ned point of order one in M which is a contradiction. Thus $au \times \times (b+p) = 0$ and as $(M - K_{bp})'$ is contained in au $(M - K_{bp})' \times \times (b+p) = 0$. Hence $b+p$ is a two-point end-set of M.

Theorem 50. *If M is bounded and neither p nor q is a limit point of the non-cut points of $(M-pq)'$ then either q is a p joined point of order one in M or pq is indecomposable.*

Proof: If $pq = M$ the theorem is true. Consider then the case where $pq \neq M$. Then let $au + pq + vb = M = au + uv + vb$ where $(M-pq)' = au + vb$. Consider for example the case where au is non-vacuous. Let $(u) = (u)_a$ of au. The set (u) contains $au \times pq$. Either $au \times pq = u$ or $au \times pq \neq u$. Consider the case where $au \times \times pq \neq u$. No point of (u) is a cut point of au for if (u) contains x $au = ax$. Assume that x of (u) is a cut point of M. Then $M - x = = W + Z$ separate. Either W or Z contains a and so contains $au - x + pq + vb = M - x$. Thus either W or Z must be vacuous. Hence no point of (u) can be a cut point of M. Let u and x be two distinct points of (u) contained in $au \times pq \neq u$. Then there exists a region R containing x such that $R' \times u = 0$. Then x is contained in a subcontinuum of $R' \times au$ which does not contain u and so by theorem 1 this subcontinuum is contained in (u). Hence as each point of (u) is a non-cut point of M x is a limit point of non-cut points of M which are contained in au of $(M-pq)'$. Therefore $(u) \times (p+q) = 0$ and so $au \times (p+q) = 0$. Consider now the case where $au \times pq = u$. If $u \times (p+q) = 0$, $au \times (p+q) = 0$. Thus in every case $au \times (p+q) = 0$ or else either $u = p$ or $u = q$. Hence always $pq = uv$.

If there exists but one irreducible continuum of M joining p and q the theorem is true. If $pxq \neq pq$ then consider for example the case where $pu_1 \neq pq \neq qu_2$ where $pu_1 \neq qu_2$ is contained in pxq. Let uv contain pv_1 and qv_1. Then $pu_1 + pv_1 = uv = pq$. Thus $pv_1 = pq$ and similarly $qv_1 = pq$. Thus pq is indecomposable.

Ohio State University.

Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

1. H étant un ensemble de points donné quelconque, situé dans le plan, nous désignerons par $\Gamma(H)$ et nous appellerons, d'après M. N. Lusin, *ensemble criblé au moyen du crible H* [1]), l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x = a$ rencontre l'ensemble H en un ensemble de points (non vide) qui *n'est pas bien ordonné* à l'aide de cette convention que le rang des points soit conforme à la direction positive de l'axe $0Y$.

M. Lusin a démontré que les ensembles criblés au moyen des cribles F_σ (même des cribles F_σ d'une nature particulière) coïncident avec les ensembles analytiques.

Or, nous prouverons dans ce § que *les ensembles analytiques coïncident avec les ensembles criblés au moyen des ensembles fermés* [2]).

Soit E un ensemble analytique linéaire donné. Il existe, comme on sait, un système d'intervalles fermés $\{\delta_{n_1, n_2}, \ldots, {}_{n_k}\}$, tel qu'on a pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$:

(1) $$\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

et que

(2) $$E = \Sigma\, \delta_{n_1}\, \delta_{n_1, n_2}\, \delta_{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

[1]) N. Lusin: *Fund. Math.* t. X, p. 10; aussi: „*Leçons sur les ensembles analytiques*...", Paris, Gauthier-Villars 1930, p. 178 ss.

[2]) J'ai signalé ce théorème (sans le démontrer) dans ma note des *C. R.*, t. 185, p. 835 (séance du 24 octobre 1927).

