Sur les cribles projectifs.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans son livre récemment paru [1]) M. N. Lusin a démontré que *tout ensemble criblé au moyen d'un crible analytique est un ensemble analytique* et, plus généralement, tout ensemble criblé au moyen d'un ensemble P_n est un ensemble P_n [2]).

Le but de cette Note est de donner à ce théorème une démonstration basée sur une idée différente de celle de M. Lusin.

Pour fixer les idées, nous nous bornerons aux cribles plans. Soit donc H un ensemble analytique plan. Nous pouvons évidemment supposer que H est situé entre les droites $y=-1$ et $y=1$ (tout crible analytique pouvant être transformé à l'aide des formules $\xi=x$, $\eta=y/(1+|y|)$ en un crible analytique situé entre les droites $y=-1$ et $y=1$ et donnant le même ensemble criblé). Le nombre naturel n étant donné, désignons par H_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe au moins un point (ξ, η) de H, tel que

$$\xi=x \quad \text{et} \quad y<\eta<y+\frac{1}{n}.$$

On voit sans peine que H_n est un ensemble analytique. En effet, désignons par Q l'ensemble de tous les points (ξ, η, ζ) de l'espace, tels que $(\xi, \eta) \epsilon H$ et $\zeta>0$: l'ensemble H étant analytique, l'ensemble Q le sera, comme on le sait, aussi. Or, l'ensemble H_n est évidemment une image continue de l'ensemble Q (la correspondance entre les points (ξ, η, ζ) de Q et les points (x, y) de H_n étant établie par les formules $x=\xi$, $y=\eta-\zeta/(1+n\zeta)$). Donc, Q étant un ensemble analytique, H_n l'est aussi.

Posons

$$(1) \qquad T=H_1 H_2 H_3 \ldots$$

On voit sans peine que l'ensemble E criblé au moyen du crible H coïncide avec la projection PT de l'ensemble T sur l'axe OX.

En effet, si x_0 appartient à l'ensemble E, il existe une suite infinie décroissante

$$(2) \qquad y_1>y_2>y_3>\ldots$$

de nombres réels, telle que $(x_0, y_k) \epsilon H$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$

Posons

$$(3) \qquad \lim_{k=\infty} y_k=y_0:$$

l'ensemble H étant situé entre les droites $y=-1$ et $y=1$, on a $y_k>-1$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$, donc la limite (3) (qui existe, d'après (2)) est un nombre fini. Or, d'après (3) et (2) il existe pour tout n naturel un nombre k, tel que $y_0<y_k<y_0+1/n$, d'où résulte tout de suite que $(x_0, y_0) \epsilon H_n$, pour $n=1, 2, 3, \ldots$, donc, d'après (1): $(x_0, y_0) \epsilon T$ et parsuite $x_0 \epsilon PT$.

D'autre part, soit x_0 un point de l'ensemble PT. Il existe donc un nombre réel y_0, tel que $(x_0, y_0) \epsilon T$, donc, d'après (1): $(x_0, y_0) \epsilon H_n$, pour $n=1, 2, 3, \ldots$ D'après la définition de l'ensemble H_n, il existe donc pour tout n naturel un point (x_0, η_n) de H, tel que $y_0<\eta_n<$ $<y_0+1/n$. L'intersection de l'ensemble H par la droite $x=x_0$ est un ensemble qui n'est pas bien ordonné (suivant la direction positive de l'axe OY) et parsuite (d'après la définition de l'ensemble criblé au moyen du crible H) on a $x_0 \epsilon E$.

La formule $E=PT$ est ainsi démontrée.

Or, les ensembles H_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ étant analytiques, il résulte de la formule (1) que T est un ensemble analytique, donc aussi PT. L'ensemble E est donc analytique, c. q. f. d.

Pour les ensembles P_n la démonstration est tout à fait analogue.

[1]) N. Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques etc.* Paris, Gauthier-Villars 1930, p. 180. Cf. aussi ma Note du 24 octobre 1927, *C. R.*, t. 185. p. 835 (Théorème VII).

[2]) L. c., p. 287. Pour la définition des ensembles P_n, voir p. e. *Fund. Math.* t. XIII, p. 238.