# Uber ein Urbildproblem.

Von

N. Aronszajn (Warszawa).

**1.** Es ist neuerlich folgender Satz von verschiedenen Verfassern [1]) bewiesen worden:

***Satz.*** *Ist ein topologischer Raum $R$ absolute $G_\delta$-Menge (oder was dasselbe ist, vollständig metrisierbarer Raum) und ausserdem zusammenhängend und lokal-zusammenhängend, so lassen sich je zwei Punkte von $R$ durch einen einfachen in $R$ liegenden Bogen verbinden.*

Dieser Satz ist ein bemerkenswertes Analogon zum bekannten Satze von Mazurkiewicz und R. L. Moore [2]), nach welchem jedes lokal-zusammenhängende Kontinuum „bogenverknüpfbar" ist.

Man kann nun die zusammenhängenden und lokal-zusammenhängenden absoluten $G_\delta$-Mengen als eine natürliche Verallgemeinerung der lokal-zusammenhängenden Kontinua ansehen. Da man die lokal-zusammenhängenden Kontinua *Peanosche Räume* [3]) zu nennen pflegt, so liegt es nahe, die zusammenhängenden und lokal-zusammenhängenden absoluten $G_\delta$-Mengen als *quasi-Peanosche* [4]) Räume zu bezeichnen.

Es entsteht die Frage, inwiefern die Analogie zwischen den Peanoschen und quasi-Peanoschen Räumen geht.

[1]) Vgl. R. L. Moore, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), S. 141 (abstract) K. Menger, Monatsh. f. Math. u. Phys. 36 (1929), S. 212, N. Aronszajn, Fund. Math. XV (1930), S. 232 und C. Kuratowski, Fund. Math. XV, S. 306.

[2]) Vgl. R. L. Moore, Bull. Am. Math. Soc. 23, S. 233 und S. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, S. 166.

[3]) Vgl. C. Kuratowski, Fund. Math. XIII, S. 307.

[4]) Diese Bezeichnung stammt von K. Borsuk (s. diesen Band).



Bekanntlich sind die Peanoschen Räume dadurch charakterisiert, dass sie stetige Bilder einer linearen Strecke sind. Diese Tatsache drücken wir aus, indem wir die lineare Strecke *universales Urbild der Klasse der Peanoschen Räume in bezug auf stetige Abbildungen* nennen. Es wurde mir von K. Menger und A. Tarski das Problem mitgeteilt: *gibt es in bezug auf eine Abbildungsklasse ein universales Urbild für die Klasse der quasi-Peanoschen Räume?*

Nun hat es sich erwiesen, dass in bezug auf die Klasse aller stetigen Abbildungen kein solches Urbild existiert, auch wenn wir nur *separable* quasi-Peanosche Räume in Betracht nehmen (vgl. Korollar 3).

In der vorliegenden Arbeit wird jedoch eine *Teilklasse der Klasse aller stetiger Abbildungen* definiert und der Hauptsatz bewiesen, dass *in bezug auf diese engere Abbildungsklasse* ein *universales Urbild* für die Klasse der *separablen quasi-Peanoschen Räume existiert.*

**2.** ***Satz 1.*** *Ist $R$ ein metrischer, zusammenhängender und nichtkompakter Raum, so gibt es eine stetige Abbildung $f$ des Raumes $R$ auf das nicht lokal-zusammenhängende Kontinuum $K = [b; a] + \sum_{n=1}^{\infty} [b; a_n]$, wo $b$, $a$ und $a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Punkte der euklidischen Ebene mit kartesischen Koordinaten* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *und* $\left(1, \frac{1}{n}\right)$ *sind und* $[x; y]$ *die abgeschlossene Strecke mit Endpunkten $x$ und $y$ bezeichnet* [1]).

*Beweis*: Sei $(\varrho)$ die Metrik von $R$. Da $R$ nicht kompakt ist, so gibt es eine Punktfolge $\{p_n\} \subset R$, wo $p_i \neq p$ für $i \neq j$, die keinen Häufungspunkt besitzt. Wir setzen nun

$$\eta_n = \min\left[\frac{1}{n}, \inf_{k \neq n} \varrho(p_n, p_k)\right].$$

Es besteht offenbar $\eta_n > 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ und

$$S\left(p_i, \frac{\eta_i}{3}\right) \cdot S\left(p_j, \frac{\eta_j}{3}\right) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j,$$

[1]) Nach einem noch nicht veröffentlichten Satze von Frl. Stępkowska ist dieses Kontinuum $K$ ein stetiges Bild von jedem nicht lokal-zusammenhängenden Kontinuum. In Verbindung mit unserem Satze ergibt sich daraus, dass die nicht Peanoschen Räume unter den metrischen zusammenhängenden Räumen dadurch charakterisiert sind, dass sie sich stetig auf das Kontinuum $K$ abbilden lassen.

wo $S(x, \varepsilon)$ die Kugel vom Radius $\varepsilon$ in der Metrik $(\varrho)$ um den Punkt $x$, also die Menge aller $y \in R$ mit $\varrho(x, y) < \varepsilon$, bezeichnet. Wir setzen ferner

$$A = R - \sum_{n=1}^{\infty} S\left(p_n, \frac{\eta_n}{3}\right)$$

Die Punktfolge $\{p_n\}$ und $A$ sind offenbar nichtleere, abgeschlossene und zueinander fremde Mengen. Es gibt bekanntlich eine in dem ganzen Raume $R$ definierte stetige Funktion $\varphi$[1]), so dass: $\varphi(x) = 0$ für $x \in A$, $\varphi(x) = 1$ für $x \in \{p_n\}$ und $0 < \varphi(x) < 1$ für $x \in R - (A + \{p_n\})$ gilt.

Man beweist leicht, auf Grund des Zusammenhanges von $R$, dass jede Kugel $S\left(p_n, \frac{\eta_n}{3}\right)$ durch die Funktion $\varphi$ in das halboffene Zahleninterval $(0; 1]$ übergeht. Wir definieren nun die Abbildung $f$ folgendermassen: $f(x) = b = (0, 0)$ für $x \in A$;

$$f(x) = \left(\varphi(x), \frac{1}{n}\varphi(x)\right) \in [b; a_n] \quad \text{für} \quad x \in S\left(p_{n+1}, \frac{\eta_{n+1}}{3}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{und} \quad f(x) = (\varphi(x), 0) \in [b; a] \quad \text{für} \quad x \in S\left(p_1, \frac{\eta_1}{3}\right)$$

Es ist leicht ersichtlich. dass die Abbildung $f$ stetig und dass $f(R) = K$ ist, w. z. b.w.

***Satz 2.*** *Ist $R$ ein separabler, absolut-analytischer*[2]) *und nicht halbkompakter Raum, so gibt es eine stetige Abbildung $f$ des Raumes $R$ auf eine analytische, nicht-Borelsche, in der euklidischen Ebene liegende Menge $A$.*

*Beweis.* Nach einem Satze von Hurewicz[3]) gibt es im Raume $R$ eine abgeschlossene Menge $M$, die mit der Menge $I$ der irrationalen Zahlen homöomorph ist.

Bekanntlich gibt es eine stetige Abbildung der Menge $I$, also auch der Menge $M$, auf jede absolut-analytische separable Menge.

[1]) Z. B. die Funktion $\varphi(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, \{p_n\})}$, wo $\varrho(x, M) = \inf_{y \in M} \varrho(x, y)$ ist.

[2]) d. h. ein metrisierbarer und in jedem ihn enthaltenden metrisierbaren Raume eine analytische (Suslin'sche) Menge bildender.

[3]) Vgl. W. Hurewicz, Fund. Math. XII, S. 100.



Sei nun $\varphi_0$ eine solche Abbildung der Menge $M$ auf eine analytische nicht-Borelsche Zahlenmenge $A_0$. Da $M$ im Raume $R$ abgeschlossen ist, so kann man[1]) die Funktion $\varphi_0$ zu einer stetigen, und in dem ganzen Raume $R$ definierten reellen Funktion $\varphi$ erweitern.

Sei jetzt $\psi$ eine in dem ganzen Raume $R$ definierte, reelle und stetige Funktion, für welche: $\psi(x) = 0$ für $x \in M$ und $\psi(x) > 0$ für $x \in R - M$ gilt (es gibt offenbar solche Funktionen, z. B. $\psi(x) = \varrho(x, M)$).

Wir setzen nun: $f(x) = (\varphi(x), \psi(x))$ für $x \in R$.

Es ist ersichtlich, dass $f$ eine stetige Abbildung des Raumes $R$ auf eine ebene Menge $A$ darstellt. Diese Menge $A$ ist analytisch (als stetiges Bild des absolut-analytischen Raumes $R$) und nicht-Borelsch (da der Durchschnitt von $A$ mit der Abszissenachse mit der Zahlenmenge $A_0$ isomorph ist), w. z. b. w.

***Korollar 3.*** *Es gibt in bezug auf stetige Abbildungen kein universales Urbild für die Klasse der separablen quasi-Peanoschen Räume.*

*Beweis.* Wäre nämlich $U$ ein solches Urbild, so müsste $U$ ein separabler quasi-Peanoscher Raum sein (denn die identische Abbildung auf sich selbst ist stetig). Es könnte aber $U$ nicht halbkompakt sein (denn andernfalls würden alle stetige Bilder von $U$, also alle quasi-Peanosche Räume auch halbkompakt, was offenbar falsch ist) und mithin nach dem Satze 1. oder 2. gäbe es eine stetige Abbildung der Menge $U$ auf einen nicht quasi-Peanoschen Raum, gegen die Voraussetzung, dass $U$ ein universales Urbild der quasi-Peanoschen Räume in bezug auf stetige Abbildungen ist.

*3.* Nach dem Satz 1. kann der lokale Zusammenhang durch eine stetige Abbildung zerstört werden. Es entsteht die Frage, ob man eine genug allgemeine Klasse stetiger Abbildungen angeben kann, für welche der lokale Zusammenhang eine Invariante bildet. Solche Klasse ist durch die folgenden Definitionen festgelegt.

Es sei $\varphi$ eine (nicht notwendig eindeutige) Abbildung des Raumes $R$ auf einen Raum $T$. Es ist also für jedes $a \in R$ eine Teilmenge $\varphi(a)$ von $T$ gegeben.

Wir nennen die Abbildung $\varphi$ *schwach-stetig*, wenn es für jede Punktfolge $\{a_n\} \subset R$, die gegen einen Punkt $a \in R$ konvergiert, eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ und eine Punktfolge $\{b_k\} \subset T$ gibt, so dass $b_k \in \varphi(a_{n_k})$ ist und die Folge $\{b_k\}$ gegen einen Punkt $b \in \varphi(a)$ konvergiert.

[1]) Vgl. Hausdorff, *Mengenlehre* (1927), S. 244.

Wir nennen die Abbildung $\varphi$ *stark-stetig* [1]), wenn es für jede Punktfolge $\{b_n\}$, wo $b_n \epsilon \varphi(a_n)$ für $n=1,2,\ldots$, eine gegen einen Punkt $b \epsilon \varphi(a)$ konvergierende Teilfolge $\{b_{n_k}\}$ der Folge $\{b_n\}$ gibt.

