Sur les anneaux de fonctions.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Introduction. Par analogie avec les anneaux d'ensembles (*Ringe* de M. F. Hausdorff) j'appelle *anneau de fonctions* chaque famille Φ de fonctions réelles $f(x)$, définies pour les éléments x d'un ensemble X donné quelconque, jouissant de la propriété suivante: étant données deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ appartenant à la famille Φ, les fonctions $\max(\varphi(x), \psi(x))$ et $\min(\varphi(x), \psi(x))$ [1] appartiennent aussi à Φ.

Nous étudierons dans ce Mémoire plusieurs propriétés des anneaux de fonctions et nous établirons pour eux quelques théorèmes généraux, dont les théorèmes connus de MM. W. H. Young, H. Hahn et F. Hausdorff sur les fonctions de Baire ne sont que des cas particuliers.

1. Nous rappellerons d'abord quelques faits connus.

$u_2, u_2, \ldots, u_n$ étant une suite finie de nombres réels, on désigne par

$$\max(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{et} \quad \min(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

respectivement le plus grand et le plus petit des nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (le cas où il y a plusieurs nombres égaux au plus petit ou au plus grand n'étant pas exclu).

On voit sans peine que pour toute suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ de nombres réels:

$$(1) \qquad \max(u_1, u_2) \geqslant u_1 \geqslant \min(u_1, u_2), \ \max(u_1, u_2) \geqslant u_2 \geqslant \min(u_1, u_2),$$

$$(2) \qquad \max(u_1, u_2) = \max(u_2, u_1), \ \min(u_1, u_2) = \min(u_2, u_1),$$

[1]) Le sens de ces symboles sera précisé dans le § 1.

(3) $\max(-u_1, -u_2) = -\min(u_1, u_2), \quad \min(-u_1, -u_2) = -\max(u_1, u_2).$

$$(4)\quad \begin{cases} \max(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}|u_1 - u_2|, \\ \min(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{1}{2}|u_1 - u_2|. \end{cases}$$

De (4) résulte tout de suite que

$$(5)\quad \begin{cases} \text{si} \quad u_n \to u \quad \text{et} \quad v_n \to v, \quad \text{pour} \quad n \to \infty, \quad \text{on a} \\ \max(u_n, v_n) \to \max(u, v) \quad \text{et} \quad \min(u_n, v_n) \to \min(u, v). \end{cases}$$

On voit sans peine que

$$(6)\quad \begin{cases} \text{si} \quad u_1 \leqslant v_1 \quad \text{et} \quad u_2 \leqslant v_2, \quad \text{on a} \\ \max(u_1, u_2) \leqslant \max(v_1, v_2) \quad \text{et} \quad \min(u_1, u_2) \leqslant \min(v_1, v_2). \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \max(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = \max(\max(u_1, u_2, \ldots, u_n), u_{n+1}) \\ \min(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = \min(\min(u_1, u_2, \ldots, u_n), u_{n+1}) \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \max(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) \geqslant \max(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \min(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) \leqslant \min(u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{cases}$$

De (4) résulte tout de suite que si les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont continues, il en est de même des fonctions $\max(\varphi(x), \psi(x))$ et $\min(\varphi(x), \psi(x))$.

De (8) résulte que si $u_1, u_2, u_3, \ldots$ est une suite infinie de nombres réels, les suites

$$p_n = \max(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{et} \quad q_n = \min(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

sont monotones: la première non décroissante, la seconde non croissante, et parsuite, il existe des limites finies ou infinies

$$(9)\quad \begin{cases} \sup(u_1, u_2, u_3, \ldots) = \lim\limits_{n=\infty} \max(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ \text{et} \\ \inf(u_1, u_2, u_3, \ldots) = \lim\limits_{n=\infty} \min(u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{cases}$$

La première de ces limites (qui est finie ou $+\infty$ [1])) est, comme on voit sans peine, la borne supérieure, et la seconde (qui est finie ou $-\infty$ [2])) est la borne inférieure des nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots$ (Les

[1]) Si l'on admet des valeurs infinies pour les nombres u_n, cette limite peut être aussi $= -\infty$ (si $u_n = -\infty$ pour $n = 1, 2, \ldots$).

[2]) ou bien $+\infty$, si $u_n = +\infty$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

notations *sup* et *inf* ont été introduites par M. Pasch et F. Hausdorff [1])).

On a évidemment

$$(10)\quad \begin{cases} \sup(u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots) \geqslant \sup(u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots) \\ \inf(u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots) \leqslant \inf(u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots), \end{cases}$$

d'où résulte l'existence des limites (finies ou infinies)

$$\lim_{m=\infty} \sup(u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots) \quad \text{et} \quad \lim_{m=\infty} \inf(u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots),$$

dont la première coïncide avec $\lim\sup u_n = \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, u_n$ et la seconde avec $\lim\inf u_n = \underline{\lim\limits_{n=\infty}}\, u_n$. On a ainsi les formules

$$(11)\quad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, u_n = \lim\limits_{m=\infty} \lim\limits_{n=\infty} \max(u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+n}) \\ \underline{\lim\limits_{n=\infty}}\, u_n = \lim\limits_{m=\infty} \lim\limits_{n=\infty} \min(u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+n}). \end{cases}$$

2. Nous ne considérerons dans la suite que des fonctions $f(x)$ à valeurs réelles, définies pour les éléments x d'un ensemble fixe X formé d'objets quelconques. Les anneaux de fonctions (voir l'Introduction) dont nous parlerons ne seront formés que de telles fonctions. Voici deux propriétés générales des anneaux de fonctions, dont la démonstration n'offre pas de difficultés.

Théorème I. *Le produit d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque d'anneaux de fonctions est un anneau de fonctions.*

La somme de deux anneaux de fonctions peut ne pas être un anneau. Tel est p. e. le cas, où X est l'ensemble de tous les nombres réels, et où Φ_1 et Φ_2 désignent resp. les familles des fonctions réelles croissantes, resp. décroissantes définies dans X. Or, on voit sans peine qu'on a ce

Théorème II: *Si S est un ensemble d'anneaux de fonctions tel que pour deux anneaux de S il existe toujours dans S un anneau qui les contient, la somme de tous les anneaux formant S est un anneau.*

[1]) Voir *Mathematische Zeitschrift* 5 (1919), p. 293 et F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin u. Leipzig 1927, p. 9.

Donc, en particulier, la somme d'une série infinie d'anneaux non décroissants ($\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$, où $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \dots$) est un anneau.

Φ étant une famille donnée de fonctions $f(x)$ (définies dans un ensemble X), nous appellerons fonctions g, resp. h, resp. λ (relativement à Φ) les fonctions qui sont des limites des suites non décroissantes, resp. non croissantes, resp. quelconques, de fonctions de la famille Φ. Les fonctions qui sont à la fois g et h seront appellées fonctions k [1]).

