Sur les points singuliers d'une fonction analytique.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

Le but de cette Note est: 1) de montrer que les points singuliers d'une fonction analytique (dans le sens de M. Bieberbach[1]) s'obtiennent par une métrisation convenable du champ de Riemann de cette fonction et par l'application du procédé d'extension de Cantor-Meray-Hausdorff; 1) de démontrer quelques théorèmes sur la dimension de l'ensemble de points singuliers.

1. Rappellons quelques notions dues à M. Bieberbach[2]).

Soit $f(z)$ une fonction analytique, p un element fonctionnel de $f(z)$; p étant de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, resp. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{1}{z}\right)^k$, nous désignerons par $z(p)$ et nous appellerons coordonnée z de p le point z_0, resp. le point à l'infini. U étant un ensemble d'éléments fonctionnels de $f(z)$ nous désignerons par $Z(U)$ et nous appellerons *projection de* U sur le plan de z l'ensemble de tous les $z(p)$ tels que $p \in U$.

On appelle *champ de Riemann* de $f(z)$ l'ensemble $R(f)$ de tous les éléments fonctionnels de $f(z)$ considéré comme un éspace topologique, la notion de voisinage étant fixée de manière suivante.

L'ensemble $U \subset R(f)$ est un voisinage de p_0 si: 1) $Z(U)$ est un voisinage de $z(p_0)$, 2) tout $p \in U$ est un prolongement immédiat de p_0.

2. V étant un ensemble du plan de z, désignons par $\vartheta(V)$ le diamètre de la projection stéréographique de V sur la sphère:

[1]) Bieberbach. Enc. Math. Wiss. II C 4 p. 401—404. Lehrbuch d. Funktionentheorie 3 Afl. 1930. I p. 215—217.

[2]) Bieberbach. Enc. II C 4 p. 391—392. Lehrb. p. 214—215.

$\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1$ [3]). Définissons la distance $\varrho(p_1, p_2)$ entre les points p_1, p_2 de $R(f)$ de manière suivante:

$\varrho(p_1, p_2) =$ *borne inférieure de* $\vartheta(Z(C))$, C *parcourant tous les continus contenus dans* $R(f)$ *et contenant* p_1 *et* p_2.

$\varrho(p_1, p_2)$ satisfait évidement aux trois axiomes de M. Hausdorff[4]).

Par l'introduction de la distance $R(f)$ devient un éspace métrique. Appliquons à cet éspace le procédé d'extension de Cantor-Meray-Hausdorff[5]) c. à d. considérons l'éspace $R^*(f)$ défini par les condition suivantes: 1) toute suite $(p_1, p_2, \ldots)$ d'éléments de $R(f)$ qui satisfait à la condition de Cauchy détérmine un point de $R^*(f)$; 2) le point détérminé par la suite: $(p, p, \ldots)$ est identique à p; 3) la distance entre les points: $q_1 = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots)$ et $q_2 = (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots)$ est égale à $\lim \varrho(p_n^{(1)}, p_n^{(2)})$, ces points étant considéré comme identiques si leur distance est 0. Nous désignons cette distance encore par $\varrho(q_1, q_2)$.

3. Si $q = (p_1, p_2, \ldots)$ est un point de $R^*(f)$, alors la suite $(z(p_1), z(p_2), \ldots)$ converge vers un point qui ne depend que de q et que nous désignerons par $z(q)$ et appellerons la coordonnée z de q. Si $U^* \subset R^*(f)$ alors $Z(U^*)$ désignera l'ensemble de tous les $z(q)$ tels que $q \in U^*$. $R^*(f)$ est un éspace complet. On démontre sans peine que pour $q_1 \in R^*(f)$, $q_2 \in R^*(f)$ *la distance* $\varrho(q_1, q_2) =$ *borne inférieure de* $\vartheta(Z(C^*))$, C^* *parcourant tous les continus contenus dans* $R^*(f)$ *et contenant* q_1 *et* q_2. Il en résulte que $R^*(f)$ est localement connexe, donc „arcwise connected".

4. Soit $B(f) = R^*(f) - R(f)$. *Les points de* $B(f)$ *sont identiques aux points singuliers de la fonction* $f(z)$ *dans le sens de M. Bieberbach.*

La démonstration ne présente aucune difficulté.

$B(f)$ est fermé par rapport à $R^*(f)$, donc c'est un G_δ absolu.

$Z(B(f))$ est une image continue de $B(f)$, donc c'est un ensemble analytique.

5. ***Théorème.*** *Soit* $W \subset R^*(f)$; *la dimension de* W *est inférieure où égale à la dimension de* $Z(W)$.

