Sur les fonctions implicites mesurables B.

Par

Pierre Novikoff (Moscou).

1. Considérons les équations

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_q(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) &= 0 \end{aligned}$$

où les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_q$ sont mesurables B. Les équations $F_i = 0$ définissent p fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dans le cas où les fonctions y_i sont *uniformes*, nous avons les théorèmes suivants de M. Lebesgue:

1) L'ensemble d'existence des fonctions implicites est mesurable B.

2) Les fonctions implicites uniformes sont mesurables B.

Si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont *multiformes* deux cas seulement sont possibles:

1) A chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ correspond au plus une infinité dénombrable de valeurs de la fonction y_i;

2) Il existe au moins un point tel, que l'ensemble des valeurs de la fonction y_i en ce point est non dénombrable.

Je vais démontrer que dans le premier cas le théorème 1 de M. Lebesgue est encore vrai, et au lieu du théorème 2 nous avons le théorème suivant:

Il existe une fonction *uniforme* mesurable B qui satisfait aux équations $F_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, q$.

Dans le cas général les théorèmes 1 et 2 ne sont pas vrais. Il est évident que l'ensemble d'existence des fonctions implicites y_i peut

être non mesurable B. Et même si l'on suppose que cet ensemble est mesurable B, le second théorème ne subsiste plus. Nous verrons qu'il existe une équation $F(x, y) = 0$ telle que, F étant une fonction mesurable B, l'ensemble d'existence de la fonction implicite $y(x)$ est l'intervalle $(0, 1)$, mais il n'existe aucune fonction *uniforme* mesurable B qui satisfait à l'équation $F = 0$.

2. Dans la suite nous considérons seulement le cas très simple d'une seule équation $F(x, y) = 0$, puisque toutes les méthodes peuvent être appliquées au cas général. L'ensemble plan des points $M(x, y)$ dans lesquels nous avons $F(x, y) = 0$ est mesurable B, soit E cet ensemble. Le problème d'existence d'une fonction uniforme qui satisfait à l'équation $F = 0$ se réduit à la question suivante: est-il possible de choisir dans l'ensemble E une courbe mesurable B uniforme, définie dans tout l'ensemble d'existence de la fonction multiforme implicite $y(x)$?

Pour démontrer les théorèmes énoncées sur les fonctions implicites nous avons besoin de quelques propositions préliminaires.

3. Considérons $n-1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ contenus dans un intervalle (a, b) et tels que $x_{i-1} < x_i$. Prenons dans chaque intervalle $(a, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i), \ldots, (x_{n-1}, b)$ un point rationnel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Le choix de ces points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant fixé, choisissons parmi les intervalles $(a, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha_n, b)$ un intervalle quelconque que nous désignons par i.

L'ensemble de tous les groupes possibles $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ étant dénombrable, soient

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n), (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}), \ldots, (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}), \ldots$$

tous ces groupes; l'ensemble des intervalles i est donc aussi dénombrable; soient $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ ces intervalles.

Démontrons qu'il existe un entier positif m, $0 < m \leqslant n$, tel que Σi_k contient tous les points de l'intervalle (x_m, x_{m+1}) sauf peut-être un seul point. Supposons le contraire; nous aurons donc dans chaque intervalle (x_m, x_{m+1}) au moins deux points β_m et γ_m qui ne sont pas contenus dans Σi_k. Formons un groupe $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$, où $\beta_n < \alpha_m^{(k)} < \gamma_m$. Il est évident que chaque intervalle $i_m^{(k)}$ contient ou bien β_n, ou bien γ_m, donc ou bien $\beta_n \subset \Sigma i_k$, où bien $\gamma_m \subset \Sigma i_k$.

4. Considérons un ensemble de points bien ordonné $\backepsilon$, situé dans l'intervalle (a, b) et un système d'intervalles $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ tels que

$\Sigma i_k = (a, b)$. Supposons que le type de chacun des ensembles $\backepsilon i_k$ est au plus égal à β.

Démontrons que le type de l'ensemble $\backepsilon$ est au plus égal à $\beta\omega$. Choisissons un ensemble de points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ où x_1 est le premier point de l'ensemble $\backepsilon$ et $x_i < x_{i+1}$; $\lim x_i = b$. Si m_n est le premier point de l'ensemble $\backepsilon$ appartenant à l'intervalle (x_n, x_{n+1}), la somme

$$\backepsilon[x_1 x_2] + \backepsilon[m_2 x_3] + \ldots + \backepsilon[m_n x_{n+1}] + \ldots$$

coïncide avec $\backepsilon$. Deux termes voisins quelconques de cette somme n'ont point commun. D'après le théorème de Heine-Borel, le segment $[x_1, x_2]$ est contenu dans un nombre fini d'intervalles $i_{n_1}, i_{n_2}, \ldots, i_{n_k}$. Supposons que i_{n_1}, contient le point x_1, i_{n_2} contient le premier point de l'ensemble $\backepsilon[x_1, x_2] - i_{n_1}$, e, i_{n_3} contient le premier point de l'ensemble $\backepsilon[x_1 x_2] - i_{n_1}\backepsilon - i_{n_2}\backepsilon$ etc. Nous pouvons écrire $[x_1, x_2]\backepsilon = \backepsilon i_{n_1} + \backepsilon(i_n \quad i_{n_1}) + \ldots + \backepsilon(i_{n_k} - i_{n_{k-1}})$. Il est évident que le type de l'ensemble $\backepsilon[x_1 x_2]$ est au plus égal à $\beta \cdot k_1$, d'une manière analogne, le type de $\backepsilon[m_2, x_3]$ est $\leqslant \beta k_2$, et, en général, le type de $\backepsilon$ vérifie l'inégalité $\backepsilon \leqslant \beta k_1 + \beta k_2 + \ldots + \beta k_n + \ldots = \beta\omega$. Or il est clair que si l'ensemble bien ordonné $\backepsilon$ est situé dans deux intervalles contenus dans la somme des intervalles $i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots$ tels que le type de $i_k\backepsilon$ est au plus égal à β, le type de l'ensemble $\backepsilon$ est au plus égal à $\beta \cdot \omega \cdot 2$.

5. Considérons, dans le carré $0 < x < I$, $0 < y < I$, une suite de systèmes de carrés, chaque système étant contenu dans un autre. Les côtés des carrés de chaque système sont parallèles aux axes des coordonnées. Les carrés d'un même système n'ont aucun point commun, et au dessous d'une droite arbitraire $y = a$, $0 < a < I$, il y a au plus un nombre fini de carrés. L'ensemble commun à tous ces systèmes de carrés est évidemment un G_δ plan. Si nous prenons le côté supérieur de chaque carré, nous obtenons un système d'intervalles auquel M. Lusin a donné le nom de „crible", M. Lusin a démontré les théorèmes suivants [1]):

1) Chaque droite parallèle à l'axe OY qui ne coupe pas ce G_δ coupe le crible en un ensemble bien ordonné à l'aide de cette convention que le rang des points soit conforme à la direction positive de l'axe OY.

