Sur les images continues des continus.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Aronszajn a eu l'obligeance de m'indiquer une lacune qui se trouve dans ma démonstration du théorème: *tout continu K est l'image continue d'un continu de dimension* 1[1]. L'ensemble U_K défini l. c. par la formule (2) n'est pas nécessairement fermé, car la famille des continus $K(p)$ peut ne pas être semi-continue supérieurement.

On peut modifier ma construction de manière suivante dont l'idée revient à M. Knaster. Soit L un ensemble de nombres réels parfait punctiforme contenu dans l'intervalle $\langle 01 \rangle$. Considérons dans R_3 un système de coordonnées semi-polaires r, φ, z et soit Φ une fonction continue telle que: $K = \Phi(L)$. Pour $p \varepsilon K$ désignons par $\alpha(p)$, $\beta(p)$ la borne inférieure et supérieure de $\Phi^{-1}(p)$ par $T(p, \varphi)$ le triangle aux sommets: $(0, -, \alpha(p))$, $(0, -, \beta(p))$, $\left(\frac{\beta(p)-\alpha(p)}{2}, \varphi, \frac{\alpha(p)+\beta(p)}{2}\right)$ par $V(\varphi)$ l'ensemble de tous les segments rectilignes contenus dans $T(p, \varphi)$, parallelles à une arète de $T(p, \varphi)$ et contenant un point de l'ensemble: $\sum_{z \varepsilon \Phi^{-1}(p)} (0, -, z)$. Posons: $K(p) = \sum_{\varphi \varepsilon \Phi^{-1}(p)} V(\varphi)$, $U_K = \sum_{p \varepsilon K} K(p)$. Les $K(p)$ étant fermés et connexes, la dernière formule détermine une décomposition semi-continue supérieurement de U_K, dont l'hyperespace est homéomorphe à K. On vérifie aisément que U_K est un continu de dimension 1.

[1] C. R. du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929/30, p. 66—67. Le théorème a été démontré indépendamment par M. Hurewicz: Fund. Math. XV, p. 59—60.

Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Leśniewski über meine Arbeit »Zur Hilbertschen Beweistheorie«.

Von

J. v. Neumann (Hamburg).

1. In seiner Abhandlung „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik" (Fund. Math. XIV, S. 1—81) hat sich Herr Leśniewski u. a. mit den Versuchen anderer Autoren, die Mathematik und Logik für den Zweck von „Grundlagen-Untersuchungen" in ein rein formales System von Zeichen und Operationsvorschriften mit diesen Zeichen zu übersetzen, kritisch auseinandergesetzt. Insbesondere hat er das von mir („Zur Hilbertschen Beweistheorie", Math. Zeitschr. 26, S. 1—46) angegebene formale System in dieser Hinsicht analysiert (S. 79—81 der cit. Abhandlung).

Herr Leśniewski bezweifelt die Strenge des von mir geführten Widerspruchfreiheitsbeweises für einen gewissen Teil der Mathematik, und konstruiert zur Begründung seiner Ansicht ein „Gegenbeispiel": er leitet auf Grund der formalen Vorschriften meiner Arbeit zwei Formeln a und $\sim a$ ($\sim$ ist das Zeichen der Negation) her, d. h. einen Widerspruch. Seine Methode ist dabei die folgende (ich erlaube mir seine Schlussweise etwas, wie ich glaube unwesentlich, zu varieren, da es für die folgenden Erläuterungen praktischer ist): Zwei Operationen $O_m^{(1)}(\cdot)$ und $O_n^{(1)}(\cdot)$ werden aufgestellt, für die stets $O_m^{(1)}(a) \neq O_n^{(1)}(a)$ ist[1], und irgendeine Konstante C_p. Sodann werden $O_m^{(1)}(\cdot)$, $O_n^{(1)}(\cdot)$, C, im Einklang mit meinen „Abänderungs-

[1] D. h. $O_m^{(1)}(a) \neq O_n^{(1)}(a)$ für alle Formeln a bewiesen. Man kann z. B. $O_m^{(1)}(a) = a$, $O_n^{(1)}(a) = \sim a$ erreichen.

vorschriften“ (loc. cit. S. 8—9) in □●(·), (·)●□, □ abgeändert [1]). Hierdurch gehen (unter Beachtung der „Klammerkonventionen“, loc. cit. S. 9) $O_m^{(1)}(C_p)$ wie $O_n^{(1)}(C_p)$ beide in □●□ über, obwohl sie $\neq$ sein sollten! Es ist leicht dies zu einem formellen Widerspruch auszugestalten.