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$

$n_1, n_2, \ldots n_k$ étant un système donné d'indices, désignons par $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que

$$(3) \qquad x \,\epsilon\, \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad \text{et} \quad y = 1 - \left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k}}\right).$$

Posons

$$(4) \qquad S = \Sigma\, \Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

où la sommation s'étend à tous les systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, et désignons par H la fermeture de S, c'est-à-dire l'ensemble

$$(5) \qquad H = S + S'.$$

Je dis que

$$(6) \qquad \Gamma(H) = E.$$

1) Soit x_0 un nombre de E. D'après (2), il existe une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telle que

$$(7) \qquad x_0 \,\epsilon\, \delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3 \ldots$$

D'après la définition des segments $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et d'après (4) et (5), les points (x, y) dont les coordonnées satisfont (pour un système donné quelconque d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$) aux conditions (3), appartiennent à H et il en résulte, d'après (7), que les points (x_0, y_k), où

$$(8) \qquad y_k = 1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}\right),$$

appartiennent à H, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Or, on a évidemment, d'après (8):

$$(9) \qquad y_1 > y_2 > y_3 > \ldots;$$

les points (x_0, y_k) $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ de H étant situés sur la droite $x = x_0$, on voit, d'après (9), que cette droite rencontre H en un ensemble de points qui n'est pas bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées des ses points. Par conséquent x_0 appartient à l'ensemble $\Gamma(H)$.

2) Soit x_0 un nombre de $\Gamma(H)$. D'après la définition de l'ensemble $\Gamma(H)$, la droite $x = x_0$ rencontre l'ensemble H en un ensemble de points F, qui n'est pas bien ordonné d'après la grandeur de ses points. L'ensemble F étant, comme on voit sans peine, fermé et borné, il existe donc un point (x_0, y_0) de F, et une suite infinie de nombres

$$(10) \qquad y_1 > y_2 > y_3 > \ldots,$$

tels que

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} y_n = y_0$$

et que

$$(12) \qquad (x_0, y_n) \,\epsilon\, H, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Les ordonnées y des points de l'ensemble H satisfaisant évidemment aux inégalités

$$0 \leqslant y \leqslant 1,$$

on voit sans peine que $0 \leqslant y_0 < 1$, donc $0 < 1 - y_0 \leqslant 1$: soit

$$(13) \qquad 1 - y_0 = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+m_3}} + \ldots$$

le développement du nombre $1 - y_0$ en fraction infinie dyadique.

Soit k un indice donné: d'après (13) nous avons

$$(14) \qquad 1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+m_k-1}}\right) \leqslant y_0 < 1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}\right).$$

De la définition de l'ensemble S résulte sans peine que la partie de S comprise entre les droites

$$(15) \qquad y = 1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+m_k-1}}\right)$$

et

$$(16) \qquad y = 1 - \left(\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}\right)$$

se compose des tous les segments $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_s}$, où $s > k$ et $n_i = m_i$, pour $i = 1, 2, \ldots k$, et il en résulte, d'après (5) et (1) (et d'après la définition des segments $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$) que les abscisses des points de H situés entre les droites (15) et (16) appartiennent à l'intervalle $\delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$.

Or, d'après (14), (11) et (10), pour n suffisamment grands, les points (x_0, y_n) qui appartiennent, d'après (12), à H, sont situés entre les droites (15) et (16): par conséquent on a

$$x_0 \in \delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k}. \tag{17}$$

La formule (17) étant démontrée quel que soit l'indice k, on a, d'après (2): $x_0 \in E$.

La formule (6) est ainsi démontrée.

Nous avons ainsi démontré que tout ensemble analytique linéaire peut être regardé comme criblé au moyen d'un ensemble fermé.

Or, M. Lusin a démontré que tout ensemble criblé au moyen d'un crible analytique (donc, en particulier, tout ensemble criblé au moyen d'un crible fermé) est un ensemble analytique [1]).

Notre proposition est ainsi démontrée.

2. Soit E un ensemble criblé au moyen du crible H. α étant un nombre ordinal $\geqslant 0$ et $< \Omega$, désignons par $S_\alpha(H)$ l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x = a$ rencontre H en un ensemble de points bien ordonné du type $\leqslant \alpha$ (d'après la grandeur de ses ordonnées).

Nous prouverons que *si H est un ensemble F_σ, les ensembles $S_\alpha(H)$ sont tous mesurables B (pour $\alpha < \Omega$)* [2]).

Désignons par $\nu(H)$ l'ensemble de tous les points de H pour lesquels il n'existe aucun point de H ayant la même abscisse et une ordonnée plus grande [3]), et posons

$$H^* = H - \nu(H) \tag{18}$$

— ce sera donc l'ensemble de tous les points (x, y) de H, pour lesquels il existe au moins un point (ξ, η) de H, tel que $x = \xi$ et $y < \eta$. Je dis que si H est un ensemble F_σ, H^* est aussi un F_σ.