[1]) N. Lusin, Sur les ensembles analytiques, Fund. Math. t. X., p. 1—95.

2) Chaque point d'une parallèle à l'axe OY qui est point-limite d'une suite descendante des points situés sur la même parallèle appartient à ce G_δ.

3) Chaque ensemble analytique linéaire peut être considéré comme la projection orthogonale d'un tel G_δ; d'ailleurs on peut supposer que les extrémités des côtés des carrés ont des coordonnés rationnelles.

Des propositions analogues sont démontrées pour les ensembles G_δ dans l'espace à trois dimensions; dans ce cas l'ensemble G_δ est la partie commune à des systèmes de cubes orientés suivant les axes de coordonnées et situés au dessus du plan XOY.

6. Considérons dans le plan XOY un crible quelconque. Prenons un point x_0 tel que la droite $x = x_0$ coupe le crible en un ensemble bien ordonné (conformément à la direction positive de l'axe OY). Le point x_0 forment un ensemble complémentaire à un ensemble analytique. Soit D cet ensemble. Démontrons le lemme suivant:

Lemme. *Si les types transfinis des ensembles bien ordonnés du crible ne sont pas bornés supérieurement, il existe un point x' tel que la droite $x = x'$ coupe le crible en un ensemble qui contient une partie dense en elle-même.*

Considérons sur l'axe OY les points $y = r\sqrt{2}$, où r est un nombre rationnel. La droite $y = r\sqrt{2}$ n'a aucun point commun avec le crible. Démontrons qu'il existe une droite $y = r\sqrt{2}$, tel que β étant un nombre transfini $< \Omega$, on peut trouver une droite $x = x_0$ qui coupe la partie du crible supérieure à la droite $y = r\sqrt{2}$ et la partie inférieure à cette droite en des ensembles bien ordonnés tous les deux de types supérieures à β. Supposons, par impossible, qu'il existe un nombre transfini β tel que, quelles que soient les droites $y = r\sqrt{2}$ et $x = x_0$ l'un au moins des deux intervalles $0 < y < r\sqrt{2}$ et $r\sqrt{2} < y < 1$ de la droite $x = x_0$ contient des points du crible formant un ensemble de type inférieur à β. Prenons une droite $x = x_0$ qui coupe le crible en un ensemble bien ordonné. Choisissons pour chaque r l'un des deux intervalles $(0, r\sqrt{2})$ et $(r\sqrt{2}, 1)$ situés sur cette droite et pour lequel le type de l'ensemble bien ordonné est inférieur à β. Formons la somme de ces intervalles. D'après le lemme du N° 2, nous savons que cette somme coïncide avec tout l'intervalle $0 < y < 1$ de la droite $x = x_0$, sauf peut-être un seul point. Désignons ce point par h. Les intervalles

$(0, h)$ et $(h, 1)$ sont contenus dans notre somme d'intervalles. Le lemme du N° 3 montre que le type de l'ensemble bien ordonné situé sur la droitu $x = x_0$ est inférieut à $\beta \cdot w \cdot 2$, ce qui contredit à l'hypothèse faite.

Il est évident qu'on peut trouver deux intervalles i_1 et i_2 du crible dont l'un est contenu dans le domaine borné par les droites $y = 0$ $y = r\sqrt{2}$ et l'autre est contenu dans la domaine borné par les droites $y = r\sqrt{2}$ et $y = 1$, tels que les projections de ces intervalles sur l'axe OX aient un intervalle commun; cet intervalle contient un ségment $[a_1, b_1]$; et pour l'ensemble $D[a_1, b_1]$ la proposition précédente est encore vraie.

On démontre de la même manière qu'on peut trouver deux nombres $0 < r_1 < r < r_2 < 1$ tels que le nombre transfini β étant arbitraire, il existe une droite $x = x_0$ où x_0 appartient à $[a_1, b_1]$ qui coupe le crible en un ensemble contenues dans les intervalles $(0, r_1\sqrt{2})$, $(r_1\sqrt{2}, r\sqrt{2})$, $(r\sqrt{2}, r_2\sqrt{2})$, $(r_2\sqrt{2}, 1)$ sont chacune de type supérieur à β. On peut trouver des intervalles du crible, soient i_3, i_4, i_5, i_6, qui appartiennent à nos intervalles. Leurs projections ont un segment commun $[a_2, b_2]$ et pour l'ensemble $D[a_2, b_2]$ la proposition précédente est encore vraie. Si nous continuons ce procédé nous aurons des segments $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ et des intervalles $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ Ces segments ont un point commun x_0, et la droite $x = x_0$ coupe tous ces intervalles i_k. Il est évident que l'ensemble commun à la droite $x = x_0$ et au crible contient une partie dense en elle-même.

7. Prenons dans le plan XOY un ensemble E mesurable B, tel que l'ensemble commun à E et à chaque droite $x = x_0$ est au plus dénombrable. Nous pouvons trouver dans l'espace $OXYZ$ un ensemble G_δ du N° 5, qui représente une surface uniforme et tel que sa projection sur le plan XOY coïncide avec notre ensemble E. La projection de chaque système de cubes sur le plan XOZ est un système de carrés; donc l'ensemble commun à tous les systèmes de carrés est un G_δ plan. Il est évident que la projection de l'ensemble G_δ situé dans l'espace sur le plan XOZ coïncide avec le G_δ plan, et la projection de ce dernier sur l'axe OX coïncide avec la projection de E. Désignons par U le G_δ contenu dans l'espace et par u le G_δ plan. L'ensemble des points $\{x_0\}$ tels que les droites $y = 0$, $x = x_0$ coupent le crible correspondant à u en un ensemble bien ordonné, est l'ensemble complémentaire

à la projection de u. *Démontrons que les types des ensembles bien ordonnés situés sur les droites $x = x_0$, $y = 0$ sont bornés supérieurement.*

Supposons, par impossible, qu'il n'en est pas ainsi. Dans ce cas nous trouvons, d'après le théorème précédent, une droite $y = 0$, $x = x_0$ qui coupe le crible correspondant à u en un ensemble dense en lui-même. Chaque point de la droite $x = x_0$ qui est un point-limite d'une suite descendante de points situés sur la même droite appartient à u. Mais cette droite contient un ensemble non dénombrable de tels points puisque les points du crible situés sur cette droite forment un ensemble qui contient une partie dense en elle-même. Nous voyons donc que la droite $x = x_0$ coupe u en un ensemble non dénombrable. Le plan $x = x_0$ coupe donc U en un ensemble non dénombrable puisque sa projection est non dénombrable. Les droites $x = x_0$, $y = y_0$ coupent U en un point au plus, par conséquent la projection sur $X0Y$ de l'ensemble commun à u et au plan $x = x_0$ est aussi non dénombrable, contrairement à l'hypothèse faite.