Für eine eindeutige Abbildung ist die schwache bezw. die starke Stetigkeit mit der gewöhnlichen Stetigkeit äquivalent.

Man kann nun folgenden Satz beweisen.

*Satz A. Durch eine eindeutige und beideseitig schwach-stetige Abbildung wird ein lokal zusammenhängender Raum stets auf einen ebensolchen Raum abgebildet.*

**4.** Sei $f$ eine Abbildung des Raumes $R$ auf einen Raum $T$.

Die Abbildung $f$ heisst *innere* [2]) *Abbildung* (oder innere Transformation), wenn $f$ eindeutig und stetig ist und ausserdem der folgenden Bedingung genügt:

($\alpha$) *Jede im Raume $R$ offene Menge $U$ geht durch die Abbildung $f$ in eine im Raume $T$ offene Menge $V=f(U)$ über.*

***Satz 4.*** *Wird ein lokal-zusammenhängender Raum $R$ auf einen Raum $T$ durch eine innere Transformation $f$ abgebildet, so ist der Raum $T$ lokal-zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei $V$ eine beliebige offene Teilmenge von $T$. Es genügt zu beweisen, dass jede Komponente $K$ von $V$ in $T$ offen ist. Wir bezeichnen mit $U$ die Menge aller Punkten $x \epsilon R$, für welche $f(x) \epsilon V$. Da die Abbildung $f$ stetig und die Menge $V$ offen ist, so ist $U$ eine offene Teilmenge von $R$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{K}$ die Klasse aller Komponenten von $U$. Es gilt also $U=\sum\limits_{Z \epsilon \mathfrak{K}} Z$ und, da $f(U)=V$ ist, so gilt:

$$V=f(U)=\sum_{Z \epsilon \mathfrak{K}} f(Z). \tag{1}$$

[1]) Diese Abbildungen bezeichnet W. Hurewicz als die (schlechthin) stegigen, s. Proceed. Ak. Amsterdam XXIX, S. 1014.

[2]) Diese Bezeichnung wurde von S. Stoilow, Ann. d. l'Ec. Norm. 1928, S 348, übrigens nur auf Abbildungen von ebenen Gebieten angewendet und zwar auf solche Abbildungen, die ausser der Bedingung ($\alpha$), noch folgende Bedingung, erfüllen:

($\alpha'$) *Das Bild jedes mehrpunktigen Kontinuums ist mehrpunktig.*

Für denselben Spezialfall wurden die *inneren Abbildungen*, unter dem Namen von *gebietstetigen Abbildungen* schon durch H. Weyl in seinem Werke „*Die Idee der Riemannschen Flächen*", S. 19 eingeführt.



Jede Menge $Z \epsilon \mathfrak{K}$ ist, als Komponente von $U$, zusammenhängend. Da $f$ stetig ist, so ist auch $f(Z)$ für $Z \epsilon \mathfrak{K}$ zusammenhängend. Daraus ergibt sich unmittelbar nach (1), dass jede Komponente $K$ von $V$ Summe von Mengen $f(Z)$ ist:

$$K=\sum_{Z \epsilon \mathfrak{K}_1} f(Z) \quad \textit{für eine Unterklasse } \mathfrak{K}_1 \textit{ von } \mathfrak{K}. \tag{2}$$

Da der Raum $R$ lokal-zusammenhängend ist, so ist jede Menge $Z \epsilon \mathfrak{K}$ offen (als eine Komponente der in $R$ offenen Menge $U$). Man erhält daraus, da $f$ eine innere Abbildung ist (vgl. Bedingung ($\alpha$)), dass jede Menge $f(Z)$ für $Z \epsilon \mathfrak{K}$ eine offene Teilmenge von $T$ ist und also, wegen (2), auch die Menge $K$ in $T$ offen ist, w. z. b. w.

Man könnte sich beim Beweise des Satzes 4 auf die Tatsache stützen, dass jede innere Abbildung eine eindeutige und beideseitig schwach-stetige Abbildung ist. Der Satz 4 folgt dann unmittelbar aus dem in 3. ausgesprochenen Satze $A$.

***Satz 5.*** *Jeder separable quasi-Peanosche Raum geht durch eine beliebige innere Abbildung in einen separablen quasi-Peanoschen Raum über* [1]).

*Beweis.* Definitionsgemäss ist ein quasi-Peanoscher Raum eine absolute $G_\delta$-Menge, die zusammenhängend und lokal-zusammenhängend ist.

1) Nach einem Satze von Sierpiński [2]) ist die Eigenschaft, eine separable absolute $G_\delta$-Menge zu sein, eine Invariante gegenüber der inneren Transformationen.

2) Der Zusammenhang ist eine Invariante für allgemeine stetige Abbildungen und umsomehr für die inneren Abbildungen.

Unser Satz ergibt sich nun unmittelbar aus 1), 2) und aus dem Satz 4.

**5.** In den nachstehenden Ausführungen werden wir uns oft mit Baumkurven beschäftigen. Wir geben zunächst einige leicht beweisbare Eigenschaften von Baumkurven, die wir später benützen.

[1]) Es gilt nebenbei folgender Satz: *Jeder quasi-Peanosche Raum geht durch eine beliebige innere Abbildung in einen quasi-Peanoschen Raum über.*

[2]) W. Sierpiński, Fund. Math. XVI, S. 173, wo der lediglich für ebene $G_\delta$-Mengen gebrachte Beweis durch eine leichte Modifikation auf allgemeine separable absolute $G_\delta$-Mengen ausgedehnt werden kann. Übrigens gilt der Satz sogar für die allgemeinsten absoluten $G_\delta$-Mengen, wie es in einer nächsten Arbeit bewiesen wird.

Eine Baumkurve ist ein lokal-zusammenhängendes Kontinuum, das keine einfache geschlossene Kurve enthält.

Bekanntlich werden die Punkte einer Baumkurve in folgende 3 Klassen geteilt: Endpunkte (Punkte 1ᵉʳ Ordnung nach Menger), gewöhnliche Punkte (Punkte 2ᵉʳ Ordnung) und Verzweigungspunkte (Punkte von mindestens 3ᵉʳ Ordnung).

Im Folgenden bezeichnet $B$ stets eine Baumkurve.

(1) *Ist $a$ ein Punkt $n^{er}$ Ordnung von $B$, so zerschneidet er $B$ in $n$ Teile, also $B-(a)$ zerfällt in $n$ Komponenten. Ein Endpunkt von $B$ zerschneidet die Baumkurve $B$ nicht.*

(2) *Es gibt höchstens abzählbar viele Verzweigungspunkte von $B$* [1]).

(3) *Für je zwei verschiedene Punkte $a, b \in B$ gibt es einen und nur einen einfachen Bogen in $B$, der $a$ und $b$ als Endpunkte enthält.*

Wir bezeichnen diesen Bogen stets, wenn kein Missverständnis entstehen kann, mit $\widehat{ab}$.

(4) *Jedes Teilkontinuum $B_1$ von $B$ ist auch eine Baumkurve. Enthält $B_1$ einen Endpunkt $b$ von $B$, so ist $b$ auch ein Endpunkt von $B_1$.*

(5) *Ist $b$ ein Endpunkt von $B$, so gibt es für je zwei Bögen $\widehat{a_1 b}$ und $\widehat{a_2 b}$ einen Bogen $\widehat{ab} \subset \widehat{a_1 b} \cdot \widehat{a_2 b}$.*

(6) *Für je drei Punkte $a, b, c \in B$, von denen keiner die Baumkurve $B$ zwischen den anderen zerschneidet, gibt es einen und nur einen Verzweigungspunkt $q$ von $B$, der die Kurve zwischen allen drei Punkten zerschneidet* d. h., dass die Punkte $a, b, c$ zu drei verschiedenen Komponenten der Menge $B-(q)$ gehören.

(6′) *Zerschneidet $q$ die Kurve $B$ zwischen den Punkten $a, b, c$, so gibt es keinen Punkt in $B$, der $B$ zwischen $q$ und jedem der Punkte $a, b, c$ zerschneidet.*

(7) *Ist $G$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $B$, so ist $\overline{G}$ eine Baumkurve, in der jeder Begrenzungspunkt von $G$* (d. h. ein Punkt aus $\overline{G}-G$) *ein Endpunkt ist.*

[1]) Nach (1) und nach dem allgemeinen Satz von C. Kuratowski und C. Zarankiewicz, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), S. 571.



(8) *Ist $\{B_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge zusammenhängender und zueinander fremder Teilmengen von $B$, so ist $\{B_n\}$ eine Nullfolge,*

d. h., dass jede Teilfolge $\{B_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, für welche es eine Punktfolge $\{a_k\}$ und einen Punkt $a$ mit den Eigenschaften $\{a_k\} \to a$ und $a_k \in B_{n_k}$, $k=1, 2, \ldots$, gibt, gegen den Punkt $a$ konvergiert, so dass also jede Umgebung des Punktes $a$ fast alle Mengen aus der Folge $\{B_{n_k}\}$ enthält [1]).

**6.** Eine Menge $B$ möge *Baumstrecke* heissen, wenn $B$ eine Baumkurve ist, und wenn in $B$ zwei verschiedene (übrigens beliebige) Punkte $e_1(B)$ und $e_2(B)$ festgelegt sind. Die letzteren werden *Enden* der Baumstrecke $B$ genannt.

Eine Baumstrecke $B'$ heisst eine *Teilbaumstrecke* der Baumstrecke $B$, wenn folgendende Bedingungen bestehen:

(1) $$B' \subset B,$$

(2) *Die Begrenzung von $B'$ rel. $B$* (d. h. die Menge $B' \cdot \overline{B-B'}$ *ist in der zweipunktigen Menge $(e_1(B'), e_2(B'))$ enthalten.*

(3) *Enthält $B'$ ein Ende von $B$, so ist dasselbe auch ein Ende von $B'$.*

Es gelten folgende leicht beweisbare Eigenschaften:

(I) *Ist $B''$ eine Teilbaumstrecke von $B'$ und $B'$ eine Teilbaumstrecke von $B$, so ist $B''$ eine Teilbaumstrecke von $B$.*

(II) *Ist $B'$ eine Teilbaumstrecke von $B$, so ist die Menge $B'-(e_1(B'), e_2(B'))$ rel. $B$ offen.*

Eine höchstens abzählbare Klasse (oder Folge) $\mathbf{Z}$ von Baumstrecken bildet eine (endliche oder unendliche) *Baumstreckenzerlegung* oder kürzer *$B$-Zerlegung* einer Menge $C$, wenn folgendes gilt:

(4) *$C$ ist die Summe aller Baumstrecken aus $\mathbf{Z}$.*

(5) *Je zwei Baumstrecken $B_1$ und $B_2$ aus $\mathbf{Z}$ haben höchstens einen gemeinsamen Punkt und zwar ein gemeinsames Ende.*

(6) *Jeder Punkt $a \in C$ gehört zu höchstens endlichvielen Baumstrecken aus $\mathbf{Z}$.*

[1]) Nullfolge heisst nach Menger eine Folge von Teilmengen eines metrischen Raumes mit gegen Null konvergierenden Durchmessern. Die hier angegebene *topologische* Definition von Nullfolge ist für kompakte Räume, bei *jeder* Metrisierung derselben mit der Menger'schen Definition äquivalent.