[1]) Voir son livre cité, p. 180; voir aussi sa note de ce volume.

[2]) Pour les cribles *dénombrables* mesurables B un théorème analogue a été démontré par M. Lusin, l. c., p. 188.

[3]) On pourrait dire selon M. Mazurkiewicz (*Fund. Math.* t. X, p. 172) que $\nu(H)$ est l'ensemble des y *maxima* de l'ensemble H. Cf. aussi *Fund. Math.* t. XI, p. 291.

En effet, désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $(x, y) \in H$ et $z < 0$: l'ensemble H étant un F_σ, on voit sans peine que l'ensemble Q est aussi un F_σ. Or, désignons par R l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe au moins un point (ξ, η) de H, tel que $x = \xi$ et $y < \eta$. On voit sans peine que R est une image continue de Q: en effet, on obtient une transformation continue de Q en R, en faisant correspondre au point (x, y, z) de Q le point $(x, y - z)$ de R. Donc R, comme image continue d'un ensemble F_σ, est encore un F_σ.

Or, on a évidemment

$$H^* = HR: \tag{19}$$

les ensembles H et R étant des F_σ, il résulte de (19) que H^* est un F_σ, c. q. f. d.

De la définition des ensembles H^*, $\nu(H)$ et S_α résulte tout de suite la formule

$$S_{\alpha+1}(H) = P(\nu(H))\, S_\alpha(H^*), \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega, \tag{20}$$

où $P(M)$ désigne la projection de l'ensemble M sur l'axe $0X$.

Pour aller plus loin, il nous sera nécessaire d'étudier la nature de l'ensemble $P(\nu(H))$.

Nous démontrerons ce

Lemme. *Si H est un ensemble plan F_σ, l'ensemble $P(\nu(H))$ est un $G_{\delta\sigma}$.*

Démonstration. Soit H un ensemble F_σ plan. Nous pouvons donc poser

$$H = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots, \tag{21}$$

où F_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles fermés et bornés, et

$$F_n \subset F_{n+1}, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

Désignons (pour n naturels) par Φ_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe un point (ξ, η) de F_n, tel que $x = \xi$ et $y \leqslant \eta$. Les ensembles F_n étant fermés et bornés, on voit sans peine que les ensembles Φ_n sont fermés et bornés supérieurement. Je dis que

$$P(\nu(H)) = P(H) \cdot C \overline{\lim_n}\, P(\Phi_{n+1} - \Phi_n). \tag{23}$$

Soit

(24) $$x_0 \in P(\nu(H)).$$

De la définition de l'ensemble $\nu(H)$ résulte qu'il existe un nombre y_0, tel que

(25) $$(x_0, y_0) \in H$$

et

(26) $$(x_0, y) \text{ non} \in H, \quad \text{pour} \quad y > y_0.$$

De (25), (21) et (22) résulte qu'il existe un indice p, tel que

(27) $$(x_0, y_0) \in F_n, \quad \text{pour} \quad n \geqslant p.$$

Je dis que

(28) $$x_0 \text{ non} \in P(\Phi_{n+1} - \Phi_n), \quad \text{pour} \quad n \geqslant p.$$

En effet, admettons que n est un indice $\geqslant p$, pour lequel la formule (28) n'est pas vraie. Il existe donc un nombre réel y, tel que $(x_0, y) \in \Phi_{n+1} - \Phi_n$, donc que

(29) $$(x_0, y) \in \Phi_{n+1}$$

et

(30) $$(x_0, y) \text{ non} \in \Phi_n,$$

De (29) résulte qu'il existe un nombre $\eta \geqslant y$ tel que $(x_0, \eta) \in F_{n+1}$, donc, d'après (21):

(31) $$(x_0, \eta) \in H.$$

Les formules (26) et (31) prouvent que $\eta \leqslant y_0$.

D'après (27) et $y \leqslant \eta \leqslant y_0$ on trouve $(x_0, y) \in \Phi_n$, contrairement à (30). La formule (28) est ainsi démontrée.

