# Sur les suites de fonctions continues.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Sierpiński a construit une suite de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$, telle que toute suite partielle $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ converge dans un ensemble de points au plus dénombrable. La construction implique l'hypothèse du continu et les fonctions $\varphi_n(x)$ ne sont pas mésurables [1].

Le problème analogue dans le cas des fonctions continues, resp. mésurables (le second cas se ramenant aisément au premier en vertu du théorème de Lusin) comporte une solution différente. En effet:

**Théorème.** *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions continues et uniformément bornées dans un ensemble parfait $P$. Il existe une suite $\{n_k\}$ et un ensemble parfait $Q \subset P$ tel que les fonctions $f_{n_k}(x)$ sont également continues dans $Q$.*

**Lemme 1.** $A$ étant parfait soit $A = B_n + C_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $B_n$ et $C_n$ étant fermés; il existe une suite $\{n_k\}$ telle que l'un au moins des ensembles $\prod_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$, $\prod_{k=1}^{\infty} C_{n_k}$ est non dénombrable.

Démonstration. Appellons portion de $A$ la fermeture d'un ensemble ouvert dans $A$; une portion est un ensemble parfait. Deux cas sont possibles:

a) il existe une suite $\{n_k\}$ et une portion $G$ de $A$, telle que $G \subset C_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ alors $G \subset \prod_{k=1}^{\infty} C_{n_k}$ et le lemme est démontré.

[1]) Ce volume p. 110.



b) à toute partion $G$ de $A$ correspond un entier $n(G)$ tel que:

$$G - C_n \neq 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant n(G) \tag{1}$$

$C_n$ étant fermé on peut faire correspondre à tout $n \geqslant n(G)$ deux portions de $A$: $H_n^{(0)}(G)$ et $H_n^{(1)}(G)$ telles que:

$$H_n^{(0)}(G) + H_n^{(1)}(G) \subset B_n \times G \tag{2}$$

$$H_n^{(0)}(G) \times H_n^{(1)}(G) = 0. \tag{3}$$

Faisons correspondre à tout entier $k$ un entier $n_k$ et à toute suite dyadique: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $\alpha_m = 0, 1$; $m = 1, 2, \ldots, k$ une portion $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ de manière suivante:

I) $n_1 = n(A)$; $G(\alpha) = H_{n_1}^{(\alpha)}(A)$ $\quad \alpha = 0, 1$.

II) supposons fixé $n_k$ et les $2^k$ ensembles $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$; $n_{k+1}$ et le maximum des $2^k+1$ nombres: $n_k+1$, $n[G(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)]$ et:

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha) = H_{n_k}^{(\alpha)}[G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)] \quad \alpha = 0, 1 \tag{4}$$

D'après (2):

$$K = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\right) \subset \prod_{k=1}^{\infty} B_{n_k}. \tag{5}$$

D'autre part $K$ est parfait [1]) ce qui démontre le lemme.

$f(x)$ étant continue dans un ensemble fermé $A$ désignons par $M(f, A)$, $m(f, A)$ et $\omega(f, A)$ respectivement le maximum, le minimum et l'oscillation de $f(x)$ dans $A$.

**Lemme 2.** Les fonctions $\{f_n(x)\}$ étant continues dans l'ensemble parfait $A$ et satisfaisant à l'inégalité $\omega(f_n, A) \leqslant \lambda$, il existe une suite $\{n_k\}$ et un ensemble parfait $A^* \subset A$ tel que $\omega(f_{n_k}, A^*) \leqq \frac{\lambda}{2}$.

Démonstration. Soit $B_n$ l'ensemble des $x$ tels que $m(f_n, A) \leqq$ $\leqq f_n(x) \leqq \dfrac{M(f_n, A) + m(f_n, A)}{2}$ et $C_n$ l'ensemble des $x$ tels que $\dfrac{m(f_n, A) + M(f_n, A)}{2} \leqq f_n(x) \leqq M(f_n, A)$. On a:

$$B_n + C_n = A; \quad B_n \text{ et } C_n \text{ fermés} \tag{6}$$

$$\omega(f_n, B_n) \leqq \frac{\lambda}{2} \geqq \omega(f_n, C_n). \tag{7}$$

[1]) v. p. e. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 321 ss. (1914).

D'après le lemme 1, il existe une suite $\{n_k\}$ et un ensemble parfait $A^*$ tel que l'on a l'une au moins des relations: $A^* \subset \prod_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$ $A^* \subset \prod_{k=1}^{\infty} C_{n_k}$. La suite $\{n_k\}$ et l'ensemble $A^*$ repondent évidemment à la question.