Nous voyons que les types des ensembles bien ordonnés situés sur les droites $y = 0$, $x = x_0$ ont une borne supérieure. Le complément de la projection de u est un ensemble mesurable B, ainsi que la projection elle-même. Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Si un ensemble plan E mesurable B est coupé par chaque parallèle à l'axe OY en un ensemble au plus dénombrable, la projection de E sur l'axe OX est mesurable B.

8. Considérons dans le plan XOY un ensemble E mesurable B jouissant de la propriété suivante: α_1 et α_2 étant des nombres rationnels quelconques, la partie de E contenue entre les droites $y = \alpha_1$ et $y = \alpha_2$ a pour projection sur l'axe OX un ensemble qui est encore mesurable B. Un tel ensemble E sera nommé „*ensemble normal*". Nous allons démontrer le théorème suivant:

L'ensemble des points x_0 tels que la droite $x = x_0$ coupe l'ensemble normal en un point au plus est mesurable B.

Etant donné un ensemble normal E, considérons toutes les droites $y = \alpha_i$, α_i étant un point rationnel quelconque. Considérons pour chacune de ces droites $y = \alpha_i$ les parties de E situées au dessus et au dessous de cette droite; soit K_i la partie commune à leurs projections sur l'axe OX. Formons la somme $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n + \ldots$. Il est évident que K est mesurable B. Démontrons que K est le complémentaire de l'ensemble $\{x_0\}$.

Soit $x = x'$ une droite qui coupe l'ensemble normal en deux points α et β au moins. Prenons sur cette droite un point rationnell α_k, $\alpha < \alpha_k < \beta$, et considérons la droite $y = \alpha_k$. Le points α est situé entre les droites $y = 0$ et $y = \alpha_k$, le point β entre les droites $y = \alpha_k$ et $y = 1$. La projection de ces points sur l'axe OX est le seul point x'. Les projections sur l'axe OX des parties de l'ensemble normal situées au dessus et au dessous de la droite $y = \alpha_k$ ont une partie commune qui contient le point x'; donc $x' \subset K_k \subset K$.

Supposons que la droite $x = x'$ coupe l'ensemble normal en un point β au plus. Le point β appartient à l'une des parties de notre ensemble normal, quel que soit la droite $y = \alpha_k$. La partie commune aux projections des deux parties de l'ensemble normal ne contient donc pas le point x'', et ce point n'est pas contenu dans K. Nous voyons donc que K est le complémentaire de $\{x_0\}$ et ce dernier ensemble est mesurable B.

Considérons l'ensemble de les droites $\{x = x_0\}$. Cet ensemble est mesurable B. Il est coupé par l'ensemble normal considéré en un ensemble mesurable B, et cet ensemble est une courbe uniforme mesurable B.

9. *Etant donné un ensemble E mesurable B qui est coupé par chaque droite $x = x_0$ en un ensemble au plus dénombrable, on peut former une courbe uniforme mesurable B passant par les points de E et définie pour chaque point de la projection de E sur l'axe OX.*

Revenons à l'ensemble G_δ plan u dont nous avons parlé au N° 7. Il est évident que chaque droite $x = x_0$ coupe u en un ensemble, dont aucune partie n'est dense en elle-même. On peut trouver sur chaque droite $x = x_0$ contenant des points de u un intervalle (α_k, β_k) (α_k et β_k étant rationnels) qui contient un seul point de u. Soit (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots$ l'ensemble de tous les intervalles aux extrémites rationnelles. Considérons dans le plan XOZ les domaines bornés par les droites $y = 0$, $z = a_i$, $z = b_i$, i étant un entier quelconque. Considérons toutes les droites $x = x_0$ qui coupent la partie de u contenue dans le premier domaine $a_1 < z < b_1$ en un seul point. Enlevons ces points et désignons par n_1 l'ensemble obtenu. Désignons par u_2 l'ensemble-différence $u - q_1$ (où q_1 est l'ensemble des droites $x = x_0$ contenant les points de n_1). Dans le second domaine $a_2 < z < b_2$ prenons tous les points de u_2 qui sont contenus dans les intervalles $y = 0$, $x = x_0$, $a_2 < z < b_2$ si ces intervalles ne contiennent aucun autre point. Désignons par n_2 l'ensemble des droites $x = x_2$ contenant des points de n_2).

En continuant ce procédé nous obtenons des ensembles $u, u_2, u_3 \ldots$ et des ensembles $n_1, n_2, \ldots$ Il est évident, d'après les théorèmes du N° 7, que les u_i sont des ensembles normaux, donc les ensembles $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ sont mesurables B. L'ensemble $N = n_1 + n_2 + \ldots$ est aussi mesurable B. Démontrons que N est une courbe uniforme Supposons qu'il existe une droite $x = x_0$ qui coupe N en deux points au moins. Il est évident que ces deux points ne peuvent pas appartenir à un même ensemble n_k. Supposons que le premier de ces points est contenu dans n_{k_1} et le second dans n_{k_2}, où $k_1 < k_2$. Mais l'ensemble U_{k_1+1} ne contient pas de points de u_{k_1} situés sur la même droite $x = x_0$ que u_{k_2}, donc n_{k_2} ne peut pas contenir ce point.

Démontrons que chaque droite $x = x_0$ qui contient des points de u contient un point de l'ensemble N.

On peut trouver sur la droite $x = x_0$ des intervalles (a_{i_1}, b_{i_1}), $(a_{i_2}, b_{i_2}) \ldots$ tels que chacun d'eux contient un seul point de u Considérons les couples de droites $(z = a_{i_k}, z = b_{i_k}, y = 0)$. Prenons le couple dont l'indice i_q est le plus petit. Chaque couple dont l'indice est plus petit que i_q ne peut contenir qu'un seul point de u sur la droite $x = x_0$; par conséquent le point de u qui est situé sur la droite $x = x_0$ entre les droites $z = a_{i_q}$, $z = b_{i_q}$ est contenu dans u_{i_q} et dans n_{i_q}. Nous voyons que N est une courbe uniforme mesurable B, définie dans chaque point de la projection de u sur l'axe OX et par conséquent, pour tous les points de la projection de E.

