^{m_q} - 1$ ensembles $f(M_u^{(p)})$ tels que $p < m_q$,*

puisque $\sum\limits_{p=0}^{m_q - 1} 2^p = 2^{m_q} - 1$. D'autre part, on a d'après IX et II (en posant $M = P_x$, $C = M_u^{(n_i)}$ et $I = M_s^{(m_q)}$) que

$$f(M_u^{(n_i)}) \cdot M_s^{(m_q)} \neq 0 \quad \textit{entraîne} \quad f(M_u^{(n_i)}) \subset M_s^{(m_q)}. \tag{56}$$

Les ensembles $M_1^{(m_q)}, M_2^{(m_q)}, \ldots, M_{2^{m_q}}^{(m_q)}$ étant selon (29) disjoints, la formule (54) entraîne, en vertu de (55) et (56), l'existence d'un tel $M^{(m_q)} \subset \sum\limits_{s=1}^{2^{m_q}} M_s^{(m_q)}$ et d'un tel $n_p > m_q$ que, $M^{(n_p)}$ étant une courbe de la somme $\sum\limits_{k=1}^{2^{n_p}} M_k^{(n_p)}$, on a la formule (50), c. q. f. d.

XVII. *Dans les mêmes hypothèses on a*

$$f(J^{(n_p)}) \subset J_y. \tag{57}$$

En effet, comme (selon (23)): $J^{(n_p)} \cdot \overline{M}^{(n_p)} = M + E_\omega + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \neq 0$, on a d'après (44) et XVI

$$\begin{aligned} f(J^{(n_p)}) \cdot f(\overline{M}^{(n_p)}) \subset f(J^{(n_p)}) \cdot \overline{M}^{(m_q)} \doteq \\ = f(J^{(n_p)}) \cdot \{M^{(m_q)} + (\overline{M}^{(m_q)} - M^{(m_q)})\} \neq 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Remarquons que l'inégalité $f(J^{(n_p)}) \cdot M^{(m_q)} \subset f(J_x) \cdot M^{(m_q)} \neq 0$ implique d'après IX et II (en posant $M = P_x$, $C = J_x$ et $I = M^{(m_q)}$) la formule (49) (en y posant $m = m_q$). Cette formule et (44) entraînent d'après XV la discontinuité de f, contrairement a l'hypothèse. On a donc $f(J^{(n_p)}) \cdot M^{(m_q)} = 0$ et (58) donne d'après (17): $f(J^{(n_p)})\{\overline{M}^{(m_q)} - M^{(m_q)}\} \subset \subset f(J^{(n_p)})\{F^{(m_q)} - M^{(m_q)}\} \subset f(J^{(n_p)} \cdot J^{(m_q)}) \neq 0$ et, à plus forte raison $f(J^{(n_p)}) \cdot J_y \neq 0$, ce qui implique la formule (57) en vertu de VII, IX et II, en y posant $M = P_x$, $C = J^{(n_p)}$ et $I = J_y$.

6. Démonstration de la propriété fondamentale de la famille $\mathfrak{P}$. *Etant donnés deux continus P_x et P_y ($x \neq y$) de la famille $\mathfrak{P}$, aucun d'eux n'est l'image continue de l'autre.*

Supposons par contre qu'il existe une fonction continue f définie sur P_x et telle que l'inégalité (44) soit vérifiée. Soient $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$ les suites assignées respectivement à x et y par la convention de **4**, p. 126.

D'après XVI et XVII on a donc les formules (50) et (57) qui donnent par multiplication $f(\overline{J}^{(n_p)}) \cdot f(M^{(n_p)}) \subset \overline{J}_y \cdot M^{(m_q)}$, donc, en vertu de (22) et (36),

$$f(\overline{J}^{(n_p)} \cdot M^{(n_p)}) = f\Big(\sum_{s=1}^{\infty} D_s^{(n_p)}\Big) \subset \overline{J}_y \cdot M^{(m_q)} \subset M^{(m_q)} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{m_k}} J_l^{(m_k)} + p_y\Big). \tag{59}$$

Or, la courbe $M^{(m_q)}$ étant par définition une partie de $P_j^{(m_q)}$, donc (voir p. 126) inscrite dans l'i n t é r i e u r de la bande $Q_{q,j}$ (cf. la ligne discontinue sur la figure p. 128, donnée par les formules (13)—(16)), elle est disjointe de tout $J_i^{(m_k)} \subset Q_{k,i}$ où $k \neq q$ ou $i \neq j$ et de p_y, d'où, en posant $J^{(m_q)} = J_j^{(m_q)}$, on a donc $\overline{J}_y \cdot M^{(m_q)} \subset \overline{J}^{(m_q)} \cdot M^{(m_q)}$ et d'après (22), la formule (59) donne: $f(\sum_{s=1}^{\infty} D_s^{(n_p)}) \subset \sum_{s=1}^{\infty} D_s^{(m_q)}$.

Les „sinusoïdes ouvertes" $D_s^{(n_p)}$ étant „arcwise connected" et comme $D_u^{(m_q)} \cdot D_v^{(m_q)} = 0$, lorsque $u \neq v$, on en déduit d'après III qu'il existe un indice $r \geqslant 1$ tel que

$$f(D_1^{(n_p)}) \subset D_r^{(m_q)}, \tag{60}$$

d'où $f(\overline{D}_1^{(n_p)}) \subset \overline{D}_r^{(m_q)}$, ce qui entraîne selon (57), (20) et l'inclusion $\overline{M}^{(m_q)} \cdot J_y \subset \overline{M}^{(m_q)} \cdot J^{(m_q)}$ que $f(\overline{D}_1^{(n_p)} \cdot J^{(n_p)}) = f(E_1^{(n_p)}) \subset \overline{D}_r^{(m_q)} \cdot J_y \subset E_r^{(m_q)}$. Or, comme d'après (19): $E_1^{(n_p)} \subset I_2^{(n_p)}$ et $E_r^{(m_q)} \subset I_{r+1}^{(m_q)}$, on en conclut que $f(I_2^{(n_p)}) \cdot I_{r+1}^{(m_q)} \neq 0$. L'ensemble $I_2^{(n_p)}$, resp. $I_{r+1}^{(m_q)}$, étant d'après XI une L-composante de P_x, resp. de $P_y = f(P_x)$, on en obtient en vertu de IV (en y posant $M = P_x$, $C = I_2^{(n_p)}$ et $I = I_{r+1}^{(m_q)}$) la formule $f(I_2^{(n_p)}) \subset I_{r+1}^{(m_q)}$, d'où

$$f(\overline{I}_2^{(n_p)}) \subset \overline{I}_{r+1}^{(m_q)}. \tag{61}$$

Les formules (61) et (50) donnent par multiplication $f(M^{(n_p)} \cdot \overline{I}_2^{(n_p)}) \subset \subset \overline{I}_{r+1}^{(m_q)} \cdot M^{(m_q)}$, d'où selon (21)

$$f(D_2^{(n_p)}) \subset D_{r+1}^{(m_q)}. \tag{62}$$

Ainsi l'inclusion (60) implique (62). On en déduit par l'induction la formule $f(D_s^{(n_p)}) \subset D_{s+r-1}^{(m_q)}$, $s = 1, 2, \ldots$, c'est à dire la formule (37), qui est impossible en vertu du lemme XIII, les hypothèses de ce lemme étant réalisées par suite des égalités (44) et (50) dont nous avons supposé la première et déduit la seconde de XVI. La fonction $f(x)$ ne peut donc être continue, c. q. f. d.

Varsovie, Janvier 1931.