Zu diesem Einwande möchte ich bemerken, dass er m. E. auf einer Verkennung des Begriffes „Zeichen“ beruht: wenn man die Mathematik symbolisch beschreibt, so müssen die verschiedenen Zeichen auf alle Fälle voneinander unterscheidbar sein [2]). U. zw. besteht offenbar diese „Unterscheidbarkeit“ nicht nur darin, dass zwei als „verschieden“ auszusprechende Zeichen einzeln voneinander unterscheidbar sind, sie umfasst vielmehr notwendigerweise auch die Eigenschaft, dass jede Kombination (lineare Aufeinanderfolge) von Zeichen auf eindeutige Weise in ihre Bestandteile (rein drucktechnisch!) aufgelöst werden kann. Herr Leśniewski hat die Zeichen □●, □, ●□ (die ich vorübergehend mit α, β, γ bezeichnen möchte) wohl im Einklang mit meinen allgemeinen Abänderungsvorschriften gewählt, aber dabei gegen ein elementares Gesetz jeder symbolisierenden „Sprache“ verstossen: die Zeichen α, β, γ sind nicht genügend voneinander unterscheidbar, da $\alpha\beta$ mit $\beta\gamma$ identisch ist, d. h. weil es bei der Zeichenkombination □●□ unmöglich ist zu sagen, ob es sich um $\alpha\beta$ oder $\beta\gamma$ handelt [3]).

Es sei hier also nochmals und in aller Schärfe hervorgehoben· Jedes symbolische System, also auch das meine, muss auf solche Zeichen aufgebaut sein, dass zwei Zeichenkombinationen $\alpha\beta\gamma\ldots\varrho$ und $\lambda\mu\nu\ldots\xi$ nur dann gleich aussehen können, wenn sie aus gleichviel Zeichen bestehen, und α mit λ, β mit μ, γ mit $\nu, \ldots, \varrho$ mit ξ zusammenfällt.

De dies mit dem Gegenstande meiner Arbeit, dem Widerspruchfreiheitsbeweise für die Mathematik, nichts zu tun hat, sondern einer früheren und m. E. unmathematischen Stufe des Formalismus angehört, glaubte ich in meiner Arbeit hierauf nicht besonders hinweisen zu müssen. Da aber ein Missverständniss entstanden ist, habe ich die Sache jetzt doch erörtert.

[1]) Ich schreibe □, ● statt 1, + wie Herr Leśniewski, um keine arithmetische Association aufkommen zu lassen.

[2]) Vgl. D. Hilbert, Hamb. Abh. I, S. 162—163.

[3]) Dies ändert natürlich nichts an der Tatsache, dass der mathematische Formalismus als prinzipiell sinnlos einzuschätzen ist.

2. Da der Gegenstand einmal angeschnitten ist, möchte ich noch einiges zur Frage der Bezeichnungen sagen, und gleichzeitig ein tatsächliches Versehen in meiner Arbeit richtigstellen [1]).

In einer formalistischen Disziplin, wie es z. B. die für die Zwecke der Grundlagen-Untersuchungen formalisierte Mathematik ist, werden die Aussagen durch Formeln ersetzt, d. h. durch Zeichen-Kombinationen, die nach gewissen (rein kombinatorischen) Regeln auseinander erzeugt werden [2]).

Es ist für die Brauchbarkeit des Systems unerlässlich, dass man einer fertig hingeschriebenen Formel ihre Entstehungsweise eindeutig ansehen kann, dass insbesondere nicht auf zwei verschiedene Weisen dieselbe Formel entstehen können soll [3]). Dass diese Tatsache die Grundlage aller weiteren (Widerspruchfreiheits-) Überlegungen ist, habe ich auf S. 7 meiner cit. Arbeit gebührend betont.