Les limites des suites non décroissantes des fonctions h seront appellées fonctions hg. Il est clair ce qu'on doit comprendre par fonctions gh, $\lambda\lambda$, hgh etc.

La famille de toutes les fonctions g relativement à l'anneau Φ sera désignée par Φ_g. Pareillement on définit les familles Φ_h, Φ_k, Φ_λ, Φ_{gh}, Φ_{hg}, $\Phi_{\lambda\lambda}$ etc.

Il est clair que

$$\Phi \subset \Phi_g \subset \Phi_\lambda, \quad \Phi \subset \Phi_h \subset \Phi_\lambda, \quad \Phi_k = \Phi_g \Phi_h.$$

Théorème III: *Si Φ est un anneau de fonctions, les familles Φ_g, Φ_h, Φ_k et Φ_λ sont aussi des anneaux de fonctions.*

En effet, soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions de la famille Φ_g. Par définition de cette famille, il existe deux suites infinies $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) de fonctions de la famille Φ, telles que (dans l'ensemble X):

$$(12) \qquad \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x), \quad \psi_n(x) \leqslant \psi_{n+1}(x), \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$(13) \qquad \varphi(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x), \quad \psi(x) = \lim_{n=\infty} \psi_n(x).$$

D'après (12) et (6) on a, pour $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(14) \qquad \begin{cases} \max(\varphi_n(x), \psi_n(x)) \leqslant \max(\varphi_{n+1}(x), \psi_{n+1}(x)), \\ \min(\varphi_n(x), \psi_n(x)) \leqslant \min(\varphi_{n+1}(x), \psi_{n+1}(x)), \end{cases}$$

et, d'après (13) et (5):

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \max(\varphi_n(x), \psi_n(x)) = \max(\varphi(x), \psi(x)), \\ &\lim_{n=\infty} \min(\varphi_n(x), \psi_n(x)) = \min(\varphi(x), \psi(x)). \end{aligned}$$

[1]) Les notations g, h et k sont celles de M. Hausdorff (voir son livre cité, p. 236). Nos fonctions λ sont désignées par M. Hausdorff par f^*.

La famille Φ étant un anneau de fonctions, et les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) appartenant à Φ, il en est de même des fonctions $\max(\varphi_n(x), \psi_n(x))$ et $\min(\varphi_n(x), \psi_n(x))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), et les formules (14) et (15) prouvent que les fonctions $\max(\varphi(x), \psi(x))$, et $\min(\varphi(x), \psi(x))$ appartiennent à la famille Φ_g. La famille Φ_g est donc un anneau de fonctions. Pareillement on démontre que les familles Φ_h et Φ_λ sont des anneaux; pour la famille Φ_k cela résulte du théorème I et de la formule $\Phi_k = \Phi_h \Phi_g$ (qui est une conséquence immédiate de la définition des fonctions k).

Corollaire. *Si Φ est un anneau de fonctions, les familles Φ_{hg}, Φ_{gh}, $\Phi_{\lambda\lambda}$, Φ_{ghg}, Φ_{hgh}, $\Phi_{\lambda\lambda\lambda}$ etc. sont aussi des anneaux de fonctions.*

Exemples des anneaux de fonctions. La famille F de toutes les fonctions continues d'une variable réelle est un anneau (d'après (4)). Comme la famille de toutes les fonctions semi-continues supérieurement, resp. inférieurement, coïncide, d'après le théorème connu de Baire, avec la famille F_h resp. F_g, elle est un anneau (d'après le théorème III). La famille de toutes les fonctions de Baire de classe $\leqslant \alpha$ (où $0 \leqslant \alpha < \Omega$) est un anneau, pareillement la famille de toutes les fonctions de Baire (ce qui résulte sans peine de (4)). La famille de toutes les fonctions mesurables est un anneau (d'après (4)). On démontre aussi sans peine (en s'appuyant sur la formule (4)) que la famille de toutes les fonctions ponctuellement discontinues (d'une variable réelle) est un anneau.

Φ étant une famille quelconque de fonctions réelles $f(x)$ définies dans un ensemble X, il existe toujours le plus petit anneau contenant Φ. En effet, désignons par Φ_μ la famille de toutes les fonctions de la forme $\max(\varphi(x), \psi(x))$ ou $\min(\varphi(x), \psi(x))$, où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux fonctions quelconques de la familles Φ. On voit sans peine que la famille $\Phi + \Phi_\mu + \Phi_{\mu\mu} + \Phi_{\mu\mu\mu} + \dots$ est un anneau contenu dans tout anneau qui contient Φ.

Soit R un anneau d'ensembles, c'est-à-dire une famille d'ensembles qui contient toute somme et tout produit de deux ensembles qu'elle contient [1]). Soit X la somme de tous les ensembles de la famille R: tout ensemble E de R est donc un sous-ensemble de X. Désignons pour tout ensemble E de R par $f_E(x)$ la fonction définie dans X comme égale à 1 pour $x \in E$ et à 0 pour $x \in X - E$. On

[1]) Voir le livre cité de M. Hausdorff, p. 77.

voit sans peine que la famille de toutes les fonctions $f_E(x)$, où $E \epsilon R$, est un anneau. En utilisant le résultat de M. Tarski, d'après lequel il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ anneaux d'ensembles de nombres réels [1]), on en déduit sans peine qu'il existe aussi $2^{2^{\aleph_0}}$ anneaux de fonctions d'une variable réelle.

Cet exemple montre que *l'étude des anneaux d'ensembles se ramène à celle des anneaux de fonctions*. Or, nous montrerons qu'inversement, *l'étude des anneaux de fonctions peut être ramenée à celle des anneaux d'ensembles*.

En effet, soit Φ un anneau de fonctions définies pour les éléments d'un ensemble X. Désignons, pour chaque fonction donnée f de Φ, par $E(f)$ l'ensemble de tous les systèmes (x, y), où x est un élément de X et y un nombre réel, tel que $y \leqslant f(x)$. On voit sans peine que l'ensemble $E(f)$ détermine complètement la fonction f (la valeur $f(x)$ étant, pour tout élément donné x de X, le plus grand nombre réel y, tel que (x, y) appartient à $E(f)$).

Je dis que la famille R de tous les ensembles $E(f)$ correspondant aux fonctions f de Φ est un anneau d'ensembles. En effet, soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions de Φ et posons, pour tout élément x de X, $\varphi(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$, $\psi(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$. Φ étant un anneau de fonctions, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions de Φ, donc $E(\varphi)$ et $E(\psi)$ sont des ensembles de R. Or, on voit sans peine que $E(\varphi) = E(f_1) + E(f_2)$ et $E(\psi) = E(f_1)\, E(f_2)$ (ce qui résulte tout de suite de la définition des ensembles $E(f)$ et des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$). La somme et le produit de deux ensembles de R appartient donc à R, ce qui prouve que R est un anneau d'ensembles, c. q. f. d.