Or, on a évidemment $P(\nu(H)) \subset P(H)$ (puisque $\nu(H) \subset H$), et la formule (24) donne

(32) $$x_0 \in P(H).$$

Les formules (28) et (32) prouvent que

(33) $$x_0 \in P(H) \cdot C \overline{\lim_n}\, P(\Phi_{n+1} - \Phi_n).$$

Nous avons ainsi démontré que la formule (24) entraîne la formule (33).

Soit maintenant x_0 un nombre tel que

(34) $$x_0 \in P(H) \text{ et } x_0 \text{ non} \in P(\nu(H)).$$

D'après (34), (21) et (22), on a, pour n suffisamment grands: $x_0 \in P(F_n)$. Soit m un de ces indices n. On a donc $x_0 \in P(F_m)$. L'ensemble F_m étant fermé et borné, il en résulte qu'il existe un nombre réel y_m, tel que

(35) $$(x_0, y_m) \in F_m$$

et que (x_0, y) non $\in F_m$, pour $y > y_m$, donc aussi

(36) $$(x_0, y) \text{ non} \in \Phi_m, \quad \text{pour} \quad y > y_m.$$

D'après (36), (35) et $F_m \subset H$, il existe un nombre $y > y_m$, tel que $(x_0, y) \in H$, donc, d'après (21), pour les indices s suffisamment grands: $(x_0, y) \in F_s$ et, à plus forte raison:

(37) $$(x_0, y) \in \Phi_s.$$

Soit s le plus petit des indices, satisfaisant à la condition (37): d'après (36) et $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \ldots$ (ce qui résulte de (22)) nous trouvons $s > m$, et on a

$$(x_0, y) \in \Phi_s - \Phi_{s-1},$$

ce qui donne:

(38) $$x_0 \in P(\Phi_s - \Phi_{s-1}).$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe un indice $s < m$, pour lequel on a la formule (38). Le nombre m pouvant être aussi grand que l'on veut, cela prouve que

(39) $$x_0 \in \overline{\lim_n}\, P(\Phi_{n-1} - \Phi_n).$$

Il est ainsi établi que lés formules (34) entraînent la formule (39), ou, ce qui revient au même, que la formule

$$x_0 \text{ non} \in P(\nu(H))$$

entraîne la formule

$$x_0 \text{ non} \in P(H) \cdot C \overline{\lim_n}\, P(\Phi_{n+1} - \Phi_n).$$

Or, plus haut nous avons démontré que la formule (24) entraîne la formule (33). La formule (23) est ainsi démontrée.

Les ensembles Φ_n ($n=1, 2, 3, \dots$) étant fermés, on voit que les ensembles $P(\Phi_{n+1}-\Phi_n)$ sont des F_σ et parsuite l'ensemble

$$\overline{\lim_n}\, P(\Phi_{n+1}-\Phi_n)$$

est un $F_{\sigma\delta}$. L'ensemble $P(H)$ étant un F_σ, la formule (23) prouve que l'ensemble $P(\nu(H))$ est un $G_{\delta\sigma}$ et notre lemme est démontré.

Une autre formule pour l'ensemble $P(\nu(H))$, analogue à la formule (20), a été donnée par M. Mazurkiewicz: c'est la formule

$$P(\nu(H))=\sum_{n=1}^{\infty}(P(F_n)-P(H-\Phi_n));$$

en s'appuyant sur cette formule on déduit facilement que l'ensemble $P(\nu(H))$ est un $G_{\delta\sigma}$.

Remarque. On peut démontrer sans peine que, E étant un ensemble $G_{\delta\sigma}$ linéaire donné quelconque, il existe un ensemble F_σ plan, H, tel que $P(\nu(H))=E$. En effet, soit E un ensemble $G_{\delta\sigma}$ linéaire. CE est donc un ensemble $F_{\sigma\delta}$, soit

$$CE=Q_1\,Q_2\,Q_3\dots,$$

où Q_n ($n=1, 2, 3, \dots$) sont des ensembles F_σ et où nous pouvons supposer que

$$Q_1\subset Q_2\subset Q_3\subset\dots$$

Désignons par H_0 l'axe d'abscisses et, pour n naturel, désignons par H_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x\in Q_n$ et $y=n$. On vérifie sans peine qu'en posant

$$H=H_0+H_1+H_2+\dots,$$

on obtient un ensemble F_σ, tel que $P(\nu(H))=E$.