(7) *Ist $a \epsilon C$ und bezeichnet $S(a)$ die Summe aller Baumstrecken aus $Z$ die den Punkt $a$ enthalten, so liegt $a$ im Innern (rel. $C$) von $S(a)$,* d. h. in $S(a) - \overline{C - S(a)}$.

Man erhält unmittelbar folgende Eigenschaft:

(III) *Für eine endliche Baumstreckenklasse $Z$ folgen die Bedingungen* (6) *und* (7) *aus der Bedingung* (4).

Ist $Z$ eine $B$-Zerlegung einer Menge $C$ und sind alle Baumstrecken $B \epsilon Z$ Teilbaumstrecken einer Baumstrecke $B_0$ (es ist dann offenbar $C \subset B_0$), so heisst $Z$ eine *Teilbaumstreckenzerlegung* oder kürzer *Tb-Zerlegung* (von $C$) *rel.* $B_0$.

Bilden die Baumstrecken $\{B_n\}$ eine (endliche oder unendliche). *Tb*-Zerlegung von $C$ rel. $B$ und bilden ferner für jedes $B_n$ die Mengen $\{B_k^{(n)}\}_{k=1,2,\dots}$ eine (endliche oder unendliche) *Tb*-Zerlegung von $C_n$ rel. $B_n$, wobei

$$(8) \qquad (e_1(B_n), e_2(B_n)) \subset C_n$$

ist, so nennen wir die Klasse aller Mengen $\{B_k^{(n)}\}_{k=1,2,\dots}^{n=1,2,\dots}$ eine *Unterzerlegung* von $\{B_n\}$.

Mann beweist leicht folgende Eigenschaft:

(IV) *Ist $Z$ eine Tb-Zerlegung rel. $B$ und ist ferner $Z'$ eine Unterzerlegung von $Z$, so ist $Z'$ eine Tb-Zerlegung rel $B$.*

**7. *Hilfssatz 6.*** *Ist $B$ eine mit einer Metrik $(r)$ metrisierte Baumstrecke, so gibt es für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine endliche Tb-Zerlegung $Z$ rel. $B$ von $B$, so dass der Durchmesser $d(B')$ von jeder Baumstrecke $B' \epsilon Z$ kleiner als $\varepsilon$ ist.*

*Beweis*: Es gibt bekanntlich (da $B$ ein lokal-zusammenhängendes Kontinuum ist) ein $\eta > 0$, so dass:

$$(1) \qquad \textit{Ist } a, b \epsilon B \textit{ und } r(a, b) < \eta, \textit{ so ist } d(\widehat{ab}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Es gibt ferner (da $B$ in sich kompakt ist) eine endliche Folge von Punkten $\{p_n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$, so dass:

(2) *Für jedes $x \epsilon B$ gibt es einen Punkt $p_n$, so dass $r(x, p_n) < \eta$.*

Man kann offenbar die Punkte $p_n$ so auswählen, dass:

$$(3) \qquad N \geqslant 2, \ p_1 = e_1(B), \ p_2 = e_2(B).$$



Sind nun $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}$ irgend drei Punkte aus der Folge $\{p_n\}$, deren keiner zwischen den zwei anderen die Baumkurve $B$ zerschneidet, so bezeichnen wir mit $q_{n_1,n_2,n_3}$ den Verzweigungspunkt von $B$, der $B$ zwischen den Punkten $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}$ zerschneidet (vgl. **5**, (6)). Wir setzen ferner

$$(4) \qquad q_{n,n,n} = p_n.$$

Es gilt nun folgende Behauptung:

(5) *Für je drei Punkte $q_{n_1',n_2',n_3'}$, $q_{n_1'',n_2'',n_3''}$, $q_{n_1''',n_2''',n_3'''}$, deren keiner zwischen den zwei anderen $B$ zerschneidet, ist der zwischen diesen drei Punkten zerschneidende Punkt $q$ mit einem der Punkte $q_{n_1,n_2,n_3}$ identisch.*

In der Tat, nach **5**, (6) gehören die Punkte $q_{n_1',n_2',n_3'}$, $q_{n_1'',n_2'',n_3''}$, $q_{n_1''',n_2''',n_3'''}$ zu drei verschiedenen Komponenten $U_1$, $U_2$ und $U_3$ der Menge $B - (q)$. Wenigstens einer der Punkte $p_{n_1'}$, $p_{n_2'}$, $p_{n_3'}$ ist in $U_1$ enthalten, sonst wäre $B$ durch den Punkt $q$ zwischen $q_{n_1',n_2',n_3'}$ und jedem der Punkte $p_{n_1'}$, $p_{n_2'}$, $p_{n_3'}$ zerschnitten, was nach **5**, (6′) unmöglich ist. Es gibt also einen Punkt $p_{n_1} \epsilon U_1$ und, analog, die Punkte $p_{n_2} \epsilon U_2$ $p_{n_3} \epsilon U_3$, woraus ergibt sich definitionsgemäss, dass $q$ zwischen $p_{n_1}$, $p_{n_2}$, $p_{n_3}$ zerschneidet, also dass $q = q_{n_1,n_2,n_3}$ ist.

Die Anzahl der Punkte $q_{n_1,n_2,n_3}$ ist endlich $(< N^3)$. Wir bezeichnen die Menge aller Punkten $q_{n_1,n_2,n_3}$ mit $Q$. Es gilt offenbar:

$$(6) \qquad B - Q \textit{ ist eine in } B \textit{ offene Menge.}$$

Wir beweisen nun folgendes:

(7) *Jede Komponente der Menge $B - Q$ hat eine höchstens zweipunktige Begrenzung* (*rel* $B$).

Sei $U$ eine Komponente von $B - Q$. Nach (6), da $B$ lokal-zusammenhängend ist, ist $U$ in $B$ offen und also:

$$(8) \qquad (\textit{Begrenzung von } U) = \overline{U} - U = \overline{U} \cdot Q.$$

Wären nun in $\overline{U} - U$ drei verschiedene Punkte $q_1, q_2, q_3$ von $Q$ enthalten, so würde die Baumkurve $\overline{U}$ (vgl. **5**, (7)), also auch die Baumkurve $B$, zwischen keinem Paar dieser Punkte durch den dritten Punkt zerschnitten. Der Verzweigungspunkt $q$ von $B$, der $B$ zwischen den Punkten $q_1$, $q_2$, $q_3$ zerschneidet, müsste die Baumkurve

$\overline{U} \subset B$ zerschneiden und wäre also offenbar in $U$ enthalten. Nun aber nach (8) gilt es: $(q_1, q_2, q_3) \subset Q$, also nach Definition von $Q$ und nach (5) wäre auch $q \in Q$, was mit $q \in U$ und der Formel (8) im Widerspruch steht.

Damit ist die Behauptung (7) bewiesen.

Wir beweisen ferner:

(9) *Sind $U_1$ und $U_2$ zwei verschiedene Komponenten von $B - Q$, so ist $\overline{U}_1 \cdot \overline{U}_2$ eine höchstens einpunktige Menge.*

Zunächst gilt es offenbar

(10) $$\overline{U}_1 \cdot \overline{U}_2 = (\overline{U}_1 - U_1) \cdot (\overline{U}_2 - U_2).$$

Wären nun in $\overline{U}_1 \cdot \overline{U}_2$ zwei Punkte $q_1$ und $q_2$ enthalten, so gäbe es in $B$ zwei verschiedene einfache Bögen $L_1$ und $L_2$ mit den Endpunkten $q_1\, q_2$, so dass $L_1 \subset \overline{U}_1$ und $L_2 \subset \overline{U}_2$ (denn $\overline{U}_1$ und $\overline{U}_2$ sind Baumkurven und nach (10) und (7) kann nicht $L_1 = L_2$ sein) gegen die Behauptung 5, (3). Damit ist (9) bewiesen.

Sei $V$ die Summe aller Komponenten von $B - Q$, die die einpunktige Begrenzung $(q)$ besitzen, wo $q$ irgend ein Punkt aus $Q$ ist. Da $B - Q$ aus höchstens abzählbar vielen Komponenten besteht, so ist, falls $V \neq 0$, $V = (U_1 + U_2 + \ldots)$, wo $U_n$ eine Komponente von $B - Q$ und $\overline{U}_n - U_n = (q)$ ist. Nach einem allgemeinen in lokalzusammenhängenden Räumen geltenden Satze [1]) ist es

$$\overline{V} - V \subset \overline{[(\overline{U}_1 - U_1) + (\overline{U}_2 - U_2) + \ldots]} = (q),$$

es gilt also offenbar $\overline{V} - V = (q)$. Wir können infolgedessen behaupten:

(11) *Gibt es eine Komponente von $B - Q$ mit der Begrenzung $(q)$ und ist $V$ die Summe aller solchen Komponenten, so ist die Begrenzung von $V$ gleich $(q)$.*

Es ergibt sich daraus unmittelbar folgende Eigenschaft von $V$:

(12) $\overline{V}$ *ist eine Baumkurve.*

Wir definieren nun die zum beweis des Hilfssatzes 6 erforderliche $Tb$-Zerlegung $\boldsymbol{Z}$ folgendermassen:

[1]) Vgl. C. Kuratowski, Fund. Math. VII, S. 140.



***Def. I.*** 1⁰ Ist $U$ eine Komponente von $B - Q$ mit einer zweipunktigen Begrenzung $(q_1, q_2)$, so setzen wir: $\overline{U} \in \boldsymbol{Z}$, $e_1(\overline{U}) = q_1$, $e_2(\overline{U}) = q_2$. Dabei ist für jede Komponente von $B - Q$, die zwei Begrenzungspunkten hat, die Reihenfolge der Begrenzungspunkten als festgelegt anzusehen.

2⁰. Ist für einen Punkt $q \in Q$ eine Komponente von $B - Q$ vorhanden, die die einpunktige Begrenzung $(q)$ besitzt, und bezeichnet ferner $V$ die Summe aller Komponenten von $B - Q$ mit dieser einpunktigen Begrenzung, so wählen wir in $V$ einen beliebigen Punkt $a$ aus und setzen dann:

$$\overline{V} \in \boldsymbol{Z}, \quad e_1(\overline{V}) = q, \quad e_2(\overline{V}) = a.$$

3⁰. $\boldsymbol{Z}$ besteht aus lauter durch 1⁰ und 2⁰ gegebenen Mengen.

Zunächst bemerken wir, dass jeder Punkt $q \in Q$ ein Begrenzungspunkt von einer Komponente von $B - Q$ ist (denn, da $Q$ endlich ist, gibt es einen hinreichend nahe zu $q$ liegenden Punkt $a$, so dass $\widehat{aq} \cdot Q = (q)$ und also dass die Menge $[\widehat{aq} - (q)]$ in einer Komponente $U$ von $B - Q$ liegt; es gilt dann $q \in \overline{U} - U$).

Auf Grund dieser Bemerkung und der Def. 1 beweist man unmittelbar nach (3), (4), Definition von $Q$, (7), (9), (11) und (12), dass $\boldsymbol{Z}$ in der Tat eine $Tb$-Zerlegung rel. $B$ von $B$ ist.