3. Théorème IV: *Si Φ est un anneau de fonctions, on a*

$$\Phi_{gg} = \Phi_g \quad \text{et} \quad \Phi_{hh} = \Phi_h \text{ [2]).} \tag{16}$$

Lemme. *Si u_n^m (m, n naturels) est une suite double de nombres réels, telle que*

$$u_n^m \leqslant u_{n+1}^m, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

et

$$\lim_{n=\infty} u_n^m \leqslant \lim_{n=\infty} u_n^{m+1}, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{18}$$

on a

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_n^m = \lim_{n=\infty} \max(u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^n). \tag{19}$$

[1]) *Fund. Math.* t. XVI.

[2]) Cf. S. Kempisty, *Fund. Math.* t. II, p. 71 et W. H. Young *Proc. Lond. Math. Soc.* 1911, v. 9, p. 18.

Démonstration. De (17) résulte l'existence des limites (finies ou infinies) $\lim\limits_{n=\infty} u_n^m$, et de (18) — celle de la limite $\lim\limits_{m=\infty} \lim\limits_{n=\infty} u_n^m$.

Posons

$$t_n = \max(u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^n), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{20}$$

de (20) et (17) résulte sans peine (d'après (6) et (8)):

$$t_n \leqslant t_{n+1}, \tag{21}$$

donc il existe la limite (finie ou infinie) $\lim\limits_{n=\infty} t_n$.

D'après (20) nous avons

$$t_n \geqslant u_n^m, \quad \text{pour} \quad n \geqslant m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où, en limite pour $n \to \infty$:

$$\lim_{n=\infty} t_n \geqslant \lim_{n=\infty} u_n^m \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne, en limite pour $m \to \infty$:

$$\lim_{n=\infty} t_n \geqslant \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_n^m. \tag{22}$$

D'autre part, d'après (17) et (18) nous avons

$$u_q^p \leqslant \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_n^m, \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots; \quad q = 1, 2, \ldots,$$

d'où, d'après (20):

$$t_q \leqslant \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_n^m, \quad \text{pour} \quad q = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne, en limite pour $q \to \infty$:

$$\lim_{q=\infty} t_q \leqslant \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_n^m. \tag{23}$$

Les inégalités (22) et (23) donnent, d'après (20), l'égalité (19) et notre lemme est démontré.

Soit maintenant Φ un anneau de fonctions définies dans l'ensemble X, et soit $f(x)$ une fonction de la famille Φ_{gg}. Il résulte de la définition de cette famille qu'il existe une suite double de fonctions $f_n^m(x)$ ($m = 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$) de la famille Φ, telle que (dans X)

$$f_n^m(x) \leqslant f_{n+1}^m(x), \tag{24}$$

$$\lim_{n=\infty} f_n^m(x) \leqslant \lim_{n=\infty} f_n^{m+1}(x)$$

et

$$f(x) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} f_n^m(x).$$

D'après notre lemme (pour $u_n^m = f_n^m(x)$, où x est un nombre donné quelconque de l'ensemble X), nous en concluons que

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \max\left(f_n^1(x), f_n^2(x), \dots, f_n^n(x)\right). \tag{25}$$

Or, de l'hypothèse que la famille Φ est un anneau de fonctions et de la remarque que les fonctions $f_n^m(x)$ appartiennent à Φ, il résulte que les fonctions

$$\varphi_n(x) = \max\left(f_n^1(x), f_n^2(x), \dots, f_n^n(x)\right) \tag{26}$$

appartiennent aussi à Φ. Or, d'après (26) et (24) nous trouvons (dans X):

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{27}$$

Les formules (25), (26) et (27) prouvent que la fonction $f(x)$ est une limite d'une suite non-décroissante de fonctions de la famille Φ: elle appartient donc à la famille Φ_g.

Nous avons ainsi démontré que $\Phi_{gg} \subset \Phi_g$. Or, il est évident que $\Phi_g \subset \Phi_{gg}$. La formule $\Phi_{gg} = \Phi_g$ est ainsi établie. Pareillement on démontre que $\Phi_{hh} = \Phi_h$.

(Cette dernière formule résulte d'ailleurs tout de suite de la formule $\Phi_{gg} = \Phi_g$. En effet, désignons par Ψ la famille que l'on obtient de la famille Φ par le changement des signes de toutes les fonctions qui la constituent; on voit sans peine que si Φ est un anneau, Ψ en est aussi un: donc, comme nous avons démontré, on aura $\Psi_{gg} = \Psi_g$. Or, comme on voit sans peine, la famille Φ_h s'obtient de la famille Ψ_g par le changement des signes des fonctions de Ψ_g, et pareillement on obtient la famille Φ_{hh} de Ψ_{gg}. L'égalité $\Psi_{gg} = \Psi_g$ entraîne donc: $\Phi_{hh} = \Phi_h$).

Le théorème IV est ainsi démontré. En voici quelques conséquences.

D'après la définition des fonctions k (comme fonctions g et h à la fois), on a $\Phi_k \subset \Phi_g$, d'où (d'après (16)) $\Phi_{kg} \subset \Phi_{gg} = \Phi_g$, donc $\Phi_{kg} \subset \Phi_g$. Or, on a évidemment $\Phi_g \subset \Phi_{kg}$. On a doc $\Phi_{kg} = \Phi_g$. Pareillement, on trouve $\Phi_{kh} = \Phi_h$. Or, d'après $\Phi_k \subset \Phi_g$ on trouve aussi

$(\Phi_g)_k \subset (\Phi_g)_g$, donc, d'après (16): $\Phi_{gk} \subset \Phi_g$, et, puisque $\Phi_g \subset \Phi_{gk}$, on a: $\Phi_{gk} = \Phi_g$. Pareillement, on trouve $\Phi_{gh} = \Phi_g$.

Or, on a évidemment $\Phi_{kk} = \Phi_{kg}\Phi_{kh}$: d'après $\Phi_{kg} = \Phi_g$ et $\Phi_{kh} = \Phi_h$ il en résulte que $\Phi_{kk} = \Phi_g \Phi_h = \Phi_k$. Donc:

Si Φ est un anneau de fonctions, on a:

$$\Phi_{kg} = \Phi_{gk} = \Phi_g, \quad \Phi_{kh} = \Phi_{hk} = \Phi_h \quad \text{et} \quad \Phi_{kk} = \Phi_k.$$

4. Théorème V: *Si Φ est un anneau de fonctions, on a:*

$$\Phi_\lambda = \Phi_{gh} \cdot \Phi_{hg}. \tag{28}$$

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction de la famille Φ_λ. D'après la définition de cette famille, il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ de fonctions de la famille Φ, telle que

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x). \tag{29}$$

D'après (29) on a

$$f(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} f_n(x) \quad \text{et} \quad f(x) = \underline{\lim_{n=\infty}} f_n(x),$$

ce qui donne, d'après (11):

$$f(x) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} \max\left(f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_{m+n}(x)\right) \tag{30}$$

et

$$f(x) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} \min\left(f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_{m+n}(x)\right). \tag{31}$$