Considérons une droite $z = 0$, $x = x_0$ qui contient des points de E. Le plan $x = x_0$ coupe u dans un ensemble tel que sa projection sur la droite $y = 0$, $x = x_0$ coïncide avec l'intersection de cette droite et de u. Un seul point de u situé sur la droite $y = 0$, $x = x_0$ est contenu dans N. Soit α_{x_0} ce point. Menons par ce point une perpendiculaire au plan XOZ; elle coupe u en un seul point. Désignons par β_{x_0} la projection de ce point sur le plan XOY; β_{x_0} est contenu dans E, et il est le seul point de la partie de l'ensemble E située sur la droitie $z = 0$, $x = x_0$. Donc $\{\beta_{x_0}\}$ est une courbe uniforme. Elle est contenue dans E et définie pour tout point de la projection de E sur l'axe OX. L'ensemble $\{\beta_{x_0}\}$ est mesurable B, puisque c'est la projection de l'intersection de u avec l'ensemble des perpendiculaires au plan XOZ menées par tous les points de N. Cette intersection est mesurable B; d'ailleurs, elle est aussi une courbe uniforme relativement au plan XOY; donc, sa projection est mesurable B.

10. Revenons aux fonctions implicites. Nous voyons, d'après le théorème de N⁰ 8, que dans le cas particulier des fonctions implicites considérées dans le N⁰ 1, l'ensemble d'existence des fonctions implicites est mesurable B.

D'après le théorème de N⁰ précédent, il existe des fonctions implicites mesurables B et uniformes qui vérifient l'équation $F(x,y)=0$.

11. Nous verrons que dans le cas général le problème se réduit à la question suivante: *Est-il possible de séparer deux complémentaires analytiques sans point commun au moyen de deux ensembles mesurables B?*

Nous démontrerons que la réponse à cette question est *négative*.

Pour les fonctions implicites nous avons la proposition suivante:

Il existe une équation $F(x, y)=0$ telle que l'ensemble d'existence de la fonction implicite y est l'intervalle entier $(0, 1)$ *mais il n'existe aucune fonction uniforme mesurable B satisfaisant à l'équation $F=0$.*

Nous allons construire une fonction $z=J(x, y)$ rentrant dans les classes de Baire et telle que $\varphi(y)$ étant une fonction continue croissante et d'ailleurs arbitraire, il existe toujours un x_0 pour lequel $J(x_0, y)=\varphi(y)$.

D'ailleurs quel que soit x_0, la fonction $\varphi(y)=\Phi(x_0, y)$ est toujours une fonction continue croissante.

La construction de la fonction $J(x, y)$.

12. Considérons le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$. Les droites $y=\frac{1}{2^n}$, $y=\frac{2}{2^n}, \ldots,$ $y=\frac{2^n-1}{2^n}$ et $x=\frac{1}{2^n}$; $x=\frac{2}{2^n}, \ldots,$ $x=\frac{2^n-1}{2^n}$ partagent ce carré en 2^{2n} petits carrés. Soit $\{C_{ik}\}_n$ l'ensemble des petits carrés; nous supposons que les côtes des carrés appartiennent à cet ensemble. Appelons „chaine croissante" une partie de $\{C_{ik}\}_n$ telle que:

1) Sa projection sur l'axe OX est le segment $[0, 1]$

2) Sa projection sur l'axe OY est un segment quelconque.

3) $C_{i_1k_1}$ et $C_{i_2k_2}$ étant deux carrés d'une chaîne, si $i_1 < i_2$ on a aussi $k_1 \leqslant k_2$.

Il est évident que le nombre de différentes chaînes croissantes d'indice n est fini. Désignons le par a_n, et désignons les chaînes par $L_n^1, L_n^2, \ldots, L_n^{a_n}$. Considérons une chaîne L_{n+1}^i d'indice $n+1$ quelconque. Prenons tous les carrés $\{C_{ik}\}_n$ qui contiennent des carrés de L_{n+1}^i. Désignons par M_n l'ensemble de ces derniers. Démontrons que M_n est une chaîne L_n^j quelconque. Il est évident que l'ensemble M_n satisfait aux conditions 1) et 2). Mais il satisfait aussi à la condition 3): dans le cas contraire on pourrait trouver deux carrés $a_{i_1k_1}$ et $a_{i_2k_2}$ de l'ensemble M_n tels que $i_1 > i_2$ et $k_1 > k_2$. Prenons deux carrés de L_{n+1}^i: $a'_{j_1l_1}$ et $a'_{j_2l_2}$; $a_{i_1k_1} \supset a'_{j_1l_1}$ $a_{i_2k_2} > a'_{j_2l_2}$. Il est évident que les inégalités simultanées $j_1 > j_2$ et $l_1 > l_2$ sont impossibles, puisqu'elles contredisent à la condition 3).

13. Considérons les ensembles fermés plans dont chacun satisfait aux conditions suivantes:

1) La projection d'un tel ensemble sur l'axe OX est le segment $[0, 1]$.

2) La projection sur l'axe OY est un segment quelconque.

3) Quels que soient deux points $a(x_1, y_1)$ et $b(x_2, y_2)$ l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne $y_1 \leqslant y_2$.

Un tel ensemble sera nommé „courbe monotone".

Démontrons que l'ensemble commun à une suite dénombrable de chaînes $L_{n_1}^{i_1} \supset L_{n_2}^{i_2} \supset \ldots \supset L_{n_k}^{i_k} \supset \ldots = L$ est une courbe monotone.

Considérons un point quelconque $y=0$, $x=x_0$. La droite $x=x_0$ coupe chaque chaîne donnée en un segment. Les segments communs à la droite $x=x_0$ et aux chaînes successives sont contenus l'un dans l'autre. Il existe au moins un point qui est contenu dans tous les segments, et par conséquent dans L. Nous voyons que la projection de L sur l'axe OX est le segment $[0, 1]$.

Considérons la projection de L sur l'axe OY; l'ensemble L est fermé, donc sa projection l'est aussi. Donc, la borne supérieure et la borne inférieure de cette projection lui appartiennent. Prenons un point $b(0, y_0)$ situé entre les bornes de la projection de L. Il est évident que la droite $y=y_0$ coupe chaque chaîne $L_{n_k}^{i_k}$ en un segment, et tous ces segments sont contenus l'un dans l'autre. Il existe au moins un point qui est contenu dans tous les segments, donc dans E. La projection de ce point sur l'axe OY est $b(0, y_0)$. Nous voyons que la projection de L sur l'axe OY est un segment.