Es bleibt zu beweisen, dass für jedes $C \in \boldsymbol{Z}$ die Ungleichheit $d(C) < \varepsilon$ gilt.

Sei $x$ ein beliebiger Punkt von $C$. Nach (2) und (4) gibt es einen Punkt $q \in Q$, so dass $r(x, q) < \eta$, also nach (1) $d(\widehat{xq}) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Daraus erhält man, da $q$ offenbar kein innerer Punkt von $C$ ist, dass es einen Begrenzungspunkt also ein Ende $e_j(C) \in \widehat{xq}$ gibt, so dass

(13) $$r(x, e_j(C)) \leqslant d(\widehat{xq}) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für ein } j = 1, 2.$$

Besitzt $C$ nur einen Begrenzungspunkt $q = e_j(C)$, so ergibt sich aus (13):

(14) $$d(C) = \sup_{x_1, x_2 \in C} r(x_1, x_2) \leqslant \sup_{x_1, x_2 \in C} [r(x_1, e_j(C)) + r(x_2, e_j(C))] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Sind die beiden Enden $e_1(C)$ und $e_2(C)$ Begrenzungspunkte von $C$, so gibt es einen Punkt $a \in C$, so dass

$$(15) \qquad r(a, e_j(C)) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \textit{ für jedes } j = 1, 2,$$

denn sonst wäre $C$, seinem Zusammenhange zuwider, in zwei abgeschlossene zueinander fremde Mengen $C_1$ und $C_2$ zerlegbar, wo $C_j$ die Menge aller Punkte $x$ aus $C$ mit $r(x, e_j(C)) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ bezeichnet. Da $C$ in sich kompakt ist, so gibt es zwei Punkte $(x_1, x_2) \subset C$, so dass:

$$(16) \qquad d(C) = r(x_1, x_2).$$

Nach (13) gibt es zwei Indizes $j_1 = 1, 2$, so dass:

$$(17) \qquad r(x_1, e_{j_1}(C)) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad r(x_2, e_{j_2}(C)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nach (16), (17) und (15) erhält man endlich:

$$d(C) = r(x_1, x_2) \leqslant r(x_1, e_{j_1}(C)) + r(e_{j_1}(C), e_{j_2}(C)) + r(e_{j_2}(C), x_2) < \frac{\varepsilon}{4} +$$
$$+ r(a, e_{j_1}(C)) + r(a, e_{j_2}(C)) + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \quad \text{w. z. b. w.}$$

*Bemerkung zum Hilfssatze 6*: Aus dem vorstehenden Beweise ist es leicht ersichtlich, dass man die Enden der Baumstrecken aus $\boldsymbol{Z}$ so auswählen kann, dass sie (eventuell ausser den mit $e_1(B)$ oder $e_2(B)$ identischen Enden) keine Endpunkte der Baumkurve $B$ seien.

***Hilfssatz 7.*** *Ist $B$ eine Baumstrecke und $b$ ein von den Enden von $B$ verschiedener Endpunkt von $B$, so gibt es eine $Tb$-Zerlegung $\{B_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ rel. $B$ von der Menge $B-(b)$ mit folgenden Eigenschaften:*

$(\beta)$ $\qquad e_1(B) \neq e_j(B_n) \neq e_2(B)$ *für* $j = 1, 2,\ n = 2, 3, 4, \dots$

$(\beta')$ $\qquad e_2(B_n) = e_1(B_{n+1})$ *für* $n = 1, 2, 3, \dots$

$(\beta'')$ $\qquad B_{n_1} \cdot B_{n_2} = 0$ *für* $|n_1 - n_2| \geqslant 2,\ n_1 + n_2 \geqslant 3.$

*Beweis.* Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder (i) *eines der Enden von $B$ zerschneidet $B$ zwischen dem anderen Ende und dem Endpunkte $b$*, oder (ii) *keiner der drei Punkten $e_1(B)$, $e_2(B)$, und $b$ zerschneidet $B$ zwischen den zwei anderen.*



(i) Sei also $e_{j_1}(B)$ das Ende, das zwischen dem anderen Ende $e_{j_2}(B)$ und dem Endpunkte $b$ die Baumkurve $B$ zerschneidet. Die Menge $B-(e_{j_1}(B))$ zerfällt dann in Komponenten, von welchen eine den Punkt $b$ und eine andere den Punkt $e_{j_2}(B)$ enthält. Wir setzen nun:

(18) $U_0$ = *Summe aller den Punkt $b$ nicht enthaltender Komponenten von $B-(e_{j_1}(B))$.*

$$(19) \qquad B_0 = \overline{U}_0 = U_0 + e_{j_1}(B)),\ e_1(B_0) = e_{j_2}(B),\ e_2(B_0) = e_{j_1}(B).$$

(20) $V$ = *die den Punkt $b$ enthaltende Komponente von $B-(e_{j_1}(B))$.*

$$(21) \qquad C = \overline{V} = V + (e_{j_1}(B)),\ e_1(C) = e_{j_1}(B),\ e_2(C) = b.$$

Die Baumstrecken $B_0$ und $C$ bilden offenbar eine $Tb$-Zerlegung von $B$ rel. $B$.

In diesem Falle genügt es also zum Beweis des Hilfssatzes, eine $Tb$-Zerlegung rel. $C$ von $C-(b)$ gemäss den Bedingungen $(\beta)$, $(\beta')$ und $(\beta'')$ aufzustellen.

Es gibt offenbar eine Punktfolge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(22) \qquad a_0 = e_1(C);\ a_{n+1} \in \widehat{a_n b},\ n = 0, 1, 2, 3, \dots;\ a_i \neq a_j \textit{ für } i \neq j.$$

(23) *Die Punkte $a_n$ für $n = 1, 2, \dots$, sind gewöhnliche Punkte der Baumkurve $B$.*

$$(24) \qquad \{a_n\} \to b.$$

Nach (24) ist die Menge $\{a_n\} + (b)$ abgeschlossen, also die Menge $C - [\{a_n\} + (b)]$ ist in $C$ offen und zerfällt in rel. $C$ offene Komponenten. Wir beweisen nun:

(25) *Für jedes $n \geqslant 1$ gibt es eine und nur eine Komponente von $C - [\{a_n\} + (b)]$ mit der Begrenzung $(a_{n-1}, a_n)$.*

(26) *Für jede Komponente $U$ von $C - [\{a_n\} + (b)]$ gibt es ein $n \geqslant 1$, so dass die Begrenzung von $U$ mit $(a_{n-1}, a_n)$ identisch ist.*

In der Tat: es folgt unmittelbar aus (22), dass für jedes $n \geqslant 1$ die Mengen $[\widehat{a_{n-1} a_n} - (a_{n-1}, a_n)]$ und $[\{a_n\} + (b)]$ punktfremd sind. Da die Menge $[\widehat{a_{n-1} a_n} - (a_{n-1}, a_n)]$ zusammenhängend ist, so liegt sie in einer Komponente $U_n$ von $C - [\{a_n\} + (b)]$.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die Punkte $a_{n-1}$ und $a_n$ in der Begrenzung von $U_n$ liegen. Wäre aber noch ein Punkt $p$ in der Begrenzung von $U_n$ vorhanden, so hätten wir $p \epsilon [\{a_n\} + (b)]$ und die Baumkurve $C$, also umsomehr die Baumkurve $\overline{U}_n$, würde nach (22) durch einen der Begrenzungspunkte $a_{n-1}, a_n, p$ zwischen zwei anderen zerschnitten, der Behauptung **5**, (7) zuwider.

Wäre nun eine zweite Komponente $U'$ mit der Begrenzung $(a_{n-1}, a_n)$ vorhanden, so würde der Bogen $\widehat{a_{n-1} a_n}$ in der Baumkurve $\overline{U'}$ enthalten und wir hätten $[\widehat{a_{n-1} a_n} - (a_{n-1} a_n)] \subset U'$, woher, nach Definition von $U_n$, $U' = U_n$ folgt, unserer Annahme zuwider. Damit ist (25) vollständig bewiesen.

Sei jetzt $U$ eine beliebige Komponente von $C - [\{a_n\} + (b)]$ und $q$ ein Begrenzungspunkt von $U$. Zuerst beweisen wir, dass $q \neq b$ ist. In der Tat, ist $q = b$, so nehmen wir einen beliebigen Punkt $p \epsilon U$ und nach **5**, (7) gilt dann $\widehat{pb} \subset U + (b)$. Nach **5**, (5) gibt es einen Punkt $a$, so dass $\widehat{ab} \subset \widehat{pb} \cdot \widehat{a_0 b} \subset [U + (b)] \cdot \widehat{a_0 b}$ ist.

Nach (22) erhält man daraus unmittelbar, dass fast alle Punkte $a_n$ im Bogen $\widehat{ab}$ also auch in $U$ enthalten sind, gegen die Annahme, dass $U$ eine Komponente von $C - [\{a_n\} + (b)]$ ist.

Da offenbar $q \epsilon [\{a_n\} + (b)]$ ist, so gilt notwendigerweise $q = a_{n'}$ *für ein* $n' = 0, 1, 2, \ldots$

Nun gilt $U = U_1$ im Falle $n' = 0$ und $U = U_{n+1}$ oder $U = U_n$ im Falle $n' \geqslant 1$; sonst wäre, wie leicht ersichtlich, im Falle $n' = 0$ der Punkt $a_0 = e_1(C)$ von mindestens zweiter Ordnung in $C$, den Formeln (20), (21) und **5**, (7) zuwider; und im Falle $n' \geqslant 1$ wäre $a_{n'}$ ein Verzweigungspunkt von $C$, im Widerspruch mit der Formel (23).

Damit ist auch (26) bewiesen.

Wir setzen nun:

(27) $B_n = \overline{U}_n = U_n + (a_{n-1}, a_n), \quad e_1(B_n) = a_{n-1}, \quad e_2(B_n) = a_n, \quad$ *wo* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Nach (20), (21), Definition von $U_n$ und (27) ist es unmittelbar zu erkennen, dass die Bedingungen ($\beta$), ($\beta'$) und ($\beta''$) erfüllt sind. Man schliesst auch leicht, dass $B_n$, für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Teilbaumstrecke von $C$ ist und, dass die Folge $\{B_n\}_{n=1,2,\ldots}$ den Bedingungen **6**, (4), **6**, (5) und **6**, (6) für eine $B$-Zerlegung von der Menge $C - (b)$ genügt. Es bleibt nur **6**, (7) zu beweisen.



Aus der Definition von $B_n$ folgern wir unmittelbar, dass jede der Folgen $\{B_{2k}\}_{k=1,2,\ldots}$ und $\{B_{2k-1}\}_{k=1,2,\ldots}$ aus zueinander fremden Teilkontinuen der Baumkurve $C$ besteht und also nach **5**, (8) eine N u l l f o l g e ist. Es bildet also offenbar auch die Folge $\{B_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge und es ergibt sich aus $a_n \epsilon B_n$ und $\{a_n\} \to b$ (nach (24)):

(28) *Die Mengenfolge* $\{B_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *konvergiert gegen den Punkt* $b$.