Posons, pour m et n naturels:

$$\varphi_n^m(x) = \max\left(f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_{m+n}(x)\right) \tag{32}$$

et

$$\psi_n^m(x) = \min\left(f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_{m+n}(x)\right): \tag{33}$$

d'après (8), (9) et (10) on trouve sans peine, pour m et n naturels

$$\varphi_n^m(x) \leqslant \varphi_{n+1}^m(x), \quad \psi_n^m(x) \geqslant \psi_{n+1}^m(x), \tag{34}$$

et, pour $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n^m(x) \geqslant \lim_{n=\infty} \varphi_n^{m+1}(x), \quad \lim_{n=\infty} \psi_n^m(x) \leqslant \lim_{n=\infty} \psi_n^{m+1}(x). \tag{35}$$

Les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ appartenant à l'anneau Φ, il résulte de (32) et (33) qu'il en est de même de fonctions $\varphi_n^m(x)$

et $\psi_n^m(x)$ (pour m et n naturels). Les formules (30)—(35) prouvent donc que $f(x)$ est une fonction gh et hg par rapport à Φ. Elle appartient donc à la famille $\Phi_{gh} \cdot \Phi_{hg}$. Nous avons ainsi démontré la formule

$$\Phi_\lambda \subset \Phi_{gh}\, \Phi_{hg}. \tag{36}$$

Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous prouverons ce

Lemme. *Si u_n^m et v_n^m $(m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ sont deux suites infinies doubles de nombres réels et l un nombre réel, tels que*

$$u_n^m \geqslant u_{n+1}^m, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{37}$$

$$v_n^m \leqslant v_{n+1}^m, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

$$\lim_{n=\infty} u_n^m \leqslant \lim_{n=\infty} u_n^{m+1}, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

$$\lim_{n=\infty} v_n^m \geqslant \lim_{n=\infty} v_n^{m+1}, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_n^m = l, \tag{41}$$

et

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} v_n^m = l, \tag{42}$$

on a

$$l = \lim_{n=\infty} \max\left(\min(u_n^1, v_n^1),\ \min(u_n^2, v_n^1, v_n^2), \ldots,\ \min(u_n^n, v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^n)\right). \tag{43}$$

Démonstration. Soit a un nombre réel quelconque $< l$. D'après (41) il existe un indice p, tel que

$$\lim_{n=\infty} u_n^p > a,$$

d'où, d'après (37):

$$u_n^p > a, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{44}$$

(la limite d'une suite non-croissante ne dépassant pas ses termes).

D'après (40) et (42) nous avons $\lim\limits_{n=\infty} v_n^m \geqslant l$, pour $m = 1, 2, \ldots$, et il existe un indice r (dépendant de p), tel que

$$v_n^m > a, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, p; \quad n > r. \tag{45}$$

D'après (44) et (45), nous trouvons

$$\min(u_n^p, v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^p) > a, \quad \text{pour} \quad n > r. \tag{46}$$

Posons

$$t_n = \max\left(\min(u_n^1, v_n^1),\ \min(u_n^2, v_n^1, v_n^2), \ldots,\ \min(u_n^n, v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^n)\right): \tag{47}$$

d'après (46) nous aurons

$$t_n > a, \quad \text{pour} \quad n > p + r. \tag{48}$$

Or, soit b un nombre réel $> l$. D'après (42) il existe un indice q, tel que

$$\lim_{n=\infty} v_n^q < b,$$

d'où, d'après (38):

$$v_n^q < b, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{49}$$

D'après (41) et (39) nous avons $\lim\limits_{n=\infty} u_n^m \leqslant l$, pour $m = 1, 2, \ldots$, et il existe un indice s (dépendant de q), tel que

$$u_n^m < b, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, q; \quad n > s. \tag{50}$$

Nous avons évidemment

$$\min(u_n^m, v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^m) \leqslant u_n^m, \quad \text{pour } m \text{ et } n \text{ naturels}$$

et

$$\min(u_n^m, v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^m) \leqslant v_n^q, \quad \text{pour} \quad m \geqslant q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne tout de suite, d'après (50) et (49):

$$\min(u_n^m, v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^m) < b, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n > s,$$

donc, d'après (47): $t_n < b$ pour $n > s$, et d'après (48):

$$a < t_n < b \quad \text{pour} \quad n > p + r + s;$$

a et b pouvant être deux nombres réels quelconques, tels que $a < l < b$, cela prouve que $\lim\limits_{n=\infty} t_n = l$, et donne, d'après (47), la formule (43).

Notre lemme ainsi démontré.

Soit maintenant Φ un anneau de fonctions (définies dans X) et soit $f(x)$ une fonction qui est à la fois une fonction hg et gh (relativement à la famille Φ). Il existe donc deux suites doubles, de fonctions de la famille Φ, $\varphi_n^m(x)$ et $\psi_n^m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ telles que (dans X):

$$\varphi_n^m(x) \geqslant \varphi_{n+1}^m(x), \quad \psi_n^m(x) \leqslant \psi_{n+1}^m(x), \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^m(x) \leqslant \lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}^m(x), \quad \lim_{n\to\infty}\psi_n^m(x) \geqslant \lim_{n\to\infty}\psi_{n+1}^m(x), \quad \text{pour} \quad m=1,2,\dots,$$

et

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_n^m(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\psi_n^m(x).$$

D'après notre lemme (appliqué, pour tout élément donné x de l'ensemble X, aux suites $u_n^m = \varphi_n^m(x)$ et $v_n^m = \psi_n^m(x)$) nous en concluons que

(51) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \max\left(\min(\varphi_n^1(x), \psi_n^1(x)), \dots, \min(\varphi_n^n(x), \psi_n^1(x), \dots, \psi_n^n(x))\right).$$

La famille Φ étant un anneau de fonctions, et les fonctions $\varphi_n^m(x)$ et $\psi_n^m(x)$ $(m=1,2,\dots;\ n=1,2,\dots)$ faisant partie de Φ, il en est de même des fonctions qui se trouvent sous le signe *lim* dans la formule (51): la fonction $f(x)$ est donc limite de fonctions de la famille Φ: c'est donc une fonction λ relativement à Φ.

Nous avons ainsi démontré que toute fonction qui est à la fois hg et gh rel. à Φ, est une fonction λ rel. à Φ. On a ainsi la formule

(52) $$\Phi_{gh}\cdot\Phi_{hg} \subset \Phi_\lambda.$$

Les formules (36) et (52) donnent l'égalité (29). Le théorème V est ainsi démontré.