Considérons deux points quelconques de L, soit $a(x_1, y_1)$ et $b(x_2, y_2)$. En supposant que $x_1 < x_2$ démontrons que $y_1 \leqslant y_2$. En effet, dans le cas contraire $y_1 - y_2 = \delta$ est un nombre positif. Choisissons un nombre n_k tel que $\frac{1}{2^{n_k}} < \frac{x_2 - x_1}{3}$ et $\frac{1}{2^{n_k}} < \frac{y_1 - y_2}{3}$. L'indice i du carré de la chaîne $L_{n_k}^{i_k}$ qui contient le point b est plus grand que l'indice i de celui qui contient le point a. Mais il est facil de voir que l'indice k du carré qui contient b est inférieur à celui du carré qui contient le point a, ce qui est impossible. Nous voyons que L satisfait à toutes les conditions qui définissent une courbe monotone.

14. Supposons que la droite $x = x_0$ coupe une courbe monotone N en un ensemble E qui contient au moins deux points. Soient $a(x_0, y_1)$ et $b(x_0, y_2)$ la borne supérieure et la borne inférieure de E, et y_0 un point situé entre y_1 et y_2. Démontrons que la droite $y = y_0$ coupe N en un point au plus; soit $c(x_0\, y_0)$ ce point. Supposons le contraire, donc qu'il existe encore un point $a(x', y_0)$ qui est contenu dans N. Mais si $x' < x_0$, on a $y_0 \leqslant y_1$ et si $x' > x_0$, on a $y_0 \geqslant y_2$ d'après la définition d'une courbe monotone. Ceci contredit à l'hypothèse.

Il est évident que la droite $y = y_0$ coupe nécessairement l'ensemble N dans le point C, puisque le point (c_1, y_0) est contenn dans la projection de O sur l'axe OY. Or, y_0 est un point quelconque situé sur l'axe OY entre y_1 et y_2; nous voyous donc que chaque droite $x = x_0$ coupe la courbe monotone en un seul point ou en segment.

15. Considérons un ensemble n qui est contenu dans N (N étant l'ensemble du N° précédent); et tel que les abscisses x de ses points vérifient les inégalités $0 < x < 1$. Il est facile de démontrer que $N - n$ n'est pas une courbe monotone. Il en résulte que si l'ensemble commun à deux courbes monotones est encore une courbe monotone ces courbes coïncident dans l'intervalle $(0, 1)$.

16. Considérons une courbe monotone quelconque l. Prenons les carrés de $\{C_{ik}\}_n$ qui contiennent des points de l. Dans le cas où un point de l est situé sur un côté d'un carré, donc appartient à deux ou quatre carrés simultanément, nous prenons celui des carrés qui est le plus éloigné de l'axe OX et de l'axe OY. L'ensemble de ces carrés est une chaîne croissante $L_{n_1}^{i_1}$ (la démonstration est analogue à celle du N° 14).

Formons d'une manière analogue la chaîne $L_{n+1}^{i_2}$ des carrés de $\{C_{ik}\}_{n+1}$; il est évident qu'elle est contenue dans $L_{n+1}^{i_1}$, etc. Les ensembles de la suite $L_{n_1}^{i_1} \supset L_{n_2}^{i_2} \supset \ldots$ ont un ensemble commun. Cet ensemble est une courbe monotone; elle contient l et coïncide donc avec l dans l'intervalle $(0, 1)$.

Nous voyons que chaque courbe monotone est l'intersection d'une suite de chaînes L_n^i dans l'intervalle $(0, 1)$. Si une courbe

monotone est coupée par chaque droite $x = x_0$ en un seul point elle est une courbe uniforme continue croissante.

17. Considérons le cube $0 < x < 1$; $0 < y < 1$; $0 < z < 1$ et les plans $x = \frac{i}{a_1}$ où a_1 et défini dans le N° 12, i prend toutes les valeurs $1, 2, \ldots, a_1 - 1$. Construisons dans chaque domaine contenu dans le cube et borné par les plans $x = \frac{i}{a_1}$, $x = \frac{i+1}{a_1}$ un système de parallélépipèdes tel que si $\frac{i}{a_1} < x_0 < \frac{i+1}{a_1}$, le plan $x = x_0$ coupe ce système dans une chaine croissante (relativement à z). Désignons par π_1 l'ensemble de tous ces parallélépipèdes. Divisons chaque domaine $x = \frac{i}{a_1}$, $x = \frac{i+1}{a_1}$ par les plans $x = \frac{i}{a_1} + \frac{j}{a_1 N_2^i}$ (N_2^i étant le nombre des chaines qui sont contenues dans L^i). Dans chaque domaine $x = \frac{i}{a_1} + \frac{j}{a_1 N_2^i}$, $x = \frac{i}{a_1} + \frac{j+1}{a_1 N_2^i}$ construisons un ensemble de parallélépipèdes tels que chaque plan $x = x'$, $\frac{i}{a_1} + \frac{j}{a_1 N_2^i} < x' < \frac{i}{a_1} + \frac{j+1}{a_1 N_2^i}$ coupe cet ensemble dans une chaine L_2^j. Désignons par π_2 l'ensemble de tous ces parallélépipèdes. Il est évident que $\pi_1 \supset \pi_2$. En continuant ce procédé, nous formons une suite $\pi_1 \supset \pi_2 \supset \ldots = \pi$. La partie commune à tous les π_k, π est un G_δ. Soit R l'ensemble de tous les points rationnels et x_0 un point irrationnel. Le plan $x = x_0$ coupe π en une courbe monotone puisque ce plan coupe tous les π_k en des chaines contenues l'une dans l'autre. Quelle que soit la courbe monotone φ, il existe un plan $x = x_0$ qui coupe π dans φ. Il existe au plus une infinité dénombrable de courbes monotones, qui ne jouissent pas de cette propriété, soit $\{A\}$ leur ensemble; nous les appellerons courbes exceptionnelles.

Nous avons vu que chaque courbe monotone φ est l'intersection d'une suite de chaines $L_1^{\alpha_1} \supset L_2^{\alpha_2} \supset \ldots$ Prenons sur l'axe OX un intervalle (a_1, b_1) tel que le plan $x = x_1$, $a_1 < x_1 < b_1$ coupe π_1 dans $L_1^{\alpha_1}$; prenons un intervalle (a_2, b_2), $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ tel que le plan $x = x_2$, $a_2 < x_2 < b_2$ coupe π_2 dans $L_2^{\alpha_2}$ etc. Soit $\bar{x}$ le point commun à tous ces segments $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots$; si $\bar{x}$ est un point irrationnel, le plan $x = \bar{x}$ coupe π_1, $\pi_2, \ldots$ dans les chaines $L_1^{\alpha_1}$, $L_2^{\alpha_2}, \ldots$ donc, il coupe π dans la courbe φ; si le point $\bar{x}$ est un point rationnel, la courbe correspondante peut ne pas exister. Mais il est évident que nous pouvons faire correspondre aux points rationnels les courbes exceptionnelles.