Um **6**, (7) für unsere Folge $\{B_n\}$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass keiner der Punkte $p \epsilon C - (b)$, in der abgeschlossenen Hülle der Summe aller den Punkt $p$ nicht enthaltender Mengen $B_n$ liegt. Ist nun $\{B_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ die Folge aller $p$ nicht enthaltender Mengen $B_n$, so ist nach (28)

$$\overline{\sum_{k=1}^{\infty} B_{n_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{n_k} + (b)$$

und also, da $p \epsilon C - (b)$ ist, liegt $p$ in $\overline{\sum_{k=1}^{\infty} B_{n_k}}$ tatsächlich nicht.

Der Fall (i) des Hilfszatzes is damit bewiesen.

(ii) Da keiner der Punkte $e_1(B)$, $e_2(B)$ und $b$ zwischen den zwei anderen die Baumkurve $B$ zerschneidet, so gibt es nach **5**, (6) einen zwischen den drei Punkten $e_1(B)$, $e_2(B)$ und $b$ die Baumkurve zerschneidenden Punkt $a$. Jede Komponente der Menge $B - (a)$ kann also höchstens einen der drei Punkte $e_1(B)$, $e_2(B)$ und $b$ enthalten. Wir setzen:

(29) $U_0$ *ist die Summe aller, die Punkte* $e_2(B)$ *und* $b$ *nicht enthaltender Komponenten von* $B - (a)$.

(30) $B_0 = \overline{U}_0 = U_0 + (a), \quad e_1(B_0) = e_1(B), \quad e_2(B_0) = a.$

(31) $U_1$ *ist die* $e_2(B)$ *enthaltende Komponente von* $B - (a)$.

(32) $B_1 = \overline{U}_1 = U_1 + (a). \quad e_1(B_1) = e_2(B), \quad e_2(B_1) = a.$

(33) $V$ *ist die* $b$ *enthaltende Komponente von* $B - (a)$.

(34) $C = \overline{V} = V + (a), \quad e_1(C) = a, \quad e_2(C) = b.$

Die Baumstrecken $B_0$, $B_1$ und $C$ bilden offenbar eine *Tb*-Zerlegung von $B$ rel. $B$.

Wir definieren nun die $Tb$-Zerlegung von $C-(b)$ rel. $C$ ganz analog, wie im Falle (i), nur mit dem Unterschiede, dass die im Falle (i) mit $B_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ bezeichnete Menge jetzt mit $B_{n+1}$ bezeichnet wird.

In dieser Weise wird mit Rücksicht auf (30) und (32) die Folge $\{B_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ definiert und dann ganz analog wie im Falle (i) bewiesen, dass alle Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt sind.

Damit ist der Beweis vollendet.

*Bemerkung zum Hilfssatze 7*: Man erkennt sofort, dass die Enden von $B_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, eventuell mit Ausnahme der mit $e_1(B)$ oder $e_2(B)$ identischen Enden, keine Endpunkten der Baumkurve $B$ sind.

***Hilfssatz 8:*** *Ist $B$ eine Baumstrecke, so gibt es für jede natürliche Zahl $m$ eine, aus $m$ Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ bestehende $Tb$-Zerlegung von $B$, und zwar mit folgenden Eigenschaften:*

$(\gamma)$ $e_1(B_1)=e_1(B)$, $e_2(B_m)=e_2(B)$ *und* $e_2(B_k)=e_1(B_{k+1})$ *für* $k=1, 2, \ldots, (m-1)$

$(\gamma')$ $$B_{k_1}\cdot B_{k_2}=0 \quad \textit{für} \quad |k_1-k_2|\geqslant 2.$$

*Beweis*: Es gibt offenbar $m-1$ Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, so dass:

(35) $a_1 \in \widehat{e_1(B)\,e_2(B)}$, $a_{k+1} \in \widehat{a_k\, e_2(B)}$ *für* $k=1, 2, \ldots, m-2$.

(36) $e_1(B)\neq a_k \neq e_2(B)$ *für* $k=1, \ldots, (m-1)$ $a_i\neq a_j$ *für* $i\neq j$.

(37) $a_k$ *ist für* $k=1, 2, \ldots, (m-1)$ *ein gewöhnlicher Punkt der Baumkurve* $B$.

Man zeigt nun in ähnlicher Weise, wie beim Beweise des Hilfssatzes 7 die Behauptungen (25) und (26) hergeleitet wurden, dass die in $B$ offene Menge $B-\{a_k\}$ genau aus $m$ Komponenten $U_1, U_2, \ldots, U_m$ besteht, welche folgende Eigenschaften aufweisen:

(38) $\overline{U}_1=U_1+(a_1)$, $\overline{U}_m=U_m+(a_{m-1})$ *und* $\overline{U}_k=U_k+(a_{k-1}, a_k)$ *für* $k=2, 3, \ldots, (m-1)$.

(39) $$e_1(B)\in U_1, \quad e_2(B)\in U_m.$$

Auf Grund von (38) und (39) kann man nun setzen:

(40) $$B_1=\overline{U}_1,\ e_1(B_1)=e_1(B),\ e_2(B_1)=a_1,$$



(41) $B_k=\overline{U}_k$, $e_1(B_k)=a_{k-1}$, $e_2(B_k)=a_k$ *für* $k=2, 3, \ldots, (m-1)$,

(42) $$B_m=\overline{U}_m,\ e_1(B_m)=a_{m-1},\ e_2(B_m)=e_2(B).$$

Wie ersichtlich, genügen die in (40), (41) und (42) definierten Baumstrecken $B_k$ tatsächlich den Bedingungen $(\gamma)$ und $(\gamma')$, w. z. b. w.

*Bemerkung zum Hilfssatze 8*. Es ist unmittelbar zu erkennen, dass die Enden von $B_k (k=1, 2, \ldots, m)$, eventuell mit Ausnahme der mit $e_1(B)$ oder $e_2(B)$ identischen Enden, keine Endpunkten der Baumkurve $B$ sind.

**8.** ***Satz 9:*** *Ist $A=B-E$, wo $B$ eine Baumkurve und $E$ eine abzählbare, in $B$ dichte Menge von Endpunkten von $B$ ist, und ist ferner $R$ ein quasi-Peanoscher separabler Raum, so gibt es eine innere, $A$ auf $R$ abbildende Transformation $\varphi$* [1]).

*Beweis:* Sei $(r)$ eine der Baumkurve $B$ *entsprechende* Metrik [2]) und $(\varrho)$ eine dem quasi-Peanoschen Raume $R$ entsprechende vollständige Metrik.

Da $R$ separabel ist, so gibt es in $R$ eine Folge offener und zusammenhängender Mengen $\{W_n\}$ von der Eigenschaft:

(1) *Für jeden Punkt $p\in R$ und für jede Umgebung $U$ von $p$ gibt es ein natürliches $n$, so dass $p\in W_n\subset \overline{W}_n\subset U$ gilt,*

Wir können jedenfalls annehmen, dass:

(2) $$W_1=R.$$

Da die Menge $E$ abzählbar ist, so kann man setzen:

(3) $$E=\{b_n\}_{n=1,2,\ldots};\ b_i\neq b_j \quad \textit{für} \quad i\neq j.$$

Um die Abbildung $\varphi$ zu bestimmen, definieren wir zuerst eine Folge von $B$-Zerlegungen $Z^{(i)}$ für $i=0, 1, 2, \ldots$ und gleichzeitig eine Operation $\psi$, die

(4) *jeder Menge $B'\in Z^{(i)}$, wo $i=0, 1, 2, \ldots$, eine Menge $\psi(B')\in\{W_n\}$ zuordnet,*

[1]) Man kann diese Abbildung $\varphi$ so bestimmen, dass auch die zusätzliche Bedingung $(\alpha')$ von S. Stoïlow, s. die Fussnote [2]) S. 96 erfüllt sei.

[2]) d. h. in $B$ definierte und dort einen mit dem (durch die Topologie von $B$) vorausgegebenen identischen *Limesbegriff* ergebende Metrik.

(5) *jedem Ende* $e_j(B')$, *wo* $j=1, 2$, $B' \epsilon \mathbf{Z}^{(i)}$ *und* $i=0, 1, 2, \ldots$, *einen Punkt* $\psi[e_j(B')] \epsilon \psi(B')$ *zuordnet.*

***Def. II.*** 1° Wir wählen in der Baumkurve $B$ zwei verschiedene Punkte $a_1$ und $a_2$ aus, die keine Endpunkte von $B$ sind, dann im Raume $R$ zwei beliebige Punkte $p_1$ und $p_2$ und setzen:

$$B^{(0)} = B, \quad e_1(B^{(0)}) = a_1, \quad e_2(B^{(0)}) = a_2,$$

$$\psi(B^{(0)}) = R = W_1, \quad \psi[e_1(B^{(0)})] = p_1, \quad \psi[e_2(B^{(0)})] = p_2,$$

$\mathbf{Z}^{(0)}$ *ist die aus einer Baumstrecke* $B^{(0)}$ *bestehende* $B$*-Zerlegung.*

Es ist sofort zu bemerken, dass die hier definierte $B$-Zerlegung $\mathbf{Z}^{(0)}$ und die Operation $\psi$ die Bedingungen (4), (5) und ausserdem noch folgende Bedingungen (für $i=0$) erfüllen:

(6) $\mathbf{Z}^{(i)}$ *ist eine Tb-Zerlegung rel.* $B^{(0)}$.

(7) *Keines der Enden der Baumstrecken aus* $\mathbf{Z}^{(i)}$ *ist ein Endpunkt von* $B$.

2° Es seien für ein $i \geqslant 0$ die $B$-Zerlegung $\mathbf{Z}^{(i)}$, die Mengen $\psi(B^{(i)})$ und die Punkte $\psi[e_j(B^{(i)})]$ für alle $B^{(i)} \epsilon \mathbf{Z}^{(i)}$ gemäss den Bedingungen (4), (5), (6) und (7) bereits definiert.

Wir nehmen eine beliebige Baumstrecke $B^{(i)} \epsilon \mathbf{Z}^{(i)}$ in Betracht und setzen:

(8) $b_{n_i}$ *ist der erste in* $B^{(i)}$ *liegende Punkt aus der Folge* $\{b_n\}$.

Es gibt gewiss einen solchen Punkt, denn nach (6) und 6, (II) enthält $B^{(i)}$ innere Punkte rel. $B$ und die Menge $E=\{b_n\}$ in $B$ dicht ist.

Sei $\{W_{n_k}\}$ die Folge aller Mengen aus der Folge $\{W_n\}$, für welche

(9) $$\overline{W}_{n_k} \subset \psi(B^{(i)}), \quad \delta(W_{n_k}) < \frac{1}{i+1}$$

ist, wo $\delta(M)$ für $M \subset R$ den Durchmesser von $M$ in der Metrik $(\varrho)$ bezeichnet.