Appelons fonctions $\underline{\lambda}$, resp. $\overline{\lambda}$ relativement à la famille Φ les fonctions de la forme $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$, resp. $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$, où $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ sont fonctions de la famille Φ, et désignons par $\Phi_{\underline{\lambda}}$, resp. $\Phi_{\overline{\lambda}}$ les familles de toutes les fonctions $\underline{\lambda}$, resp. $\overline{\lambda}$ par rapport à Φ. Par le raisonnement fait au début de ce § on démontre sans peine que si Φ est un anneau de fonctions, on a les formules

$$\Phi_{\underline{\lambda}} \subset \Phi_{hg} \quad \text{et} \quad \Phi_{\overline{\lambda}} \subset \Phi_{gh},$$

d'où

(53) $$\Phi_{\underline{\lambda}}\,\Phi_{\overline{\lambda}} \subset \Phi_{hg}\,\Phi_{gh}.$$

Or, toute fonction λ (rel. à Φ) étant évidemment à la fois une fonction $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ (rel. à Φ), on a la formule

(54) $$\Phi_\lambda \subset \Phi_{\underline{\lambda}}\,\Phi_{\overline{\lambda}}.$$

Les formules (53), (54) et (28) donnent tout de suite ce

Corollaire. *Si Φ est un anneau de fonctions, on a:*

(55) $$\Phi_\lambda = \Phi_{\underline{\lambda}}\cdot\Phi_{\overline{\lambda}}.$$

En d'autres termes:

Si Φ est un anneau de fonctions (définies dans X), la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit dans X limite d'une suite de fonctions de Φ est qu'il existe deux suites $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ de fonctions de Φ, telles que $f(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\psi_n(x)$ (dans X).

5. **Théorème VI.** *Si Φ est un anneau de fonctions (définies dans l'ensemble X), $\varphi(x)$ une fonction h et $\psi(x)$ une fonction g relativement à Φ et si $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ (dans X), alors il existe une fonction $f(x)$ qui est une fonction k relativement à Φ et telle que (dans X)*

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)\ ^{1)}.$$

Lemme. *Si u_n et v_n $(n=1,2,\dots)$, sont deux suites infinies de nombres réels, telles que*

(56) $$u_n \geqslant u_{n+1}, \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\dots,$$

(57) $$v_n \leqslant v_{n+1}, \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\dots,$$

(58) $$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

(59) $$v = \lim_{n\to\infty} v_n$$

et si l'on a $u \leqslant v$, les suites infinies

(60) $$p_n = \max(\min(u_1, v_1), \min(u_2, v_2), \dots, \min(u_n, v_n))$$

et

(61) $$q_n = \min(u_1, \max(u_2, v_1), \max(u_3, v_2), \dots, \max(u_{n+1}, v_n))$$

tendent pour $n\to\infty$ vers une même limite qui est $\geqslant u$ et $\leqslant v$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après (60), (61) et (8) nous trouvons tout de suite:

[1]) Cf. H. Hahn, *Akad. Wien* 126 (1917), p. 91—110; F. Hausdorff, *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 295, *Mengenlehre* (1927), p. 243.

(62) $$p_n \leqslant p_{n+1} \quad \text{et} \quad q_n \geqslant q_{n+1}, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où il résulte l'existence de limites $\lim_{n=\infty} p_n$ et $\lim_{n=\infty} q_n$.

D'après (60) nous avons $p_n \geqslant \min(u_n, v_n)$, d'où, d'après (58), (59), (5) et $u \leqslant v$, on trouve $\lim_{n=\infty} p_n \geqslant \min(u, v) = u$. Pareillement, d'après (61) on a $q_n \leqslant \max(u_{n+1}, v_n)$, d'où $\lim_{n=\infty} q_n \leqslant \max(u, v) = v$. On a ainsi:

(63) $$u \leqslant \lim_{n=\infty} p_n \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} q_n \leqslant v,$$

Soit a un nombre réel, tel que

(64) $$a < \lim_{n=\infty} p_n:$$

nous avons donc, pour n suffisamment grands, $a < p_n$, et nous en concluons, d'après (60), qu'il existe un indice k, tel que $a < \min(u_k, v_k)$, donc $a < u_k$ et $a < v_k$, ce qui donne, d'après (56) et (57):

$$a < u_{m+1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m < k$$

et

$$a < v_m \quad \text{pour} \quad m \geqslant k,$$

donc

$$a < u_1 \quad \text{et} \quad a < \max(u_{m+1}, v_m) \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (61)

$$a < q_n, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où

(65) $$a \leqslant \lim_{n=\infty} q_n.$$

Nous avons ainsi démontré que, pour les nombres réels a, la formule (64) entraîne la formule (65). Cela prouve que

(66) $$\lim_{n=\infty} p_n \leqslant \lim_{n=\infty} q_n.$$

Or, soit b un nombre réel tel que

(67) $$b < \lim_{n=\infty} q_n$$

Si $b \leqslant u$, ou a d'après (63):

(68) $$b \leqslant \lim_{n=\infty} p_n.$$

Si $b > u$, il existe, d'après (58), des indices n tels que $u_n < b$: soit k le plus petit d'entre eux. Il ne peut être $k = 1$, puisque, d'après (67) et (62), on a $b < q_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc, d'après (61), $b < u_1$. Nous pouvons donc poser $k = m + 1$, où m est un nombre naturel, et nous aurons $b \leqslant u_m$ et $b > u_{m+1}$. D'après $b < q_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et (61) nous avons donc $b < \max(u_{m+1}, v_m)$, ce qui donne, d'après $b > u_{m+1}$, l'inégalité $b < v_m$. On a donc $b \leqslant u_m$ et $b < v_m$, d'où $b \leqslant \min(u_m, v_m)$ et, d'après (60): $b \leqslant p_n$, pour $n \geqslant m$, ce qui donne encore la formule (68).

Nous avons ainsi démontré que, pour b réels, la formule (67) entraîne la formule (68). Cela prouve que

$$\lim_{n=\infty} q_n \leqslant \lim_{n=\infty} p_n,$$

ce qui entraîne, d'après (66), l'égalité $\lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} q_n$. Vu les formules (63), nous en concluons que notre lemme est démontré.

Soient maintenant: Φ un anneau de fonctions définies dans l'ensemble X, $\varphi(x)$ une fonction h et $\psi(x)$ une fonction g relativement à Φ, et $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ (dans X). De la définition des fonctions g et h il résulte qu'il existe deux suites infinies $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de fonctions de Φ telles que (dans X):

$$\varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x), \quad \psi_n(x) \leqslant \psi_{n+1}(x), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x), \quad \psi(x) = \lim_{n=\infty} \psi_n(x).$$

Posons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots,$

(69) $$p_n(x) = \max(\min(\varphi_1(x), \psi_1(x)), \min(\varphi_2(x), \psi_2(x)), \ldots, \min(\varphi_n(x), \psi_n(x))),$$

(70) $$q_n(x) = \min(\varphi_1(x), \max(\varphi_2(x), \psi_1(x)), \ldots, \max(\varphi_{n+1}(x), \psi_n(x)));$$

on aura, comme on voit sans peine (dans X):

(71) $$p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \quad \text{et} \quad q_n(x) \geqslant q_{n+1}(x) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après notre lemme (appliqué, pour tout élément donné x de X, en posant $u_n = \varphi_n(x)$, $v_n = \psi_n(x)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$) nous en concluons que les limites

$$\lim_{n=\infty} p_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} q_n(x)$$

existent (dans X), qu'elles sont égales et $\geqslant \varphi(x)$ et $\leqslant \psi(x)$.