18. Démontrons que l'ensemble des points (x_0, y_0) du plan XOY tels que la droite $y = y_0, x = x_0$ contient un segment appartenant à π est un ensemble mesurable B.

Considérons tous les couples possibles de points rationnels (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots$ L'ensemble des points h_n du plan XOY tels que chaque droite $x = x'$, $y = y'$ où $(x' y') \equiv h_n$ coupe la partie de π située entre les plans $z = a_n$, $z = b_n$ en un segment $[a_n, b_n]$ est aussi un G_δ puisque sont complémentaire est la projection d'un F_σ. Il est facile à démontrer que l'ensemble $h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots$ coïncide avec $\{x_0, y_0\}$.

L'ensemble des points $\{z_0, x_0\}$ tels que la droite $z = z_0$; $x = x_0$ contient un segment appartenant à π est donc aussi mesurable B. Chaque plan $x = x'$ coupe l'ensemble $\{y_0, x_0\}$ dans un ensemble au plus dénombrable, donc sa projection sur l'axe OX est mesurable B. Désignons la par u_1. Par la même raison, la projection de $\{z_0, x_0\}$ sur l'axe OX est aussi mesurable B; désignons la par u_2. Formons la différence $(0, 1) - (u_1 + u_2 + R) = u$; u est mesurable B. Il est possible d'établir une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble u et l'ensemble des points irrationnels au moyen d'une fonction $\psi(t)$ mesurable B. Si t prend toutes les valeurs irrationnelles contenues entre 0 et 1, $\psi(t)$ prend toutes les valeurs correspondantes de l'ensemble u. Considérons π comme une surface multiforme, soit $f(x, y)$, et faisons le changement de variable $x = \psi(t)$. Quant au points rationnelles, nous faisons une correspondance biunivoque et réciproque entre ces points et les courbes exceptionnelles. La fonction $f[\psi(t), y]$ est mesurable B et uniforme, puisque, si nous posons $t = t_0$, la courbe $f[\psi(t_0), y] = \varphi(y)$ sera une courbe monotone. Mais $\psi(t_0)$ est un point de u; il n'est pas contenu dans u_1, u_2 et R, donc le plan XOY ne contient pas de points $\{y_0, x_0\}$ et le plan XOZ de points $\{z_0, x_0\}$; par conséquent, π ne contient pas dans le plan $x = \psi(t_0)$ de segments parallèles à l'axe OY ou à l'axe OZ. Chaque fonction $\varphi(y)$ est une fonction continue et croissante. Il suit évidemment du N° 17 qu'on peut trouver pour chaque fonction continue et croissante $\varphi(y)$ un $t = t_0$ tel que $f[\psi(t_0), y] = \varphi(y)$. Désignons $f[\psi(t), y]$ par $J(t, y)$ et faisons le changement de variables en posant $t = x$, $y = z$.

19. Considérons dans l'espace $OXYZ$ le cube $0 < x < 1, -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$. Construisons dans ce cube un crible q tel que, quel que soit un crible plan p, il existe un plan $x = x_0$ qui coupe q en un crible identique à p.

La construction est analogue à celle que M. Lebesgue donne sous forme analytique pour un crible plan universel; M. Lusin l'a donné sous forme géométrique.

Supposons que notre espace est situé dans un espace à cinq dimensions $OXYZTT'$. Par chaque point de l'ensemle q menons une droite parallèle à l'axe OT. Désignons par $\overline{Q}$ et $\underline{Q}$ les parties de Q situées au-dessus et au dessous du plan $z = 0$. Enlevons les points pour lequels $z = 0$. Soit Q' l'ensemble des points dont les coordonnées x, y, t sont les mêmes que celles des points de $\underline{Q}$, mais pour lesquels $t' = z + {}^1/_2$.

20. Considérons dans l'espace $OXYZ$ la surface $z = J(x, y)$ du N° 18. L'espace $OXYZ$ étant contenu dans l'espace $OXYZTT'$, menons par chaque point de la surface $J(x, y)$ un plan parallèle au plan TT'. Nous aurons une surface cylindrique dans l'espace $OXYZTT'$ représentée par l'équation $z = J(x, y, t\, t')$.

21. Revenons à l'espace $OXYZ$ et changeons les variables en posant $z = t'$, $x = t$, $y = z$, $t' = y$. L'équation $t' = J(t_0\, z\, x_0\, y_0)$ peut représenter chaque fonction continue croissante. Formons l'ensemble des points $\{t_0, t_0' x_0\, y_0\}$ dans l'espace $OTT'XY$ tels que pour chaque point $(t^0, t_0', x_0\, y_0)$, où $t_0' = J(t_0, z_0, x_0, z_0)$, et $(t_0\, z_0\, x_0\, y_0)$ parcourt tous les points de l'ensemble $\overline{Q}$. Soit K cet ensemble $\{t_0, t_0', x_0\, y_0\}$. Démontrons que K est la somme d'une infinité dénombrable de surfaces uniformes mesurables B. L'ensemble $\overline{Q}$ est composé d'une infinité dénombrable de surfaces mesurables B. Considérons l'une de ces surfaces $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$, $0 < t < 1$, $z = z_0$. Prenons dans l'espace $OTT'XY$ la surface pour laquelle x, y et t varient entre les extrémités indiquées et $t' = J(t, z, x, y)$. Il est évident que les droites parallèles à l'axe OT' coupent cette surface en un point au plus. A chaque surface de l'ensemble $\overline{Q}$ correspond une surface qui est contenue dans K, et inversement, si le point (t_0, t_0', x_0, y_0) est contenu dans K, le point $(t_0\, t_0'\, x_0\, y_0)$, $t_0' = J(t_0\, z_0\, x_0\, y_0)$ est contenu dans $\overline{Q}$ et appartient à une surface quelconque de $\overline{Q}$. Nous voyons que le point (t_0, t_0', x_0, y_0) est contenu dans l'une des surfaces de K.

