Remarque sur les suites infinies de fonctions.

(Solution d'un problème de M. S. Saks).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

$f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ étant une suite infinie donnée de fonctions d'une variable réelle et D un ensemble dénombrable donné quelconque de nombres réels, on démontre sans peine qu'il existe toujours une suite infinie croissante d'indices $n_1<n_2<n_3<\ldots$, telle que pour tout nombre x de D existe la limite (finie ou infinie) $\lim\limits_{k=\infty} f_{n_k}(x)$.

M. S. Saks m'a posé le problème *s'il existe toujours pour une suite infinie donnée $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ de fonctions d'une variable réelle une suite infinie croissante d'indices $n_1<n_2<n_3<\ldots$ et un ensemble non dénombrable N de nombres réels, tels qu'il existe pour tout nombre x de l'ensemble N la limite (finie ou infinte)* $\lim\limits_{k=\infty} f_{n_k}(x)$ [1].

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, je prouverai que la réponse y est *négative*.

Lemme. $(m_1^k, m_2^k, m_3^k,\ldots)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ étant une suite infinie de suites infinies croissantes de nombres naturels, il existe toujours une suite infinie $u_1, u_2, u_3,\ldots$, formée des nombres 0 et 1, telle que pour tout indice $k=1,2,3,\ldots$, la suite infinie $u_{m_1^k}, u_{m_2^k}, u_{m_3^k},\ldots$ contient une infinité de termes $=0$ est une infinité de termes $=1$.

Démonstration. Nous définirons d'abord par l'induction une suite infinie croissante d'indices $s_1, s_2, s_3,\ldots$, comme il suit. Posons $s_1=m_1^1$. Soit maintenant n un indice donné >1 et supposons que nous avons déjà défini les nombres $s_1, s_2,\ldots, s_{n-1}$. Comme on sait, il existe deux nombres naturels p et q, bien déterminés par n, tels que $n=2^{p-1}(2q-1)$.

[1]) D'après M. Mazurkiewicz (voir ce volume, p. 114) il n'existe aucune suite infinie de fonctions *mesurables* $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ remplissant ces conditions.

Nous définirons s_n comme le plus petit terme de la suite $m_1^p, m_2^p, m_3^p,\ldots$ qui est plus grand que chacun des nombres $s_1, s_2,\ldots, s_{n-1}$.

La suite infinie $u_1, u_2, u_3,\ldots$ sera maintenant définie comme il suit. Si i est un terme de la suite $s_1, s_2, s_3,\ldots$, p. e. $i=s_n$ et si $n=2^{p-1}(2q-1)$, nous poserons $u_i=1$ si q est un nombre impair et $u_i=0$ si q est un nombre pair. Si $i\neq s_n$ pour $n=1,2,3,\ldots$, nous poserons $u_i=0$.

On voit sans peine que la suite infinie $u_1, u_2, u_3,\ldots$ repond aux conditions de notre lemme. En effet, soit k un nombre naturel donné. D'après la définition de la suite $s_1, s_2, s_3,\ldots$, les nombres

$$s_{2^{k-1}(4l-1)} \quad \text{et} \quad s_{2^{k-1}(4l-3)} \quad (l=1,2,3,\ldots)$$

sont termes de la suite infinie $m_1^k, m_2^k, m_3^k,\ldots$ croissant indéfiniment avec l et, d'après la définition de la suite $u_1, u_2, u_3,\ldots$, on a

$$u_{s_{2^{k-1}(4l-1)}}=0 \quad \text{et} \quad u_{s_{2^{k-1}(4l-1)}}=1 \quad \text{pour} \quad l=1,2,3,\ldots,$$

La suite infinie $u_{m_1^k}, u_{m_2^k}, u_{m_3^k},\ldots$ contient donc une infinité de termes $=0$ et une infinité de termes $=1$. Notre lemme est ainsi démontré.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3,\ldots, x_\omega, x_{\omega+1},\ldots, x_\alpha,\ldots, \quad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les nombres réels, et une suite transfinie du type Ω

$$(2) \qquad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,\ldots, \sigma_\omega, \sigma_{\omega+1},\ldots, \sigma_\alpha,\ldots, \quad (\alpha<\Omega)$$

$\sigma_\alpha=(s_1^\alpha, s_1^\alpha, s_3^\alpha,\ldots)$, formée de toutes les suites infinies croissantes de nombres naturels.

Nous définirons maintenant la suite infinie $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ de fonctions d'une variable réelle comme il suit.

Posons $f_n(x_k)=0$ pour k et n naturels.

Soit maintenant α un nombre ordinal transfini $<\Omega$.

D'après notre lemme, appliqué à l'infinité dénombrable de suites infinies $(s_1^\xi, s_2^\xi, s_3^\xi,\ldots)$, où $\xi<\alpha$, il existe une suite infinie $u_1^\alpha, u_2^\alpha, u_3^\alpha,\ldots$ formée des nombres 0 et 1, telle que pour tout nombre ordinal $\xi<\alpha$ la suite infinie $u_{s_1^\xi}^\alpha, u_{s_2^\xi}^\alpha, u_{s_3^\xi}^\alpha,\ldots$ contient une infinité de termes $=0$ et une infinité de termes $=1$. Nous poserons $f_n(x_\alpha)=u_n^\alpha$ pour $n=1,2,3,\ldots$

Les fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ sont ainsi définies pour tout nombre x de la suite (1), donc pour tout nombre x réel.