On pourrait donc dire que *pour qu'il existe pour un ensemble linéaire E un ensemble F_n plan, H, tel que $P(\nu(H))=F$, il faut et il suffit que l'ensemble E soit un $G_{\delta\sigma}$*.

Mlle Braun a remarqué qu'on peut dans l'énoncé précédent remplacer les mots „ensemble F_σ" par „ensemble fermé". En effet, soit E un ensemble $G_{\delta\sigma}$ linéaire. L'ensemble CE est donc un $F_{\sigma\delta}$ et, j'ai démontré ailleurs[1]) qu'il existe une suite infinie Q_n ($n=1, 2, \dots$) d'ensembles linéaires fermés, telle que

$$CE=\overline{\lim_n}\, Q_n=(Q_1+Q_2+\dots)(Q_2+Q_3+\dots)(Q_3+Q_4+\dots).$$

Désignons par H_0 l'axe d'abscisses et désignons, pour n naturels, par H_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x\in Q_n$ et $y=n$.

Posons

$$H=H_0+H_1+H_2+\dots$$

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 21.

On voit sans peine que l'ensemble H est fermé et que $P(\nu(H))=E$[1]).

Il est encore à remarquer qu'on peut démontrer sans peine que les projections sur l'axe OY des ensembles $\nu(H)$, où H sont des ensembles plans fermés (ou bien des ensembles F_σ) coïncident avec les ensembles analytiques linéaires[2]).

En conservant les notations de notre lemme, nous démontrerons maintenant qu'on a pour les nombres ordinaux α de seconde espèce $<\Omega$ (et pour les ensembles F_σ, plans H) les formules:

$$S_\alpha(H)=\prod_{n=1}^{\infty}S_\alpha(\Phi_n H) \tag{40}$$

et

$$S_\alpha(\Phi_n H)=\sum_{\xi<\alpha}S_\xi(\Phi_n H)\quad (n=1, 2, 3, \dots). \tag{41}$$

Pour démontrer la formule (40) remarquons d'abord qu'on a évidemment $S_\alpha(N)\subset S_\alpha(M)$, pour $M\subset N$, donc $S_\alpha(H)\subset S_\alpha(\Phi_n H)$, pour $n=1, 2, 3, \dots$, et

$$S_\alpha(H)\subset\prod_{n=1}^{\infty}S_\alpha(\Phi_n H). \tag{42}$$

Or, soit

$$x_0 \text{ non } \epsilon\ S_\alpha(H); \tag{43}$$

il en résulte que la droite $x=x_0$ rencontre H en un ensemble de points qui ou bien n'est pas bien ordonné (d'après la grandeur de ses ordonnées), ou bien est bien ordonné du type $\geqslant\alpha+1$.

Dans le premier cas il existe une suite infinie de nombres réels

$$y_1>y_2>y_3>\dots, \tag{44}$$

telle que

$$(x_0, y_n)\,\epsilon\, H,\quad \text{pour}\quad n=1, 2, 3, \dots \tag{45}$$

D'après $(x_0, y_1)\,\epsilon\, H$ et (21) il existe un indice q, tel que $(x_0, y_1)\,\epsilon\, F_q$ donc, à plus forte raison, $(x_0, y_1)\,\epsilon\, \Phi_q$, d'où résulte d'après (44) et (45) et d'après la définition de l'ensemble Φ_q:

$$(x_0, y_n)\,\epsilon\, \Phi_n H,\quad \text{pour}\quad n=1, 2, 3, \dots,$$

[1]) Cf. W. Sierpiński, Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII. 1930. Classe III, p. 134.

[2]) Voir: *Fund. Math.* t. XI, p. 294.

ce qui prouve que x_0 non $\epsilon\, S_\alpha(\Phi_q H)$ et, à plus forte raison:

$$(46) \qquad x_0 \text{ non } \epsilon \prod_{n=1}^{\infty} S_\alpha(\Phi_n H).$$

Dans le second cas la droite $x = x_0$ contient évidemment un ensemble Q de points de H qui est bien ordonné du type $\alpha + 1$ (d'après la grandeur de ses ordonnées). L'ensemble Q contient évidemment un point (x_0, y_0) dont l'ordonnée est la plus grande. D'après $(x_0, y_0) \epsilon H$ et (21), il existe un indice q, tel que $(x_0, y_0) \epsilon F_q$, et il en résulte sans peine que $Q \subset \Phi_q H$, d'où: x_0 non $\epsilon\, S_\alpha(\Phi_q H)$ ce qui donne la formule (46).