Da nach (4) $\psi(B^{(i)}) \epsilon \{W_n\}$, also $\psi(B^{(i)})$ in $R$ offen ist, so enthält die Menge $\psi(B^{(i)})$ für jeden ihrer Punkte eine beliebig kleine Umgebung und nach (1) folgt es daraus unmittelbar, dass der Punkt



$p \epsilon \psi(B^{(i)})$ zu einer Menge $W_{n_k}$ gehört, also, wegen (9), dass:

(10) $$\psi(B^{(i)}) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{n_k}.$$

Bekanntlich gibt es (nach (10) und (5), da $\psi(B^{(i)})$ zusammenhängend ist) in der Klasse (Folge) $\{W_{n_k}\}$ eine die Punkte $\psi[e_1(B^{(i)})]$ und $\psi[e_2(B^{(i)})]$ verbindende und aus $N$ ($N$ eine natürliche Zahl) Mengen $(U_1, U_2, \ldots, U_N)$ bestehende *Mengenkette* [1]), d. h. dass

(11) $\psi[e_1(B^{(i)})] \epsilon U_1$, $\psi[e_2(B^{(i)})] \epsilon U_N$, $U_j \cdot U_{j+1} \neq 0$ *für* $j=1, 2, \ldots, (N-1)$,

(12) $$U_j \epsilon \{W_{n_k}\} \quad \textit{für} \quad j=1, 2, \ldots, N.$$

Man kann nun leicht alle Mengen aus der Folge $\{W_{n_k}\}$ in eine unendliche Kette $\{V_n\}$ umordnen und folglich haben:

(13) $$V_n \cdot V_{n+1} \neq 0 \quad \textit{für} \quad n=1, 2, \ldots$$

(14) *Die Klasse aller Mengen* $V_n$ *ist mit der Klasse aller Mengen* $W_{n_k}$ *identisch.*

Es kann dabei jede Menge aus $\{W_{n_k}\}$ beliebig oft in der Kette $\{V_n\}$ vorkommen. Man kann stets annehmen, dass

(15) $$V_m = U_m \quad \textit{für} \quad m=1, 2, \ldots, N.$$

Nach (11), (13) und (15) gibt es Punkte $p_j$, $j=0, 1, 2, \ldots, N$ und Punkte $q_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, so dass:

(16) $p_0 = \psi[e_1(B^{(i)})]$, $p_N = \psi[e_2(B^{(i)})]$, $p_j \epsilon U_j \cdot U_{j+1}$ *für* $j=1, 2, \ldots, (N-1)$.

(17) $q_0 = \psi[e_1(B^{(i)})]$, $q_n \epsilon V_n \cdot V_{n+1}$ *für* $n=1, 2, \ldots$

Nach dem Hilfssatze 8, der Bemerkung zum Hilfssatze 8 und nach (7) gibt es eine, aus $N$ Baumstrecken $C_1, C_2, \ldots, C_N$ bestehende $Tb$-Zerlegung rel. $B^{(i)}$ von $B^{(i)}$ mit folgenden Eigenschaften:

(18) $e_1(C_1) = e_1(B^{(i)})$, $e_2(C_N) = e_2(B^{(i)})$, $e_2(C_k) = e_1(C_{k+1})$ *für* $k=1, 2, \ldots, (N-1)$.

(19) $C_{k_1} \cdot C_{k_2} = 0$ *für* $|k_1 - k_2| \geqslant 2$

[1]) Vgl. z. B. N. Aronszajn, Fund. Math. XV, S. 229.

(20) *Keines der Enden von $C_k$, $k=1, 2, \ldots, N$, ist ein Endpunkt von $B$.*

Nach dem Hilfssatze 6, der Bemerkung zum Hilfssatze 6 und nach (20) gibt es für jede Baumstrecke $C_k$ eine endliche $Tb$-Zerlegung $\mathfrak{Z}_k$ von $C_k$ rel. $C_k$ mit folgenden Eigenschaften:

(21) $$d(C) < \frac{1}{i+1} \text{ für jedes } C \in \mathfrak{Z}_k \text{ und } k=1, 2, \ldots, N$$

(22) *Keines der Enden der Baumstrecken aus $\mathfrak{Z}_k$, wo $k=1, 2, \ldots, N$, ist ein Endpunkt von $B$.*

Als Punkt aus der Menge $E=\{b_n\}$ ist $b_{n_i}$ ein Endpunkt von $B$. Daraus erhält man, nach (8), (20) und (22), da die Baumstrecken $C_k$ eine $Tb$-Zerlegung von $B^{(i)}$ rel. $B^{(i)}$ bilden und, da $\mathfrak{Z}_k$ eine $Tb$-Zerlegung von $C_k$ rel. $C_k$ ist, dass es einen und nur einen Index $k_0$ und eine und nur eine Baumstrecke $C^{(k_0)}$ gibt, so dass:

(23) $$b_{n_i} \in C^{(k_0)} \in \mathfrak{Z}_{k_0}.$$

Nach Hilfssatz 7, der Bemerkung zum Hilfssatze 7 und nach (23) gibt es eine $Tb$-Zerlegung $\{C_n^{(k_0)}\}_{n=0,1,2,\ldots}$ von $[C^{(k_0)}-(b_{n_i})]$ rel. $C^{(k_0)}$ mit folgenden Eigenschaften:

(24) $$e_1(C^{(k_0)}) \neq e_j(C_n^{(k_0)}) \neq e_2(C^{(k_0)}) \quad \text{für} \quad j=1, 2, \quad n=2, 3, 4, \ldots,$$

(25) $$e_2(C_n^{(k_0)}) = e_1(C_{n+1}^{(k_0)}) \quad \text{für} \quad n=1, 2, \ldots,$$

(26) $$C_{n_1}^{(k_0)} \cdot C_{n_2}^{(k_0)} = 0 \quad \text{für} \quad |n_1-n_2| \geqslant 2, \quad n_1+n_2 \geqslant 3,$$

(27) *Keines der Enden $e_j(C_n^{(k_0)})$, $j=1, 2$, $n=0, 1, 2, \ldots$ ist ein Endpunkt von $B$.*

Wir definieren nun die Unterzerlegungen $\mathfrak{Z}_k'$ von $\mathfrak{Z}_k$ wie folgt:

(28) $$\mathfrak{Z}_k' = \mathfrak{Z}_k \quad \text{für} \quad k=1, 2, \ldots, N \quad \text{und} \quad k \neq k_0$$

(29) $$\mathfrak{Z}_{k_0}' = [\mathfrak{Z}_{k_0} - (C^{(k_0)})] + \{C_n^{(k_0)}\}_{n=0,1,2,\ldots}$$

und setzen:

(30) $$\text{Für} \quad n=3, 4, \ldots: \quad \psi(C_n^{(k_0)}) = V_{n-3+k_0};$$

(31) *Für jede Baumstrecke $C \in \mathfrak{Z}_{k_0}' - \{C_n^{(k_0)}\}_{n=3,4,\ldots}$: $\psi(C) = U_{k_0} = V_{k_0}$;*

(32) *Für jede Baumstrecke $C \in \mathfrak{Z}_k'$, wo $k=1, 2, \ldots, N$, $k \neq k_0$: $\psi(C) = U_k = V_k$;*



(33) *Für* $e_j(C) = e_1(C_k)$, *wo* $j=1, 2$, $C \in \mathfrak{Z}_k'$, $k=1, 2, \ldots, N$: $\psi[e_j(C)] = p_{k-1}$;

(34) *Für* $e_j(C) = e_2(C_k)$, *wo* $j=1, 2$, $C \in \mathfrak{Z}_k'$, $k=1, 2, \ldots, N$: $\psi[e_j(C)] = p_k$;

(35) *Für* $j=1, 2$, $C \in \mathfrak{Z}_k'$, $k=1, 2, \ldots, N$, *wo* $e_1(C_k) \neq e_j(C) \neq e_2(C_k)$ *und* $C \neq C_n^{(k_0)}$ *für* $n=3, 4, \ldots$: $\psi[e_j(C)] = q_{k-1} \in V_k = U_k$;

(36) *Für* $n=3, 4, \ldots$: $\psi[e_1(C_n^{(k_0)})] = q_{n-4+k_0}$ und $\psi[e_2(C_n^{(k_0)})] = q_{n-3+k_0}$.

Setzen wir ferner:

(37) $$\mathfrak{Z}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \mathfrak{Z}_k',$$

so bildet $\mathfrak{Z}^{(i)}$ eine Unterzerlegung der $Tb$-Zerlegung $\{C_k\}$ und, wie man leicht nach (28), (29) und auf Grund der Definition von $\mathfrak{Z}_k$ und $\{C_n^{(k_0)}\}$ einsieht,

(38) *$\mathfrak{Z}^{(i)}$ bildet eine $Tb$-Zerlegung von $(B^{(i)}-(b_{n_i}))$ rel. $B^{(i)}$.*

Da die Baumstrecke $B^{(i)}$ aus der $B$-Zerlegung $Z^{(i)}$ beliebig ausgewählt wurde, so können wir annehmen, dass $\mathfrak{Z}^{(i)}$ in der soeben beschriebenen Weise für j e d e Baumstrecke $B^{(i)}$ aus $Z^{(i)}$ gebildet sind.

Wir setzen nun:

(39) $$Z^{(i+1)} = \sum \mathfrak{Z}^{(i)},$$

wo sich $\sum$ auf die $Tb$-Zerlegungen $\mathfrak{Z}^{(i)}$ rel. aller Baumstrecken $B^{(i)} \in Z^{(i)}$ erstreckt.

Es ist evident, dass $Z^{(i+1)}$ eine Unterzerlegung von $Z^{(i)}$ ist; nach (6) und 6, (IV) erfüllt $Z^{(i+1)}$ die Bedingung (6). Nach (20), (22) und (27) erfüllt ferner $Z^{(i+1)}$ auch die Bedingung (7). Durch die Festsetzungen (30)—(36) ist dann die Operation $\psi$ für alle Baumstrecken aus $Z^{(i+1)}$ und ihre Enden gemäss den Bedingungen (4) und (5) bestimmt.

Damit ist die Definition der $B$-Zerlegungen $Z^{(i)}$ für $i=0, 1, 2, \ldots$, sowie die Definition der Opération $\psi$ vollendet.

Wir beweisen jetzt einige Eigenschaften von $Z^{(i)}$ und von $\psi$. Zuerst folgt es unmittelbar aus Def. II, 2°, dass:

(40) *Für jedes $i=1, 2, \ldots$ ist $Z^{(i+1)}$ eine Unterzerlegung von $Z^{(i)}$.*

Setzen wir nun

(41) $D_i =$ *Summe aller Baumstrecken aus* $\mathbf{Z}^{(i)}$,

so folgt es aus (40), dass:

(42) $D_{i+1} \subset D_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Wir beweisen nun folgende Formel:

(43) $$A = B - E = B - \{b_n\} = \prod_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Aus (38) und (39) folgt in der Tat leicht durch Induktion, dass:

$$B - \{b_n\} \subset \prod_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Es genügt also zu beweisen, dass kein Punkt $b_n$ zu allen $D_i$ gehören kann. Wäre nun $b_{n'} \in \prod_{i=0}^{\infty} D_i$, so gäbe es für jedes $i$ eine und wegen (7) nur eine Baumstrecke $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$, so dass $b_{n'} \in B^{(i)}$. Nach (40) wäre dann $B^{(i+1)} \subset B^{(i)}$. Nach (39), (38) und (8) erhielte man daraus, dass es eine Folge von Punkten $b_{n_i}$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ gibt, wo für jedes $i$ der Punkt $b_{n_i}$ die Bedingung (8) erfüllt und $B^{(i+1)} \subset B^{(i)} - (b_{n_i})$ ist. Man hätte daraus unmittelbar, dass $\{n_i\}$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen ist, und es gäbe also einen Index $i_0$, so dass $n_{i_0} > n'$. Für diesen Index wäre aber die Formel (8) falsch, denn laut unserer Annahme $b_{n'} \in B^{(i_0)}$ gilt. Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit der Formel (43).