22. Nous désignerons dans la suite par $P_\eta(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \varepsilon_0)$ une

droite orthogonale à l'espace $(\alpha, \beta, \ldots)$ et parallèle à l'axe O_η. Formons dans l'espace $OXYT$ un ensemble W_1 tel que pour chacun de ses points $(x_0 y_0 t_0)$ la fonction $t' = J(t_0, z, x_0, y_0)$ réalise l'application continue de l'ensemble $P_z(x_0 y_0 t_0)\overline{Q}$ sur une partie de l'ensemble $P_{t'}(x_0 y_0 t_0)\underline{Q'}$

Nous appellerons application continue une correspondance qui est réalisée par une fonction continue et croissante dans l'intervalle (0, 1) dans laquelle l'ordre des éléments est conservé). Désignons par W_2 le complémentaire de l'ensemble W_1. Considérons la différence $K - \underline{Q'}$. L'ensemble K est composé d'une infinité dénombrable de surfaces uniformes mesurables B, ainsi que $\underline{Q'}$; la différence $K - \underline{Q'}$ est donc aussi composée au plus d'une infinité dénombrable de surfaces uniformes mesurables B. La projection de $K - \underline{Q'}$ sur l'espace $OXYT$ est mesurable B. Démontrons qu'elle coïncide avec W_2. Prenons un point $(x_0 y_0 t_0)$ de W_2. La fonction $t' = J(t_0 z x_0 y_0)$ fait une application continue de $P_{t'}(x_0 y_0 t_0) K$ sur $P_z(x_0 y_0 t_0)\overline{Q}$. Les points de l'ensemble $\overline{Q}$ qui sont situés sur la droite $P_z(x_0 y_0 t_0)$ ont pour coordonnées $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ et z, où z parcourt l'ensemble $\{z'\}$. Mais l'ensemble des points $\{x_0 y_0 t_0 t'\}$, où $t' = J(t_0 z' x_0 y_0)$, est une partie de K, qui est situé sur la droite $P_{t'}(x_0 y_0 t_0)$; donc, il peut être représenté comme $P_{t'}(x_0 y_0 t_0) K$. Il suit de l'equation $t' = J(t_0 z' x_0 y_0)$ qu'il est l'image de l'ensemble $P_z(x_0 y_0 t_0)\overline{Q}$ faite par la fonction $t' = J(x_0 z x_0 y_0)$. Etant donné que le point $(x_0 y_0 t)$ est contenu dans W_2, $P_{t'}(x_0 y_0 t_0) K$ n'est pas contenu dans $P_{t'}(x_0 y_0 t_0)\underline{Q'}$, et la différence $P_{t'} K - P_{t'} \underline{Q} = P_{t'}(K - \underline{Q'})$ contient au moins un point. Le point $(x_0 y_0 t_0)$ est donc contenu dans la projection de $K - \underline{Q'}$ sur l'espace $OXYT$. Supposons que le point $x_1\ y_1\ t_1$ appartient à l'ensemble $P_z(x_1 y_1 t_1)\overline{Q}$ est transformé par la fonction $t' = J(t_1 z x_1 y_1)$ en une partie de l'ensemble $P_{t'}(x_1, y_1, t_1)\underline{Q'}$. L'ensemble $P_z(x_1, y_1, t_1)\overline{Q}$ est transformé en l'ensemble $P_{t'}(x_1, y_1, t_1) K$ et l'on a $P_{t'}(x_1 y_1 t_1) K \subset P_{t'}(x_1 y_1 t_1)\underline{Q'}$. La différence $P_{t'} K - P_{t'} \underline{Q'} = P_{t'}(K - \underline{Q'})$ ne contient donc aucun point; donc, le point $(x_1 y_1 t_1)$ n'est pas contenu dans la projection de $K - \underline{Q'}$ sur l'espace $OXYT$.

Prenons dans le plan XOY tous les points (x', y') tels que la partie de la droite $P_t(x' y')$ située dans le cube $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < t < 1$ est contenue dans W_2. Désignons par d' l'ensemble de ces points. Comme W_1 est mesurable B, l'ensemble d' est un com-

plémentaire analytique. Démontrons qu'il n'existe pas d'application continue de l'ensemble $P_z(x', y', 0)\overline{Q}$ sur une partie de l'ensemble $P_{t'}(x', y', 0)\underline{Q'}$! Supposons, par impossible, qu'on peut trouver une fonction continue et croissante $t' = \varphi(z)$, $x = x'$, $y = y'$, $t = 0$ qui transforme $P_z(x' y' 0)\overline{Q}$ en une partie de $P_{t'}(x' y' 0)\overline{Q'}$! Prenons l'ensemble $P_z(x' y' t_0)\overline{Q}$ et choisissons un point t_0 tel que la fonction $J(t_0 z x' y')$ coïncide avec $\varphi(z)$. Mais le point $(x' y' t_0)$ de l'espace $0XYT$ est contenu dans W_1, la droite $P_t(x' y')$ contient donc des points de W_1, et le point $(x' y')$ n'est pas contenu dans d'.

Supposons que le point $(x'' y'')$ n'est pas contenu dans d'. On peut trouver une valeur t_0 de t telle que le point $x'' y'' t_0)$ est contenu dans W_1, et par conséquent, la fonction $t' = J(t_0 z x'' y'')$ transforme $P_z(x'' y'' t_0)\overline{Q}$ en une partie de $P_{t'}(x'' y'' t_0)\underline{Q'}$!; or, cette fonction est continue et croissante, donc il existe une application continue de l'ensemble $P_z(x'', y'', 0)\overline{Q}$ sur une partie de $P_{t'}(x'' y'' 0)\underline{Q'}$.

Il est évident qu'il existe une application continue de l'ensemble $P_z(x y 0)\underline{Q}$ sur l'ensemble $P_{t'}(x y 0)\underline{Q'}$. Il est évident que $P_z(x' y' 0)\overline{Q} = P_z(x' y')\overline{q}$ où $\overline{q}$ est la partie de q située au dessus du plan $z = 0$, ainsi que $P_z(x' y' 0)\underline{Q} = P_z(x' y')\underline{q}$ où $\underline{q}$ est la partie de q située au dessous du plan $z = 0$. Nous voyons que, quel que soit le point $(x' y')$ de l'ensemble d', il existe une application continue de l'ensemble $P_z(x' y')\overline{q}$ sur une partie de l'ensemble $P_z(x' y')\underline{q}$. Or, nous avons démontré que d' est un complémentaire analytique. Il est évident que l'ensemble des points $\{\underline{x'} y'\}$ tels qu'il n'existe d'application continue de l'ensemble $P_z(x' y')\underline{q}$ sur aucune partie de $P_z(x' y') q$ est aussi un complémentaire analytique. Soit D cet ensemble. Désignons par d la partie commune à l'ensemble d' est au complémentaire de l'ensemble analytique défini par le crible q.