La formule (43) entraîne donc toujours la formule (46), c'est-à-dire

$$(47) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} S_\alpha(\Phi_n H) \subset S_\alpha(H).$$

Les formules (42) et (47) donnent la formule (40) qui est ainsi démontrée.

Pour démontrer la formule (41) remarquons d'abord qu'il est évident que $S_\xi(\Phi_n H) \subset S_\alpha(\Phi_n H)$, pour $\xi < \alpha$, d'où

$$(48) \qquad S_\alpha(\Phi_n H) \supset \sum_{\xi<\alpha} S_\xi(\Phi_n H).$$

Or, soit n un indice donné et

$$(49) \qquad x_0 \,\epsilon\, S_\alpha(\Phi_n H).$$

La droite $x = x_0$ — désignons-la par L — rencontre donc l'ensemble $\Phi_n H$ en un ensemble de points qui est bien ordonné du type $\xi \leqslant \alpha$ (d'après la grandeur de ses ordonnées). Or, F_n étant borné et fermé, il résulte de la définition de l'ensemble Φ_n que l'ensemble $L\Phi_n$ est borné supérieurement et contient sa borne supérieure. Donc ξ est un nombre ordinal de première espèce, d'où (α étant un nombre de seconde espèce) $\xi \neq \alpha$, donc $\xi > \alpha$. Par conséquent

$$(50) \qquad x_0 \,\epsilon\, S_\xi(\Phi_n H), \text{ où } \xi < \alpha.$$

La formule (49) entraîne donc la formule (50), c'est-à-dire

$$(51) \qquad S_\alpha(\Phi_n H) \subset \sum_{\xi<\alpha} S_\xi(\Phi_n H).$$

Les formules (48) et (51) donnent la formule (41), c. q. f. d.

On a évidemment

$$S_0(H) = CP(H),$$

d'où résulte (H étant un F_σ) que $S_0(H)$ est un G_δ. Or, nous avons démontré plus haut que si H est un ensemble F_σ, l'ensemble (18) l'est aussi. D'après notre lemme et d'après (20) (pour $\alpha = 0$) nous en concluons que $S_1(H)$ est un $G_{\delta\sigma}$. En appliquant la formule (20) nous concluons sans peine par l'induction facile que si H est un ensemble F_σ, les ensembles $S_k(H)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) sont des $G_{\delta\sigma}$.

Les ensembles $\Phi_n H$ étant des F_σ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$), les ensembles $S_k(\Phi_n H)$ sont donc des $G_{\delta\sigma}$ (pour k et n naturels), d'où résulte, d'après (41) (pour $\alpha = \omega$) que les ensembles $S_\omega(\Phi_n H)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont encore des $G_{\delta\sigma}$ et, d'après (40), $S_\omega(H)$ est un $G_{\delta\sigma\delta}$.

Généralement, en s'appuyant sur les formules (20), (40) et (41), on démontre sans peine par l'induction transfinie que si H est un ensemble F_σ, les ensembles $S_\alpha(H)$ sont mesurables (B), pour $\alpha < \Omega$. Notre preposition est ainsi démontrée.

Or, on voit sans peine que si H est un ensemble G_δ, les ensembles $S_\alpha(H)$ peuvent ne pas être mesurables B. En effet, il existe comme on sait, un ensemble plan G_δ, soit H, dont la projection sur l'axe OX n'est pas mesurable B. Or, on a $S_0(H) = CP(H)$: c'est donc un ensemble non mesurable B.

3. H étant un crible donné, posons

$$(52) \qquad \mathcal{S}_0(H) = S_0(H)$$

et, pour les nombres ordinaux $\alpha > 0$:

$$(53) \qquad \mathcal{S}_\alpha(H) = S_\alpha(H) - \sum_{\xi<\alpha} S_\xi(H).$$

L'ensemble $\mathcal{S}_\alpha(H)$ est appelé, d'après M. Lusin[1]), *partie constituante*

[1]) Voir son livre cité, p. 188.

tuante (α) *du complémentaire* $\mathcal{E}$ *de l'ensemble criblé* $E=\Gamma(H)$ ou simplement *constituante* $\mathcal{E}_\alpha$. C'est donc l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x=a$ rencontre H en un ensemble de points bien ordonné du type α (d'après la grandeur de ses ordonnées). De la proposition démontrée dans le § 2 et des formules (52) et (53) résulte tout de suite que *si* H *est un ensemble* F_σ, *les ensembles* $\mathcal{E}_\alpha$ *sont tous mesurables* B (pour $\alpha<\Omega$).