Posons (dans X):

$$f(x) = \lim_{n=\infty} p_n(x) = \lim_{n=\infty} q_n(x); \tag{72}$$

nous avons donc $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$. Or, les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ appartenant à la famille Φ qui est un anneau de fonctions, les formules (69) et (70) prouvent que les fonctions $p_n(x)$ et $q_n(x)$ appartiennent aussi à Φ. D'après (71) et (72) nous en concluons que $f(x)$ est à la fois une fonctions g et une fonction h, donc une fonction k (relativement à Φ). Notre théorème est ainsi démontré.

6. Soit Φ un anneau de fonctions (définies dans un en ensemble X): d'après le théorème III, les familles Φ_λ, Φ_{gh} et Φ_{hg} sont aussi des anneaux. D'après le formule (36), nous avons

$$\Phi_\lambda \subset \Phi_{gh} \quad \text{et} \quad \Phi_\lambda \subset \Phi_{hg},$$

ce qui donne tout de suite, d'après le théorème IV:

$$\Phi_{\lambda h} \subset \Phi_{ghh} = \Phi_{gh} \quad \text{et} \quad \Phi_{\lambda g} \subset \Phi_{hgg} = \Phi_{hg}. \tag{73}$$

Or, toute fonction g et toute fonction h (relativement à Φ) étant une fonction λ (rel. à Φ), on a évidemment

$$\Phi_{gh} \subset \Phi_{\lambda h} \quad \text{et} \quad \Phi_{hg} \subset \Phi_{\lambda g}. \tag{74}$$

Les formules (73) et (74) donnent tout de suite:

$$\Phi_{\lambda h} = \Phi_{gh} \quad \text{et} \quad \Phi_{\lambda g} = \Phi_{hg}. \tag{75}$$

Or, il est à remarquer qu'on a

$$\Phi_{g\lambda} = \Phi_{gh} \quad \text{et} \quad \Phi_{h\lambda} = \Phi_{hg}. \tag{75a}$$

En effet, d'après (28) on a $\Phi_{g\lambda} \subset \Phi_{ggh} = \Phi_{gh}$ et d'autre part on a évidemment $\Phi_{gh} \subset \Phi_{g\lambda}$. Pareillement on trouve $\Phi_{h\lambda} = \Phi_{hg}$.

De (75a) résulte sans peine, d'après (28):

$$\Phi_{k\lambda} = \Phi_\lambda.$$

Voici encore une application de la formule (75). En substituant dans (28) Φ_λ pour Φ, on trouve, d'après (75):

$$\Phi_{\lambda\lambda} = (\Phi_\lambda)_\lambda = \Phi_{\lambda gh} \cdot \Phi_{\lambda hg} = \Phi_{hgh} \cdot \Phi_{ghg},$$

donc

$$\Phi_{\lambda\lambda} = \Phi_{hgh} \cdot \Phi_{ghg}.$$

Pareillement on trouve

$$\Phi_{\lambda\lambda\lambda} = \Phi_{hghg} \cdot \Phi_{ghgh}$$

et ainsi de suite (Cf. § 7, théorème X).

On a évidemment $\Phi_{\lambda k} = \Phi_{\lambda h} \cdot \Phi_{\lambda g}$, donc, d'après (75) $\Phi_{\lambda k} = \Phi_{gh} \cdot \Phi_{hg}$, ce qui donne, d'après le théorème V:

$$\Phi_{\lambda k} = \Phi_\lambda. \tag{76}$$

Posons

$$\Psi = \Phi_\lambda. \tag{77}$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction gh relativement à Φ, $\psi(x)$ une fonction hg rel. à Φ, et $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ (dans X). D'après (77) et (75), $\varphi(x)$ est une fonction h relativement à Ψ et $\psi(x)$ est une fonction g rel. à Ψ: d'après le théorème VI, il existe donc une fonction $f(x)$ qui est une fonction k rel. à Ψ, telle que $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ (dans X). La fonction $f(x)$, comme fonction k rel. à Ψ, est à la fois une fonction g et h rel. à Ψ, donc, d'après (77), elle est une fonction λg et λh, donc λk relativement à Φ, donc, d'après (76) — une fonction λ rel. à Φ. Nous avons ainsi démontré ce

Théorème VII: *Si Φ est un anneau de fonctions (définies dans un ensemble X), $\varphi(x)$ une fonction gh, et $\psi(x)$ une fonction hg relativement à Φ et si $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ (dans X), il existe une fonction $f(x)$ qui est une fonction λ relativement à Φ telle que $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$.*

Ce théorème est évidemment une généralisation de la formule (52) (que l'on obtient pour $\varphi(x) = \psi(x)$).

7. Soit Φ un anneau de fonctions (définies dans un ensemble X). Nous définirons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ par l'induction transfinie les fonctions g^α, h^α et λ^α (par rapport à Φ) comme il suit. g^0, h^0 et λ^0 seront les fonctions de la famille Φ. Soit maintenant α un nombre ordinal positif $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini les fonctions g^ξ, h^ξ et λ^ξ pour les nombres ordinaux $\xi < \alpha$. Nous appellerons fonctions g^α, resp. h^α, resp. λ^α les fonctions $f(x)$ qui sont (dans X) de la forme $f(x) = \lim f_n(x)$, où $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie non décroissante, resp. non croissante, resp. quelconque et où $f_n(x)$ est une fonction h^{ξ_n}, resp. g^{ξ_n}, resp. λ^{ξ_n}, où $\xi_n < \alpha$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Donc g^1, h^1 et λ^1 sont respectivement les fonctions g, h et λ; g^2, h^2 et λ^2 sont resp. les fonctions hg, gh et $\lambda\lambda$, etc.). Il est évident que les fonctions g^α, resp. h^α, resp. λ^α sont en même temps des fonctions g^β, resp. h^β, resp. λ^β, où $\beta > \alpha$, et que les fonctions g^α resp. h^α sont aussi des fonctions $h^{\alpha+1}$ resp. $g^{\alpha+1}$ (donc aussi des fonctions h^β, resp. g^β pour $\beta > \alpha$).

α étant un nombre ordinal positif $< \Omega$, désignons par S^α la famille de toutes les fonctions λ^ξ, où $\xi < \alpha$. Les fonctions λ^α coïncident évidemment avec les fonctions de la famille $S^{\alpha+1}$ ainsi qu'avec les fonctions de la famille S^α_λ. Donc S^α est la somme de toutes les familles S^ξ_λ, où $\xi < \alpha$, et on a évidemment $S^\alpha \subset S^\beta$ pour $\alpha < \beta < \Omega$.