Nach (21), (39), (37) und, da $\mathfrak{Z}'_k$ offenbar eine Unterzerlegung von $\mathfrak{Z}_k$ ist, schliesst man unmittelbar, dass:

(44) $d(B^{(i)}) < \frac{1}{i}$ *für* $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Nach (9), (12), (14), (30), (31) und (32) erhält man ferner:

(45) $\delta[\psi(B^{(i)})] < \frac{1}{i}$ *für* $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

(46) *Ist* $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$, $B^{(i+1)} \in \mathbf{Z}^{(i+1)}$ *und* $B^{(i+1)} \subset B^{(i)}$, *so ist* $\overline{\psi(B^{(i+1)})} \subset \psi(B^{(i)})$.

(47) $\psi(B^{(i)}) \in \{W_n\}$ *für* $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$



Aus (10), (12), (14), (30), (31), (32) und (40) folgt es unmittelbar, dass

(48) *Für jedes* $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$ *die Gleichheit* $\psi(B^{(i)}) = \Sigma\, \psi(B^{(i+1)})$ *gilt, wo sich* $\Sigma$ *auf alle diejenige* $B^{(i+1)}$ *erstreckt, welche den Bedingungen* $B^{(i+1)} \in \mathbf{Z}^{(i+1)}$ *und* $B^{(i+1)} \subset B^{(i)}$ *genügen.*

Wir beweisen jetzt, dass für jedes $i = 0, 1, 2, \dots$

(49) *Ist* $e_{j_1}(B_1^{(i)}) = e_{j_2}(B_2^{(i)})$, *wo* $j_1 = 1, 2$, $j_2 = 1, 2$, $B_1^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$ *und* $B_2^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$, *so ist auch* $\psi[e_{j_1}(B_1^{(i)})] = \psi[e_{j_2}(B_2^{(i)})]$.

Zunächst ist dies klar nach Def. II, 1° für $i = 0$.
Sei nun für ein $i \geqslant 0$ die Formel (49) richtig. Wir zeigen, dass dieselbe dann auch für $i + 1$ gelten muss. Wir setzen:

(50) $e_{j_1}(B_1^{(i+1)}) = e_{j_2}(B_2^{(i+1)}), \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2, \quad B_1^{(i+1)} \in \mathbf{Z}^{(i+1)}, \quad B_2^{(i+1)} \in \mathbf{Z}^{(i+1)}$.

Nach (50) und (40) können wir nun folgende zwei Fälle unterscheiden:

1) $B_1^{(i+1)} \subset B_1^{(i)}$, $B_2^{(i+1)} \subset B_2^{(i)}$, *wo* $B_1^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$, $B_2^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$, *und* $B_1^{(i)} \neq B_2^{(i)}$.

Es muss dann nach (50) der Punkt $e_{j_1}(B_1^{(i+1)}) = e_{j_2}(B_2^{(i+1)})$ ein gemeinsames Ende von $B_1^{(i)}$ und $B_2^{(i)}$ sein, also

$$e_{j_1}(B_1^{(i+1)}) = e_{j_2}(B_2^{(i+1)}) = e'_{j_1}(B_1^{(i)}) = e'_{j_2}(B_2^{(i)}).$$

Man erhält daraus leicht nach (18), (33), (34), (16) und nach der vorausgesetzten Richtigkeit der Formel (49) für den Index $i$, dass

$$\psi[e_{j_1}(B_1^{(i+1)})] = \psi[e'_{j_1}(B_1^{(i)})] = \psi[e'_{j_2}(B_2^{(i)})] = \psi[e_{j_2}(B_2^{(i+1)})], \qquad \text{w. z. b. w.}$$

2) $B_1^{(i+1)} \subset B^{(i)}$ *und* $B_2^{(i+1)} \subset B^{(i)}$ *für ein* $B^{(i)} \in \mathbf{Z}^{(i)}$.

Wir nehmen nun in Betracht die in Def. II, 2° benützten Hilfsmengen $C_k$.

Es können erstens die Baumstrecken $B_1^{(i+1)}$ und $B_2^{(i+1)}$ zu zwei verschiedenen Baumstrecken $C_{k_1}$ und $C_{k_2}$ gehören. Die Indizes $k_1$ und $k_2$ müssen dann aber zwei nacheinanderfolgende natürliche Zahlen, z. B. $k$ und $k + 1$ sein und es gilt folglich $e_{j_1}(B_1^{(i+1)}) = e_{j_2}(B_2^{(i+1)}) = e_2(C_k) = e_1(C_{k+1})$, woraus nach (33) und (34):

$$\psi[e_{j_1}(B_1^{(i+1)})] = p_k = \psi[e_{j_2}(B_2^{(i+1)})], \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zweitens, können $B_1^{(i+1)}$ und $B_2^{(i+1)}$ zu derselben Baumstrecke $C_k$ gehören. Im Falle, wo $e_{j_1}(B_1^{(i+1)}) = e_{j_2}(B_2^{(i+1)}) = e_j(C_k)$ für irgend ein $j=1,2$ gilt, ist die Formel (49) wie vorher zu beweisen. Ist ferner $e_1(C_k) \neq e_{j_1}(B_1^{(i+1)}) = e_{j_2}(B_2^{(i+1)}) \neq e_2(C_k)$ und keine der Mengen $B_1^{(i+1)}$ und $B_2^{(i+1)}$ mit einer Baumstrecke $C_n^{(k_0)}$ für $n \geqslant 3$ identisch, so folgt die Formel (49) unmittelbar aus (35). Ist schliesslich eine der Mengen $B_1^{(i+1)}$, $B_2^{(i+1)}$ mit irgend einer der Mengen $C_n^{(k_0)}$ für $n \geqslant 3$ identisch, so müssen nach (25) und (26) die Mengen $B_1^{(i+1)}$ und $B_2^{(i+1)}$ mit zwei nacheinanderfolgenden Mengen $C_n^{(k_0)}$ und $C_{n+1}^{(k_0)}$ für ein $n \geqslant 2$ identisch sein. Dann folgt aber die Formel (49) im Falle $n \geqslant 3$ direkt aus (36) und im Falle $n=2$ aus (35) und (36).

Damit ist die Formel (49) für alle Fälle bewiesen.

Wir definieren nun die zu bestimmende innere Abbildung $\varphi$

*Def. III. Ist $a \in \prod_{i=1}^{\infty} B^{(i)}$ für eine Folge von Baumstrecken $\{B^{(i)}\}$, wo $B^{(i)} \in \boldsymbol{Z}^{(i)}$ und $B^{(i+1)} \subset B^{(i)}$, so setzen wir: $\varphi(a) = \prod_{i=0}^{\infty} \psi(B^{(i)})$,*

Zunächst ist es klar, dass nach (45), (46) und wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit der Metrik $(\varrho)$ die Menge $\prod_{i=0}^{\infty} \psi(B^{(i)})$ aus einem und nur einem Punkte besteht. Die Def. III ordnet also, für jeden beliebigen Punkt $a$, jeder Folge $\{B^{(i)}\}$ wo $a \in \prod_{i=0}^{\infty} B^{(i)}$ ist, einen und nur einen Punkt $\varphi(a)$ zu. Dabei ist aber der Punkt $\varphi(a)$ von der spezieller Auswahl der Folge $\{B^{(i)}\}$ unabhängig, denn ist $a \in \prod_{i=0}^{\infty} B_1^{(i)}$ und $a \in \prod_{i=0}^{\infty} B_2^{(i)}$, wo $\{B_1^{(i)}\}$ und $\{B_2^{(i)}\}$ zwei verschiedene abnehmende Mengenfolgen sind, so gibt es nach (40) gewiss einen Index $i_0$, so dass für $i > i_0$ $B_1^{(i)} \neq B_2^{(i)}$ ist. Da aber $a \in B_1^{(i)} \cdot B_2^{(i)}$ für jedes $i$ gilt, so gibt es für jedes $i > i_0$ Indizes $j_1^{(i)} = 1, 2$ und $j_2^{(i)} = 1, 2$, so dass $a = e_{j_1}^{(i)}(B_1^{(i)}) = e_{j_2}^{(i)}(B_2^{(i)})$, also nach (49) $\psi[e_{j_1}^{(i)}(B_1^{(i)})] = \psi[e_{j_2}^{(i)}(B_2^{(i)})]$ gilt, woraus nach (5):

$$\psi[e_{j_1}^{(i)}(B_1^{(i)})] = \psi[e_{j_2}^{(i)}(B_2^{(i)})] \in \psi(B_1^{(i)}) \cdot \psi(B_2^{(i)}) \neq 0. \tag{51}$$

Aus (45) und (51) ergibt sich unmittelbar, dass

$$\delta(\psi(B_1^{(i)}) + \psi(B_2^{(i)})) < \frac{2}{i} \quad \text{für} \quad i > i_0$$

und folglich $\delta(\prod_{i=0}^{\infty} \psi(B_1^{(i)}) + \prod_{i=0}^{\infty} \psi(B_2^{(i)})) \leqslant \delta(\psi(B_1^{(i)}) + \psi(B_2^{(i)})) < \frac{2}{i}$ für



jedes $i > i_0$ gilt, so dass die einpunktigen Mengen $\prod_{i=0}^{\infty} \psi(B_1^{(i)})$ und $\prod_{i=0}^{\infty} \psi(B_2^{(i)})$ identisch sein müssen.

Damit ist die Eindeutigkeit von $\varphi$ bewiesen.