Or, on a évidemment la formule

$$(54)\quad C\Gamma(H)=\mathcal{E}_0(H)+\mathcal{E}_1(H)+\ldots+\mathcal{E}_\alpha(H)+\ldots\quad(\alpha<\Omega)$$

M. Lusin a démontré [1]) que si H est un ensemble analytique et si $\Gamma(H)$ est un ensemble mesurable B, il existe un nombre ordinal $\mu<\Omega$, tel que les constituantes $\mathcal{E}_\alpha(H)$ sont vides pour $\alpha\geqslant\mu$. D'autre part, il est évident que si H est un ensemble F_σ, et si un tel nombre μ existe, l'ensemble $\Gamma(E)$ (en tant qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables B) est mesurable B. Donc, *la condition nécessaire est suffisante pour qu'un ensemble* $\Phi(H)$ *criblé au moyen du crible* F_σ *soit mesurable* B *est que les constituantes* $\mathcal{E}_\alpha(H)$ *du complémentaire* $C\Gamma(H)$ *soient vides à partir d'un certain rang* $\mu<\Omega$.

Nous avons considéré jusqu'ici des cribles plans, mais tous nos raisonnements subsistent, comme on voit sans peine, pour les cribles H dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Soit p. e. H un ensemble de points dans l'espace à 3 dimensions. On désignera par $\Gamma(H)$ et on appellera *ensemble criblé au moyen du crible* H l'ensemble de tous les points (a, b) du plan $X0Y$, tels que la droite $x=a$, $y=b$ (parallèle à l'axe $0Z$) rencontre l'ensemble H en un ensemble de points (non vide) qui n'est pas bien ordonné d'après cette convention que le rang des points soit conforme à la direction positive de l'axe $0Z$.

Pareillement on désignera par $\mathcal{E}_\alpha(H)$ et on appellera constituante d'ordre α de l'ensemble $C\Gamma(H)$ l'ensemble de tous les points (a, b) du plan, tels que la droite $x=a$, $y=b$ rencontre l'ensemble H en un ensemble de points bien ordonné du type α (d'après la convention adoptée). Ici encore, *si* H *est un ensemble* F_σ (dans l'espace à 3 dimensions), *les constituantes* $\mathcal{E}_\alpha(H)$ $(\alpha<\Omega)$ *sont toutes des ensembles* (plans) *mesurables* B. Pour le voir il ne faudrait que répéter, avec des modifications évidentes, la démonstration donnée dans le § 2 pour les cribles plans.

[1]) L. c., p. 187 (*Remarque II*).

Soit U un ensemble fermé *universel* dans l'espace à 3 dimensions, c'est-à-dire un ensemble tel que les plans parallèles au plan $X0Z$ rencontrent U en tous les ensembles fermés plans possibles [1]). Soit

$$C\Gamma(U)=\mathcal{E}_0(U)+\mathcal{E}_1(U)+\ldots+\mathcal{E}_\alpha(U)+\ldots\quad(\alpha<\Omega).$$

la décomposition du complémentaire de l'ensemble plan $F(U)$, criblé au moyen de l'ensemble U, en constituantes. Les ensembles $\mathcal{E}_\alpha(U)$ $(\alpha>\Omega)$ sont donc mesurables B. Tout à fait comme l'a fait M. N. Lusin dans sa Note „*Sur une famille des complémentaires analytiques*" [2]), on démontre que *les classes des ensembles* $\mathcal{E}_\alpha(U)$ *tendent vers* Ω.

4. H étant un ensemble plan donné et α un nombre ordinal donné $<\Omega$, nous appellerons *partie consituante* (α) *de l'ensemble criblé* $E=\Gamma(H)$, ou simplement *constituante* $E_\alpha(H)$ l'ensemble de tous les nombres a de E, pour lesquels il existe un nombre réel η (dépendant de a), fini ou $=-\infty$ et tel que l'ensemble de tous les points de H situés sur la droite $x=a$ et ayant des ordonnées $y<\eta$ est bien ordonné (suivant la direction positive de l'axe $0Y$) du type α, tandis que l'ensemble de tous les points de H situés sur la droite $x=a$ et tels que $y<x+\varepsilon$ (resp. $y<-n$, si $\eta=-\infty$ n'est pas bien ordonné, quel que soit le nombre positif ε (resp. quel que soit le nombre naturel n) [3]).