Soit maintenant $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ une suite infinie croissante d'indices donnée quelconque. D'après la propriété de la suite transfinie (2), il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, tel que $(n_1, n_2, n_3, \dots) = \sigma_\lambda$, donc

$$n_i = s_i^\lambda, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

Soit α un nombre ordinal transfini $> \lambda$. D'après (3) et la définition des nombres $f_n(x_\alpha)$, la suite infinie $f_{n_1}(x_\alpha), f_{n_2}(x_\alpha), f_{n_3}(x_\alpha), \dots$ coïncide avec la suite $u^{\alpha}_{s_1^\lambda}, u^{\alpha}_{s_2^\lambda}, u^{\alpha}_{s_3^\lambda}, \dots$, donc, d'après $\lambda < \alpha$, contient une infinité de termes $= 0$ et une infinité de termes $= 1$, et par-suite n'a pas de limite (finie ni infinie). La suite infinie $f_{n_1}(x_\alpha)$, $f_{n_2}(x_\alpha), f_{n_3}(x_\alpha), \dots$ ne peut donc avoir de limite (finie ou infinie) que, peut être, pour les nombres x_α, où $\alpha \leqslant \lambda$, donc pour les nombres réels dont l'ensemble est au plus dénombrable.

Notre assertion est ainsi demontrée.

Faisons encore la remarque suivante. *On peut définir effectivement une suite infinie $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ de fonctions d'une variable réelle telle qu'on a pour tout x réel*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} f_n(x) = 1, \tag{4}$$

mais qu'il n'existe aucune suite infinie croissante d'indices $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, telle que l'égalité

$$\lim_{k=\infty} f_{n_k}(x) = 1$$

soit vraie pour plus qu'un nombre réel x.

En effet, définissons la suite infinie $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ de fonctions comme il suit. Soit

$$r_1, \; r_2, \; r_3, \dots \tag{5}$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels différents.

Soit x un nombre réel, n un nombre naturel donnés. S'il existe un nombre naturel p, tel que

$$2^p r_n = \mathrm{E}\, 2^p x - 1 \tag{6}$$

(où $\mathrm{E}t$ désigne l'entier le plus grand $\leqslant t$), posons $f_n(x) = 1$, dans le cas contraire posons $f_n(x) = 0$.

x étant un nombre réel donné et p un nombre naturel donné, il existe dans la suite (5) (qui est formée de tous les nombres rationnels) un indice n tel qu'on a l'égalité (6), et aux nombres naturels p différents correspondent des indices n distincts, puisque on a toujours

$$\mathrm{E}\, 2^p x \leqslant \mathrm{E}\, 2^p x, \quad \text{d'où} \quad 2\,\mathrm{E}\, 2^p x \leqslant 2^{p+1} x,$$

ce qui donne, $2\,\mathrm{E}\, 2^p x$ étant un entier:

$$2\,\mathrm{E}\, 2^p x \leqslant \mathrm{E}\, 2^{p+1} x, \quad \text{d'où} \quad 2\,\mathrm{E}\, 2^p x - 2 < \mathrm{E}\, 2^{p+1} x - 1,$$

donc

$$\frac{\mathrm{E}\, 2^p x - 1}{2^p} < \frac{\mathrm{E}\, 2^{p+1} x - 1}{2^{p+1}}.$$

Il existe donc (pour tout x réel donné) une infinité d'indices n pour lesquels il existe un nombre naturel p (dépendant de x et de n) satisfaisant à l'égalité (6), et pour des tels indices n on a (d'après la définition des fonctions $f_n(x)$) $f_n(x) = 1$. Les fonctions $f_n(x)$ ne prenant que deux valeurs 0 et 1, on en déduit qu'on a pour tout x réel l'égalité (4).

Soit maintenant $n_1, n_2, n_3, \dots$ une suite infinie croissante donnée quelconque de nombres naturels et supposons qu'on a pour deux nombres réels x et $x' \neq x$

$$\lim_{k=\infty} f_{n_k}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty} f_{n_k}(x') = 1. \tag{7}$$

La fonction $f_n(x)$ ne prenant que deux valeurs: 0 et 1, il résulte de (7) l'existence d'un indice μ tel que

$$f_{n_k}(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n_k}(x') = 1 \quad \text{pour} \quad k > \mu.$$

D'après la définition des fonctions $f_n(x)$ il en résulte qu'il existe une infinité d'indices différents p_k $(k > \mu)$ tels que

$$2^{p_k} r_{n_k} = \mathrm{E}\, 2^{p_k} x - 1$$

et une infinité d'indices différents q_k $(k > \mu)$, tels que

$$2^{q_k} r_{n_k} = \mathrm{E}\, 2^{q_k} x' - 1,$$

d'où, pour $k > \mu$:

$$\frac{\mathrm{E}\, 2^{p_k} x - 1}{2^{p_k}} = \frac{\mathrm{E}\, 2^{q_k} x' - 1}{2^{q_k}},$$

ce qui donne, en limite pour $k = \infty$: $x = x'$, contrairement à l'hypothèse.

Les égalités (7) ne peuvent pas donc être vraies à la fois, si $x \neq x'$, et notre assertion est démontrée.