**Lemme 3.** Soit pour $j=1,2,\dots,m$, $A_j$ un ensemble parfait. Les fonctions $\{f_n(x)\}$ étant continues dans $\sum_{j=1}^{m} A_j$ et telles que: $\omega(f_n, A_j) \leqq \lambda$, il existe une suite $\{n_k\}$ et $m$ ensembles parfaits $A_j^* \subset A_j$ tels que: $\omega(f_{n_k}, A_j^*) \leqslant \frac{\lambda}{2}$.

Passons maintenant à la démonstration de nôtre théorème.

Faisons correspondre à tout ensemble parfait $U \subset P$ deux ensembles parfaits: $S_0(U)$ et $S_1(U)$ tels que $S_0(U)+S_1(U) \subset U$ et $S_0(U) \times S_1(U) = 0$ ce qui est évidemmeut possible. Les fonctions $\{f_n(x)\}$ étant uniformément bornées dans $P$ il existe un nombre $\beta > 0$ tel que:

$$\omega(f_n, P) \leqq \beta. \tag{8}$$

Détérminons pour tout entier $q$ une suite d'entiers croissants:

$$\{m(j,q)\} \quad j=1,2,\dots \tag{9}$$

et pour toute suite dyadique $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ un ensemble parfait $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ tel que:

$$\omega(f_{m(j,q)}, P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)) \leqq \frac{1}{2^{q-1}}\beta \quad j=1,2,\dots \tag{10}$$

et cela de manière suivante:

I) $m(j,1)=j$; $\quad P(\alpha)=S_\alpha(P) \quad \alpha=0,1$.

II) Supposons que l'on a détérminé la suite $\{m(j,q)\}$ et les $2^q$ ensembles $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ et que l'on a l'inégalité (10). D'après le lemme 3, il existe une suite d'entiers croissants $\{m(j,q+1)\}$ tirée de la suite $\{m(j,q)\}$ et $2^q$ ensembles parfaits: $Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \subset P(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$ tels que:

$$\omega(f_{m(j,q+1)}, Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)) \leqq \frac{1}{2^q}\beta. \tag{11}$$

Posons: $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \alpha) = S_\alpha(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_q)) \quad \alpha = 0, 1$.



On voit que la relation (10) reste vraie si l'on y remplace $q$ par $q+1$. On a de plus les relations:

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}) \subset P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \tag{12}$$

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \times P(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_q') = 0 \text{ pour } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \neq (\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_q') \tag{13}$$

donc l'ensemble:

$$Q = \prod_{q=1}^{\infty} \left( \sum P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \right) \tag{14}$$

est parfait. Posons pour $k=1,2,\dots$ $n_k = m(k,k)$. La suite $\{m(j,q+1)\}$ étant contenue dans $\{m(j,q)\}$ on a $n_{k+1} > n_k$. Soit maintenant $\eta > 0$. Détérminons $q_1$ tel que $2^{q_1} > \frac{2\beta}{\eta}$. Pour $k \geqq q_1$, $n_k$ est contenu dans la suite $\{m(j,q)\}$ donc:

$$\omega(f_{n_k}, P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q_1})) \leqq \frac{1}{2^{q_1-1}}\beta < \eta \quad k \geqq q_1. \tag{15}$$

Les $2^{q_1}$ ensembles $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q_1})$ étant d'après (13) sans points communs deux à deux, désignons par $\delta$ le minimum de leur distances mutuelles. Pour $|x_1 - x_2| < \delta$; $x_1 \in \Sigma P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q_1})$; $x_2 \in \Sigma P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q_1})$, $k \geqq q_1$ on aura d'après (15):

$$|f_{n_k}(x_1) - f_{n_k}(x_2)| < \eta \tag{16}$$

donc à fortiori, on aura (16) pour $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q$, $|x_1 - x_2| < \delta$, $k \geqq q_1$, ce qui démontre l'égale continuité des fonctions $\{f_{n_k}(x)\}$ dans $Q$. Le théorème est ainsi démontré. Il en résulte le

**Corollaire.** *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions continues et uniformement bornées dans un ensemble parfait $P$. On peut tirer de $\{f_n(x)\}$ une suite $\{f_{m_k}(x)\}$ uniformement convergente dans un ensemble parfait $P^* \subset P$.*

Warszawa, 15/IX 1931.