Soit

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ldots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnels.

H étant un ensemble plan donné, et n un nombre naturel, désignons par H_n l'ensemble de tous les points (x, y) de H, tels que $y<r_n$.

[1]) J'ai démontré l'existence d'un tel ensemble U dans le vol. VII des *Fund. Math.*, p. 200—201. (Il s'agit là d'un ensemble borné, mais cette condition n'est pas essentielle pour la démonstration).

[2]) Ce volume.

[3]) Notre définition des constituantes E_α diffère un peu de celle de M. Lusin, donnée dans son livre cité, p. 188. M. Lusin prend notamment au lieu de notre inégalité $y<\eta$, l'inégalité-égalité $y\leqslant\eta$.

Vu les définitions des constituantes $\mathcal{E}_\alpha(H)$ et $E_\alpha(H)$, on vérifie sans peine les relations suivantes:

$$E_\alpha(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha(H_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\alpha+1}(H_n) + \mathcal{E}_\alpha(H)\right). \tag{55}$$

pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ de première espèce, et

$$E_\alpha(H) = \prod_{\xi<\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\alpha+1}(H_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\alpha+1}(H_n) + \mathcal{E}_\alpha(H)\right) \tag{56}$$

pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ de deuxième espèce [1]).

Soit H est un ensemble F_σ, les ensembles H_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont évidemment aussi des F_σ et, comme nous avons démontré dans le § 3, les ensembles $\mathcal{E}_\alpha(H_n)$ sont mesurables B (pour $\alpha < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$): les formules (55) et (56) prouvent donc que *si H est un ensemble F_σ, les ensembles $E_\alpha(H)$ sont tous mesurables B* (pour $\alpha < \Omega$) [2]).

On a évidemment (pour tout crible H plan donné) la décomposition

$$\Gamma(H) = E_0(H) + E_1(H) + \ldots + E_\alpha(H) + \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

Si H est un ensemble mesurable B et s'il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que les ensembles $E_\alpha(H)$ sont tous vides pour $\alpha \geqslant \mu$, l'ensemble $\Gamma(H)$ est évidemment mesurable B (en tant qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables B). Or, le réciproque n'est pas vrai, même pour les ensembles H fermés.

En effet, soit N un ensemble analytique linéaire non mesurable B. Comme nous avons démontré dans le § 1, il existe un ensemble plan fermé H_1, dont les points ont les ordonnées $\leqslant 1$, et tel que $\Gamma(H_1) = N$. Or, désignons par H_2 l'ensemble-somme des droites $y = 2$ et $y = 2 + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Posons $H = H_1 + H_2$: ce sera évidemment un ensemble fermé et on voit sans peine que $\Gamma(H)$ est l'ensemble de tous les nombres réels, donc un ensemble mesurable B. Or, il résulte tout de suite de la définition du crible H que $E_\alpha(H) \supset \mathcal{E}_\alpha(H_1)$, pour $\alpha < \Omega$; d'autre part, l'ensemble $N = \Gamma(H_1)$ étant non mesurable B, il existe une infinité non dénombrable de nombres ordinaux $\alpha < \Omega$, pour lesquels l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha(H_1)$ n'est pas vide (§ 3).

Donc, *si H est un ensemble plan fermé et $\Gamma(H)$ mesurable B, les constituantes $E_\alpha(H)$ ne sont pas nécessairement vides à partir d'un certain rang $\mu < \Omega$.*

Les constituantes $E_\alpha(H)$ de l'ensemble criblé $\Gamma(H)$ ne jouissent donc pas d'une propriété analogue à celle des constituantes $\mathcal{E}_\alpha(H)$ de son complémentaire $CF(H)$.

[1]) La formule (56) subsiste d'ailleurs pour tous les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$.

[2]) Pour les cribles *dénombrables* mesurables B ce théorème a été démontré par M. Lusin: voir son livre cité, p. 188.