La famille S^1 coïncide évidemment avec la famille Φ et parsuite est un anneau de fonctions. D'après le théorème III, la famille S^1_λ est donc aussi un anneau de fonctions. Soit maintenant α un nombre ordinal > 1 et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà démontré que les familles S^ξ_λ, où $\xi < \alpha$ sont des anneaux de fonctions. La famille S^α_λ est ainsi la somme des anneaux S^ξ_λ $(\xi < \alpha)$, où $S^\xi_\lambda \subset S^\eta_\lambda$ pour $\xi < \eta$: d'après le théorème II nous en concluons que S^α_λ est un anneau. Nous avons ainsi démontré par l'induction transfinie que les familles S^α_λ sont des anneaux pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$. Il en résulte immédiatement que

La famille de toutes les fonctions λ^α (par rapport à un anneau Φ) *est un anneau, quel que soit le nombre ordinal donné* $\alpha < \Omega$.

D'après la définition des familles S^α et d'après le théorème II il en résulte tout de suite que *la famille* S^α *est un anneau de fonctions pour* $\alpha < \Omega$.

D'après le théorème V (formulle (28)) nous en concluons que

(77) $$S^\alpha_\lambda = S^\alpha_{gh}\, S^\alpha_{hg}$$

et d'après la formule (76):

(79) $$S^\alpha_{\lambda\lambda} = S^\alpha_\lambda.$$

De la formule (79) résulte ce

Théorème VIII: *Les fonctions qui sont à la fois limites de suites non décroissantes et limites de suites non croissantes de fonctions* λ^α *(par rapport à un anneau de fonctions* Φ*) sont encore des fonctions* λ^α *(par rapport à* Φ*), pour* $0 < \alpha < \Omega$.

Pour $\alpha = 0$ le théorème VIII peut être en défaut, p. e. pour l'anneau Φ formé de toutes les fonctions constantes à valeurs rationnelles.

Le théorème VI appliqué à la famille S^α donne une généralisation du théorème connu sous le nom d'„*Einschiebungssatz*" [1]).

Nous démontrerons maintenant deux théorèmes qui établissent les rapports entre les fonctions g^α, h^α et λ^α.

Théorème IX: *Les fonctions* g^α *(relativement à un anneau* Φ *de fonctions) coïncident avec les fonctions de la famille* S^α_g *et les fonctions* h^α *avec les fonctions de la famille* S^α_h, *pour* $0 < \alpha < \Omega$.

Démonstration. Le théorème IX est vrai pour $\alpha = 1$, la famille S^1 coïncidant avec la famille Φ et les fonctions g^1, resp. h^1 avec les fonctions g, resp. h.

Soit maintenant β un nombre ordinal > 1 et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà démontré notre théorème pour les nombres ordinaux $\alpha < \beta$. Distinguons deux cas.

1) β est un nombre ordinal de première espèce, soit $\beta = \alpha + 1$ D'après la définition des fonctions g^ξ, les fonctions $g^{\alpha+1}$ coïncident avec les fonctions $h^\alpha g$, donc, notre théorème supposé vrai pour le nombre ordinal α, avec les fonctions de l'ensemble S^α_{hg}. Or, d'après la formule (75) (pour $\Phi = S^\alpha$) on a $S^\alpha_{hg} = S^\alpha_{\lambda g}$, ce qui donne, d'après $S^\alpha_\lambda = S^{\alpha+1}$, $S^\alpha_{hg} = S^{\alpha+1}_g = S^\beta_g$. Les fonctions $g^\beta = g^{\alpha+1}$ coïncident ainsi avec les fonctions de la famille S^β_g. Pareillement on démontre que les fonctions h^β coïncident avec les fonctions de la famille S^β_h.

2) β est un nombre ordinal de seconde espèce.

Soit $f(x)$ une fonction g^β: on a donc $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, où $f_1(x) \leqslant \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots$ et où $f_n(x)$ est une fonction h^{ξ_n} et $\xi_n < \beta$, pour $n = 1, 2, \ldots$ Donc, à plus forte raison, $f_n(x)$ est une fonction g^{ξ_n+1} (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$), où $\xi_n + 1 < \beta$ (puisque $\xi_n < \beta$ et β est un nombre de seconde espèce). Notre théorème supposé vrai pour les nombres ordinaux $< \beta$, il en résulte que (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) $f_n(x)$ appartient à la famille $S^{\xi_n+1}_g$ et (d'après $\xi_n + 1 < \beta$) à plus forte raison à la famille S^β_g. La fonction $f(x)$ appartient donc à la famille S^β_{gg}, donc à la famille S^β_g (puisque, d'après la formule (16), $S^\beta_{gg} = S^\beta_g$).

[1]) Voir F. Hausdorff, *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 309.

D'autre part soit $f(x)$ une fonction de la famille S_g^β. On a donc $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, où $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \dots$ et où $f_n(x)$ est une fonction de la famille S^β, donc $f_n(x)$ est une fonction λ^{ξ_n}, où $\xi_n < \beta$, et parsuite $f_n(x)$ est une fonction de la famille S^{ξ_n+1} et, à plus forte raison, de la famille $S_h^{\xi_n+1}$ (pour $n = 1, 2, 3, \dots$).

Or, de $\xi_n < \beta$ résulte (β étant un nombre de seconde espèce) $\xi_n + 1 < \beta$: notre théorème supposé vrai pour les nombres ordinaux $< \beta$, il résulte de $f^n(x) \in S_h^{\xi_n+1}$ que $f_n(x)$ est une fonction h^{ξ_n+1}. Ceci étant pour $n = 1, 2, 3, \dots$ on en conclut, d'après $\xi_n + 1 < \beta$, que $f(x)$ (comme limite d'une suite non décroissante des fonctions $f_n(x)$) est une fonction g^β.

Les fonctions g^β coïncident ainsi avec les fonctions de la famille S_g^β. Pareillement on démontre que les fonctions h^β coïncident avec les fonctions de la famille S_h^β.

De l'hypothèse que notre théorème est vrai pour les nombres ordinaux $\alpha < \beta$ résulte ainsi qu'il est encore vrai pour le nombre β. Notre théorème est ainsi démontré par l'induction transfinie.

Du théorème IX résulte que notre définition des fonctions g^α, resp. h^α est équivalente à la suivante: g^α, *resp.* h^α (où $\alpha < \Omega$) *sont les fonctions qui sont de la forme* $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, *où* $f_n(x)$ *est une fonction* λ^{ξ_n} *et* $\xi_n < \alpha$ (pour $n = 1, 2, 3, \dots$), *et où la suite infinie* $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) *est non décroissante, resp. non croissante.* C'est cette dernière définition qui est adoptée par M. F. Hausdorff[1]).