Wir beweisen jetzt, dass die Abbildung $\varphi$ jede Menge $A \cdot B^{(i)}$ in die Menge $\psi(B^{(i)})$ überführt, dass also

$$\varphi(A \cdot B^{(i)}) = \psi(B^{(i)}) \quad \textit{für jedes} \quad B^{(i)} \in \boldsymbol{Z}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{52}$$

Es sei, erstens, $a \in A \cdot B^{(i)}$. Nach (43) ist also $a \in D_n \cdot B^{(i)}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ Nach (41) und (40) ergibt sich daraus die Existenz einer abnehmenden Folge von Baumstrecken $\{B_0^{(n)}\}$, wo $a \in B_0^{(n)} \in \boldsymbol{Z}^{(n)}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $B_0^{(i)} = B^{(i)}$ ist. Nach der Def. III ist folglich

$$\varphi(a) = \prod_{n=0}^{\infty} \psi(B_0^{(n)}) \subset \psi(B_0^{(i)}) = \psi(B^{(i)}),$$

woraus

$$\varphi(A \cdot B^{(i)}) \subset \psi(B^{(i)}). \tag{53}$$

Es sei zweitens, $p \in \psi(B^{(i)})$. Wegen (40) gibt es zunächst $i+1$ Baumstrecken $B_0^{(0)}, B_0^{(1)}, \ldots, B_0^{(i-1)}, B_0^{(i)}$, so dass:

$$B_0^{(0)} \supset B_0^{(1)} \supset \ldots \supset B_0^{(i-1)} \supset B_0^{(i)} = B^{(i)}, \quad B_0^{(k)} \in \boldsymbol{Z}^{(k)} \quad \textit{für} \quad k = 0, 1, \ldots, i. \tag{54}$$

Da $p \in \psi(B^{(i)})$ ist, so gilt es gewiss nach (54) und (46):

$$p \in \psi(B_0^{(k)}) \quad \textit{für} \quad k = 0, 1, \ldots, i.$$

Es sei nun die Baumstrecke $B_0^{(k)} \in \boldsymbol{Z}^{(k)}$ für ein $k \geqslant i$ gemäss der Bedingung $p \in \psi(B_0^{(k)})$ bereits definiert. Es ergibt sich dann nach (48), dass es eine Baumstrecke $B^{(k+1)}$ gibt, derart dass

$$B^{(k+1)} \in \boldsymbol{Z}^{(k+1)}, \quad B^{(k+1)} \subset B_0^{(k)} \quad \textit{und} \quad p \in \psi(B^{(k+1)}).$$

Wir bezeichnen nun die Baumstrecke $B^{(k+1)}$ mit $B_0^{(k+1)}$. In dieser Weise wird eine Baumstreckenfolge $\{B_0^{(k)}\}$ mit folgender Eigenschaft definiert:

$$B_0^{(k)} \in \boldsymbol{Z}^{(k)}, \quad B_0^{(k+1)} \subset B_0^{(k)} \quad \textit{und} \quad p \in \psi(B_0^{(k)}) \quad \textit{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{55}$$

Da die Baumstrecken $B_0^{(k)}$ in sich kompakt sind und eine abnehmende Mengenfolge bilden, so gibt es einen Punkt $a$ von der Eigenschaft:

$$a \in \prod_{k=0}^{\infty} B_0^{(k)} \subset B_0^{(i)} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} D_k = B^{(i)} \cdot A. \tag{56}$$

Def. III, (55) und (56) ergeben dann unmittelbar $\varphi(a)=p$, wo $a \epsilon A \cdot B^{(i)}$ ist, woraus

$$(57) \qquad \varphi(A \cdot B^{(i)}) \supset \psi(B^{(i)}).$$

Durch die Formeln (53) und (57) ist die Formel (52) bewiesen.

Aus (52) erhalten wir nach Def. II, 1° für $i=0$:

$$(58) \qquad \varphi(A)=\varphi(A \cdot B^{(0)})=\psi(B^{(0)})=R;$$

also ist $\varphi$ eine eindeutige Abbildung von $A$ auf $R$.

Wir beweisen nun, dass $\varphi$ eine stetige Abbildung ist.

Es sei irgend ein Punkt $a \epsilon A$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass für jede Umgebung $U$ von $\varphi(a)$ im Raume $R$ eine Umgebung $G$ von $a$ in der Menge $A$ existiert, so dass $\varphi(G) \subset U$.

Sei nun $i_0$ die kleinste (offenbar existierende) natürliche Zahl mit der Eigenschaft:

$$(59) \qquad S_\varrho\left(\varphi(a), \frac{1}{i_0}\right) \subset U,$$

wo $S_\varrho(p, \eta)$ eine Kugel um $p$ mit Radius $\eta$ in der Metrik $(\varrho)$ bezeichnet. Da $a \epsilon A$, sogibt es nach (43) und (41) (auf Grund von Bedingungen 6, (6) und 6, (7) für die $B$-Zerlegung $\boldsymbol{Z}^{(i)}$) eine endliche Anzahl, z. B. $m$, Baumstrecken $\{B_k^{(i)}\}_{k=1,2,\dots,m}$ mit Eigenschaften:

$$(60) \qquad a \epsilon B_k^{(i_0)} \epsilon \boldsymbol{Z}^{(i_0)} \quad \textit{für} \quad k=1, 2, \dots, m.$$

(61) *Der Punkt $a$ liegt im Innern (rel. $D_{i_0}$) der Menge $\sum_{k=1}^{m} B_k^{(i_0)}$.*

Nach (61) gibt es eine in $D_{i_0}$ offene Menge $G'$, so dass $a \epsilon G' \subset \subset \sum_{k=1}^{m} B_k^{(i_0)}$. Daraus ergibt sich, da $a \epsilon A \subset D_{i_0}$, dass für die Menge $G = A \cdot G'$ folgendes besteht:

$$(62) \qquad a \epsilon G = A \cdot G' \subset A \cdot \sum_{k=1}^{m} B_k^{(i_0)} \textit{ und } G \textit{ in } A \textit{ offen ist.}$$

Nach (60), (52) und (62) erhalten wir:

$$(63) \qquad \varphi(a) \epsilon \varphi(A \cdot B_k^{(i_0)}) = \psi(B_k^{(i_0)}) \quad \textit{für} \quad k=1, 2, \dots, m.$$

$$(64) \qquad \varphi(G) \subset \varphi\left(A \cdot \sum_{k=1}^{m} B_k^{(i_0)}\right) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(A \cdot B_k^{(i_0)}) = \sum_{k=1}^{m} \psi(B_k^{(i_0)}).$$



Aus (63), (45) und (59) schliessen wir unmittelbar, dass

$$\psi(B_k^{(i_0)}) \subset S_\varrho\left(\varphi(a), \frac{1}{i_0}\right) \subset U \quad \textit{für} \quad k=1, 2, \dots, m$$

ist, woraus nach (64)

$$\varphi(G) \subset \sum_{k=1}^{m} \psi(B_k^{(i_0)}) \subset U,$$

also die Stetigkeit von $\varphi$ folgt.

Wir beweisen schliesslich, dass $\varphi$ eine innere Abbildung ist.

Zu diesem Zwecke genügt es zu zeigen, dass eine in $A$ offene Menge $G$ in eine in $R$ offene Menge $\varphi(G)$ übergeht. Dies wird bewiesen werden, indem wir zeigen, dass ein beliebiger Punkt $p \epsilon \varphi(G)$ im Innern von $\varphi(G)$ rel. $R$ liegt.

Da $p \epsilon \varphi(G)$, so gibt es einen Punkt $a \epsilon G \subset A$, so dass $\varphi(a)=p$ ist.

Da $G$ in $A$ offen ist, so gibt es eine in $B$ offene Menge $G'$, so dass $G = G' \cdot A$ ist. Bezeichnen wir nun mit $i_0$ die kleinste natürliche Zahl von der Eigenschaft:

$$(65) \qquad S_r\left(a, \frac{1}{i_0}\right) \subset G',$$

wo $S_r(a, \eta)$ eine Kugel in der Metrik $(r)$ bezeichnet, so liegt nach (44) jede den Punkt $a$ enthaltende Baumstrecke $B^{(i_0)} \epsilon \boldsymbol{Z}^{(i_0)}$, gänzlich in der Menge $G'$. Da eine solche Baumstrecke $B^{(i_0)}$ gewiss existiert, so gilt es

$$p = \varphi(a) \epsilon \varphi(A \cdot B^{(i_0)}) \subset \varphi(A \cdot G') = \varphi(G).$$

Nach der aus (52) und (47) sich ergebenden Formel $\varphi(A \cdot B^{(i_0)}) = \psi(B^{(i_0)}) \epsilon \{W_n\}$ und da die Mengen $W_n$ in $R$ offen sind, schliessen wir, dass $p$ tatsächlich im Innern von $\varphi(G)$ liegt, womit der ganze Beweis vollendet ist.

**9. *Hauptsatz.*** *Jede Menge $A = B - E$, wo $B$ eine Baumkurve und $E$ eine beliebige in $B$ dicht liegende abzählbare Menge von Endpunkten von $B$ ist, bildet ein universales Urbild für die Klasse der separablen quasi-Peanoschen Räume in bezug auf die Klasse innerer Abbildungen.*

*Beweis.* Nach den Sätzen 5 und 9 genügt es zu zeigen, dass jede den Bedingungen des Hauptsatzes genügende Menge $A$ einen separablen quasi-Peanoschen Raum bildet.

Die Separabilität von $A$ ist evident. Dass ferner $A$ eine absolute $G_\delta$-Menge ist, folgt daraus, dass wir $A = B - E$ haben, wo $B$ in sich kompakt und $E$, als abzählbare Menge, eine absolute $F_\sigma$-Menge ist.

Der Zusammenhang von $A$ folgt aus der Eigenschaft, dass je zwei Punkte $(a, b) \subset A$, die ja in der Baumkurve $B$ durch den einfachen Bogen $\widehat{ab}$ verbunden sind, sind auch in $A$ durch denselben Bogen verbunden, da dieser Bogen keinen Punkt von $B - A = E$ (da es lauter Endpunkte von $B$ sind) enthält. Schliesslich folgt der lokale Zusammenhang von $A$ daraus, dass der für je zwei hinreichend nahe liegende Punkte $(a, b) \subset A \subset B$ in der Baumkurve $B$ existierende beliebig kleine einfache Bogen $\widehat{ab}$ zugleich in $A$ enthalten ist.

Der Hauptsatz ist dadurch bewiesen.

**10. Schlussbemerkungen**: Im Zusammenhange mit den vorstehenden Ausführungen dringen sich u. a. folgende Probleme auf:

*I.* [1]) *Bildet jede (absolute) Borelsche Klasse eine Invariante gegenüber den inneren Abbildungen?*

Eine positive Entscheidung dieses Problems wäre eine Verallgemeinerung des Sierpiński'schen Satzes [2]).

*II.* [1]) Seien $R$ und $T$ vollständige metrische Räume, $A \subset R$, $B \subset T$ und $\varphi$ eine innere Abbildung von $A$ auf $B$. *Kann man stets die Abbildung $\varphi$ zu einer, eine absolute $G_\delta$-Menge $A_1 \subset R$, $A \subset A_1$, in eine Menge $B_1 \subset T$, $B \subset B_1$ transformierenden inneren Abbildung $\varphi_1$ erweitern?*

Die positive Antwort auf diese Frage würde ein bemerkenswertes Analogon zum bekannten Erweiterungssatze von Lavrentieff [3]) darstellen.

*III. Gibt es in bezug auf innere Abbildungen ein universales Urbild für die Klasse der Peanoschen Räume?*

Ein einfacher Bogen ist gewiss kein solches Urbild, denn jede innere Abbildung eines einfachen Bogens ist zugleich eine homöomorphe Abbildung.

[1]) Dieses Problem wurde mir von W. Sierpiński mitgeteilt.
[2]) Vgl. Fussnote [2]) S. 97.
[3]) Fund. Math. VI, S. 149.



*IV. Durch welche innere topologische Eigenschaften sind die universalen Urbilde der quasi-Peanoschen Räume in bezug auf innere Abbildungen charakterisiert?*

Es ist zu bemerken, dass die im Hauptsatze definierten topologischen Gebilde (gewisse Teilmengen von Baumkurven) offenbar nicht die einzigen universalen Urbilde der quasi-Peanoschen Räume in bezug auf innere Abbildungen sind. Aus denselben können in der Tat andere derartige Urbilde zusammengesetzt werden, die aber geschlossene Kurven enthalten.

Warszawa, August 1930.