Etant donné un ensemble analytique quelconque, il existe un crible $\overline{s}$ tel que l'ensemble $P_y(x)\overline{s}$ est composé des points isolés sur cette droite. En effet, considérons l'ensemble $\{y', 0\}$ des centres des intervalles contigus à l'ensemble parfait de Cantor. Soit $y = f(z)$ la fonction qui donne une application de cet ensemble sur l'ensemble des points rationnels. Considérons un crible S quelconque qui définit un ensemble analytique. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n \ldots$ les intervalles du crible, et $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ les ordonnées des points des ces intervalles. Construisons le crible $\overline{S} = \overline{c_1} + \overline{c_2} + \ldots + \overline{c_n} + \ldots$ formé des intervalles $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_n, \ldots$ dont les ordonnées $y_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n, \ldots$ vérifient les égalités $\overline{y}_n = f(y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$; l'ensemble $P_y(x)S$ peut être appliqué sur l'ensemble $P_y(x)\overline{S}$, donc, si $P_y(x)S$ est bien ordonné, $P_y(x)\overline{S}$ l'est aussi et inversement. Nous voyons que S et $\overline{S}$ définissent le même ensemble analytique, mais les points de $P_y(x)\overline{S}$ sont isolés sur la droite $P_y(x)$.

Remplaçons q par un ensemble q' situé dans le même cube et tel que chaque plan $x = x_0$ coupe q' dans un crible plan du type $\overline{S}$, supposons d'ailleurs que quel que soit le crible plan C du type $\overline{S}$, il existe un plan $x = x_0$ qui coupe q' dans un crible identique à C. Désignons par $\overline{q'}$ et $\underline{q'}$ les parties de q' situées respectivement au dessus et au dessous du plan XOY. Désignons par $\overline{d}$ et $\overline{D}$ les complémentaires des ensembles analytiques définis par le crible q' de même manière que d et D sont définis par le crible q.

Soit (x_0, y_0) un point de d; l'ensemble $P_z(x_0\, y_0)\overline{q'}$ est bien ordonné; $P_z(x_0\, y_0)\overline{q'}$ ne peut être appliqué sur une partie de $P_z(x_0\, y_0)\underline{q'}$; donc, le type transfini de l'ensemble $P_z(x_0\, y_0)\overline{q'}$ est plus grand que celui de l'ensemble $P_z(x_0\, y_0)\underline{q'}$. Mais, dans ce cas l'ensemble $P_z(x_0\, y_0)\underline{q'}$ s'applique sur une partie de $P_z(x_0\, y_0)\overline{q'}$ et puisque les points de cet ensemble sont isolés, cette application peut être supposée continue. Nous voyons donc que (x_0, y_0) n'appartient pas à $\overline{D}$; il en résulte que $\overline{D}\,\overline{d} = 0$.

Choisissons un point x_0 tel que la droite $x = x_0$ coupe q' dans le crible suivant: la partie de ce crible qui est contenue dans $\underline{q'}$ définit un ensemble E mesurable B arbitrairement donné; la partie qui est contenue dans $\overline{q'}$ est un système d'intervalles $0 < y < 1$, z parcourt les points d'un ensemble bien ordonné dont le type est plus grand que les types de chaque ensemble $P_z(x_0\, y)\underline{q'}$ si ces derniers sont bien ordonnés. Il est évident que chaque point $(x_0\, y_1)$ de E est contenu dans $\overline{D}$ puisque $P_z(x_0\, y_1)\underline{q'}$ n'est pas bien ordonné et ne peut être appliqué sur une partie de $P_z(x_0\, y_1)\overline{q'}$. Pour chaque point $(x_0\, y_2)$ de CE, les ensembles $P_z(x_0\, y_2)\overline{q'}$ et $P_z(x_0\, y_2)\underline{q'}$ sont bien ordonnés; mais le type du premier est plus grand que le type du second. Donc, $(x_0\, y_2)$ est contenu dans $\overline{d}$. Nous voyons donc que quel que soit un ensemble E mesurable B, il existe un x_0 tel que $P_y(x_0)\overline{D}$ coïncide avec E et $P_y(x_0)\overline{d}$ coïncide avec CE.

Démontrons que $\overline{D}$ et $\overline{d}$ ne peuvent pas être séparés au moyen de deux ensembles mesurables B. Supposons, par impossible, qu'il existe deux ensembles E_1 et E_2 mesurables B sans point commun et tels que $\overline{D} \subset E_1$, $\overline{d} \subset E_2$. Dans ce cas, quel que soit x_0, les ensembles $P_y(x_0)\overline{D}$ et $P_y(x_0)\overline{d}$ peuvent être séparés par les ensembles $P_y(x_0)E_1$ et $P_y(x_0)E_2$, et la classe de ces derniers ne surpasse pas celle des ensembles E_1 et E_2. Prenons un x_0 tel que $P_y(x_0)\overline{D}$ est un ensemble $\mathcal{E}$ mesurable B et de classe supérieure à celle de E_1 et E_2; d'ailleurs nous supposons le choix fait de telle manière que $P_y(x_0)\overline{d}$ coïncide avec $C\mathcal{E}$. Nous aboutissons à une contradiction.

Nous allons construire un ensemble C plan mesurable B, tel que sa projection sur l'axe $0X$ coïncide avec l'intervalle $(0, 1)$ et qu'il n'existe aucune courbe uniforme mesurable B passant par C et définie pour tous les points de l'intervalle $(0, 1)$. Prenons dans le plan XOY deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ mesurables B et tels que la projection de $\mathcal{E}_1$ sur l'axe $0X$ coïncide avec $C\overline{D}$ et celle de $\mathcal{E}_2$ avec $C\overline{d}$. La projection de $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ est donc l'intervalle total $(0, 1)$. Supposons qu'il existe une courbe uniforme l mesurable B qui est contenue dans $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ et définie pour tous les points de l'intervalle $(0, 1)$. Désignons par p_1 la projection de $\mathcal{E}_1 l$ sur l'axe $0X$ et par p_2 celle de $\mathcal{E}_2 l$; p_1 et p_2 sont des ensembles mesurables B. Comme $\mathcal{E}_1 l + \mathcal{E}_2 l = l$, on voit que $p_1 + p_2$ est l'intervalle $(0, 1)$, donc $cp_1 \cdot cp_2 = 0$. Mais p_1 est contenu dans la projection de $\mathcal{E}_1$, donc, Cp_1 contient $\overline{D}$; de même Cp_2 contient $\overline{d}$. Or, nous avons vu que ceci est impossible.

Il est évident que l'équation $F(x, y) = 0$, où $F(x, y)$ est égale à 1 pour tous les points de l'ensemble $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ et égale à 0 pour tous les points de son complémentaire, n'admet aucune solution $y = \varphi(x)$, où la fonction $\varphi(x)$ est une fonction uniforme mesurable B.