Théorème X: *Soit* α *un nombre ordinal positif* $< \Omega$. *Pour qu'une fonction* $f(x)$ *soit* λ^α *(relativement à un anneau de fonctions* Φ*), il faut et il suffit qu'elle soit à la fois* $g^{\alpha+1}$ *et* $h^{\alpha+1}$ *(rel. à* Φ*).*

Démonstration. Soit α un nombre ordinal positif $< \Omega$. Comme nous savons, les fonctions λ^α coïncident avec les fonctions de la famille S_λ^α. Or, d'après le théorème V (formule (28) pour $\Phi = S^\alpha$), on a

(80) $$S_\lambda^\alpha = S_{gh}^\alpha \cdot S_{hg}^\alpha.$$

Mais, d'après le théorème IX, la famille S_{gh}^α coïncide avec la famille de toutes les fonctions $g^\alpha h$, c'est-à-dire avec la famille de toutes les fonctions $h^{\alpha+1}$, et de même S_{hg}^α coïncide avec la famille de toutes les fonctions $g^{\alpha+1}$.

[1]) l. c. p. 307.

De la formule (80) résulte donc que les fonctions λ^α coïncident avec les fonctions qui sont à la fois $h^{\alpha+1}$ et $g^{\alpha+1}$, et le théorème X est démontré.

Il est à remarquer que des théorèmes IX et X résulte immédiatement le théorème VIII.

8. F étant une famille d'ensembles donnée quelconque, désignons par $\chi(F)$ la famille de toutes les fonctions caractéristiques des ensembles de la famille F, définies pour les éléments x de la somme X de tous les ensembles formant F. La fonction caractéristique d'une limite d'une suite d'ensembles étant, comme on sait, la limite de fonctions carartéristiques de ces ensembles, on a évidemment (pour toute famille F d'ensembles)

$$\chi(F_\lambda) = [\chi(F)]_\lambda$$

(où F_λ désigne la famille de toutes les limites de suites infinies d'ensembles de F)

Soit R un anneau d'ensembles et posons $\Phi = \chi(R)$: ce sera un anneau de fonctions (§ 2).

Soit R_σ, resp. R_δ la famille de toutes les sommes, resp. produits d'infinités dénombrables d'ensembles de R. Comme R est anneau d'ensembles, on voit sans peine que les termes de ceux sommes, resp. les facteurs de ces produits peuvent être supposés non décroissants, resp. non croissants. Il en résulte sans peine que

$$\chi(R_\sigma) = \Phi_g \quad \text{et} \quad \chi(R_\delta) = \Phi_h.$$

donc

$$\chi(R_{\sigma\delta}) = \Phi_{gh} \quad \text{et} \quad \chi(R_{\delta\sigma}) = \Phi_{hg}.$$

D'après le théorème V nous avons donc

$$\chi(R_\lambda) = \chi(R_{\sigma\delta}) \cdot \chi(R_{\delta\sigma})$$

ce qui équivaut, comme on voit sans peine, à la formule

(81) $$R_\lambda = R_{\sigma\delta} R_{\delta\sigma}.$$

Nous avons ainsi démontré que *si* R *est un anneau d'ensembles, on a la formule* (81) [1]).

[1]) J'ai démontré directement cette proposition dans le *C. R.*, t. 192, p. 1626 (séance du 22 juin 1931).

De la formule (81) résulte tout de suite que $R_{\lambda\delta} \subset R_{\sigma\delta}$ et $R_{\lambda\sigma} \subset R_{\delta\sigma}$ et, puisque d'autre part $R_{\sigma\delta} \subset R_{\lambda\delta}$ et $R_{\delta\sigma} \subset R_{\lambda\sigma}$, on trouve

$$R_{\lambda\delta} = R_{\sigma\delta} \quad \text{et} \quad R_{\lambda\sigma} = R_{\delta\sigma},$$

d'où, d'après (81):

$$R_{\lambda} = R_{\lambda\delta} R_{\lambda\sigma} \text{ [1]}.$$

Or, on a, d'après (81): $R_{\sigma\lambda} \subset R_{\sigma\delta}$ et $R_{\delta\lambda} \subset P_{\delta\sigma}$, donc $(R_\sigma R_\delta)_\lambda \subset \subset R_{\sigma\lambda} R_{\delta\lambda} \subset R_{\sigma\delta} R_{\delta\sigma} = R_\lambda$, et, puisque d'autre part $R_\lambda \subset (R_\sigma R_\delta)_\lambda$, on trouve

$$(R_\sigma R_\delta)_\lambda = R_\lambda \text{ [2]}.$$

La relation $E_1 \subset E_2$ pour les ensembles étant équivalente à la relation $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (dans X) pour les fonctions caractéristiques correspondantes, il résulte sans peine des théorèmes VI et VII que

Si R est un anneau d'ensembles et si $E_1 \in R_\delta$, $E_2 \in R_\sigma$ et $E_1 \subset E_2$, il existe un ensemble E tel que $E \in R_\sigma R_\delta$ et $E_1 \subset E \subset E_2$ [3]).

Si R est un anneau d'ensembles et si $E_1 \in R_{\sigma\delta}$, $E_2 \in R_{\delta\sigma}$ et $E_1 \subset E_2$, il existe un ensemble E de R_λ, tel que $E_1 \subset E \subset E_2$.

[1]) Cf. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 59.

[2]) Cf. N. Lusin, l. c. p. 64.

[3]) Cf. *Fund. Math.* t. VI. p. 2.

Eine Verschärfung des n-Beinsatzes.

Von

Georg Nöbeling (Wien).

Nach Menger [1]) heisst ein Punkt p eines metrischen Raumes R von *mindestens n-ter Ordnung*, wenn die Begrenzungen aller hinreichend kleinen Umgebungen von p mindestens n Punkte enthalten. Gibt es eine kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft, so heisst p *von genau n-ter Ordnung*. Existiert eine solche kleinste Zahl n nicht, so heisst p *von unendlicher Ordnung*. Liegt p in beliebig kleinen Umgebungen mit endlichen Begrenzungen, ohne von endlicher Ordnung zu sein, so heisst er *von wachsender Ordnung*.

Menger [1]) beweist den wichtigen

n-Beinsatz. *Zu jedem Punkte p von n-ter (wachsender) Ordnung eines im kleinen zusammenhängenden Kontinuums K existieren n (abzählbar viele) in p endende, sonst fremde Teilbögen von K.*

Wir wollen nun einen metrischen Raum R zwischen zwei fremden abgeschlossenen Teilmengen P und Q *von mindestens n-ter Ordnung* nennen, wenn jede (zu P und Q fremde) die Mengen P und Q trennende Menge mindestens n Punkte enthält.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

n-Bogensatz. *Ist ein im kleinen zusammenhängender kompakter Raum K zwischen zwei fremden abgeschlossenen Teilmengen P und Q von mindestens n-ter Ordnung, so enthält er mindestens n Bögen, welche P und Q verbinden und zu je zwei höchstens Endpunkte gemein haben* [2]).

[1]) Menger, Fund. Math. X, S. 96; Wiener Akad. Anzeiger 1930, Nr. 10.

[2]) Für den Fall, dass K in der Ebene liegt und die Mengen P und Q einpunktig sind, wurde der n-Bogensatz von N. E. Rutt bewiesen (Amer. Journ. of Math. 51, S. 217).