[3]) C. à d. $\vartheta(V) =$ borne inférieure de $d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)}}$ pour $z_1 \in V$, $z_2 \in V$.

[4]) Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre 1914 p. 211.

[5]) Hausdorff. op. c. p. 315—316.

Supposons d'abord $\dim Z(W)=0$. Soit q_0 un point de W, η un nombre positif. Il existe un ensemble $M \subset Z(W)$ à la fois ouvert et fermé dans $Z(W)$, contenant $z(q_0)$ et de diamètre $\vartheta(M)<\frac{\eta}{16}$. Soit W_1 l'ensemble de tous les points $q \in W$, tels que $z(q) \in M$: W_1 est évidement à la fois ouvert et fermé dans W; de plus $q_0 \in W_1$. Soit W_2 la $\left(\frac{1}{16}\eta - 0\right)$-composante de W_1 [6]), qui contient q_0. C'est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans W_1, donc aussi dans W. Soit $q_1 \in W_2$. D'après la définition de W_2 il existe une suite de points: $r_0=q_0, r_1, r_2, \ldots, r_m=q_1$ telle que $r_k \in W_2$ et $\varrho(r_k, r_{k+1})< <\frac{\eta}{16}$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. Donc il existe une suite de continus contenus dans $R^*(f)$: $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ telle que $r_k \in C_k$, $r_{k+1} \in C_k$ et $\vartheta[Z(C_k)]<\frac{1}{16}\eta$. Posons; $C=C_0+C_1+\ldots+C_{m-1}$; c'est un continu contenu dans $R^*(f)$ et contenant r_0, r_m c. à d. q_0 et q_1. Soit z' un point de $Z(C)$. z' est contenu dans l'un au moins des ensembles: $Z(C_0), Z(C_1), \ldots, Z(C_{m-1})$. Soit $z' \in Z(C_l)$. On a: [7])

$$d(z', z(q_0)) \leqq d(z', z(r_l)) + d(z(r_l), z(q_0)).$$

Mais $z(r_l) \in Z(C_l)$ donc:

$$d(z', z(r_l)) \leqq \vartheta(Z(C_l)) < \frac{1}{16}\eta$$

D'autre part $r_l \in W_2 \subset W_1$, donc $z(r_l) \in Z(W_1) = M$, donc:

$$d(z(r_l), z(q_0)) \leqq \vartheta(M) < \frac{1}{16}\eta.$$

Il en résulte: $d(z', z(q_0)) < \frac{1}{8}\eta$. Donc pour deux points quelconques: z', z'' de $Z(C)$ on a l'inégalité: $d(z', z'') < \frac{1}{4}\eta$, donc; $\vartheta(Z(C)) \leqq \frac{1}{4}\eta$ et: $\varrho(q_0, q_1) \leqq \frac{1}{4}\eta$.

[6]) Pour la définition de la $(\varrho - 0)$-composante v. Hausdorff op. c. p. 300.
[7]) Comp. [3]).

Il en résulte l'inégalité: $\varrho(q_1, q_2) \leqq \frac{1}{2}\eta$ pour $q_1 \in W_2$, $q_2 \in W_2$, donc le diamètre de W_2 = borne supérieure de $\varrho(q_1, q_2)$ pour $q_1 \in W_2$, $q_2 \in W_2$, est inférieur à η.

On voit bien que q_0 est contenu dans des ensembles arbitrairement petits, à la fois ouverts et fermés par rapport à W. Donc la dimension de W au point q_0 est $=0$. Donc $\dim W=0$.

Soit maintenant $\dim Z(W)=k$ $(k=1, 2)$. $Z(W)$ se décompose d'après un théorème fondamental de la théorie de dimension en $k+1$ ensembles de dimension 0: $Z(W)=\sum_{l=1}^{k+1} Z_k$. Soit W_l l'ensemble de points $q \in W$ tels que $z(q) \in Z_l$. On a:

$$W=\sum_{l=1}^{k+1} W_l,$$

$$\dim Z(W_l) = \dim (Z_l) = 0.$$

donc $\dim W_l = 0$. W étant la somme de $k+1$ ensembles 0-dimensionnels est au plus de dimension $k=\dim Z(W)$ c. q. f. d.

6. En appliquant notre théorème au cas: $W=B(f)$ on obtient le

Théorème: *$\dim B(f) \leqq 2$ c. à d. l'ensemble de points singuliers d'une fonction analytique est de dimension au plus égal à 2.*

Je ne sais pas s'il existe une fonction $f(z)$ telle que $B(f)=2$.