Dass das von mir angegebene formale System, ohne den „Abänderungen“ (S. 8—9) dieses Postulat erfüllt, habe ich loc. cit. erwähnt, ohne den Beweis auszuführen. Ich habe den, übrigens ziemlich einfachen, Beweis unterdrückt, weil die ganze Sache vom Gesichtspunkte der Widerspruchfreiheitsfrage und der sachlichen Schwierigkeiten derselben aus betrachtet, eine ganz ausserwesentliche Komplikation ist. In der Tat: würde diese Sache, und überhaupt die Bezeichnungsfrage in irgendeiner Beziehung, wesentliche Schwierigkeiten machen, so wäre es ein Leichtes, sie in trivialer Weise ein für allemal aus der Welt zu schaffen. Es würde genügen, statt die Formeln fertig hinzuschreiben, bei jeder Formel ihre Entstehungsgeschichte (im Sinne von Anm. [2])) ausführlich anzugeben. Es ist leicht hierfür eine passende Kurz-Sprache zu finden: z. B. indem man jede Operation mit n Leerstellen durch ein grosses Rechteck

[1]) Und auch einen Druckfehler: auf S. 21, Zeile 2 v. o. soll p statt q stehen Ferner ist auf S. 8, Zeile 10 v. u., natürlich $n > 1$ nötig.

[2]) So entsteht z. B. die Formel $(x \to y) \to ((\sim x \to y) \to y)$ aus den Formeln (Variablen) x, y, indem man auf sie $(\cdot \to \cdot)$ anwendet: $x \to y$, dann $\sim .$ auf x: $\sim x$ dann $(\cdot \to \cdot)$ auf $\sim x, y$: $(\sim x \to y)$, dann $(\cdot \to \cdot)$ auf dieses und y: $((\sim x \to y) \to y)$, und schliesslich wieder $(\cdot \to \cdot)$ auf $(x \to y)$ und die letztere Formel:

$$((x \to y) \to ((\sim x \to y) \to y)).$$

Vgl. S. 7 in meiner cit. Arbeit.

[3]) Bezeichnet man z. B. in der Arithmetik Summe und Produkt mit $\cdot + \cdot$ und $\cdot \times \cdot$, ohne Klammern zu verwenden, so entspricht $x + y \times z$ in der alten Bezeichnungsweise sowohl $(x + y)z$, als auch $x + yz$. Setzt man $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$, so entsteht der Widerspruch $4 = 3$!

mit dem Seitenverhältniss $1 : n+1$ darstellt, welches in $n+1$ quadratische Teile eingeteilt ist, und das Operations-Symbol ins erste Fach schreibt, die n Formeln aber, die eingesetzt werden sollen, in die n übrigen Fächer. Wenn man als konsequenter Formalist vor keiner Schwerfälligkeit und Ungewohntheit der Bezeichnungsweise zurückschreckt, ist dies in der Tat ein Allheilmittel.

Tatsächlich ist aber diese radikal-Massregel garnicht notwendig, denn schon die von mir benützte „ungeänderte" Bezeichnungsweise ist, wie oben gesagt wurde, eindeutig — sie liesse sich sogar, ohne Verlust dieser Eigenschaft, noch wesentlich vereinfachen. Wollte man auf die „Abänderungen" verzichten, die ich nur darum einführte, um den Anschluss an die übliche, inkonsequente, historisch bedingte, und sich oft ändernde Terminologie der tatsächlichen Mathematik [1]) stets wieder herstellen zu können, so wäre also alles in Ordnung. Rein sachlich liesse sich dagegen auch nichts einwenden.

Nimmt man aber „Abänderungen" vor, und die vereinfachende „Klammer-Konvention" (loc. cit. S. 8—9), so muss man sich erneut von der Gültigkeit des Eindeutigkeitssatzes überzeugen. An dieser Stelle habe ich nun loc. cit. tatsächlich zuviel zugelassen. So kann man z. B. drei Operationen $O_r^{(2)}(\cdot,\cdot)$, $O_s^{(1)}(\cdot)$, $O_t^{(1)}(\cdot)$ in $(\cdot \bullet \cdot)$, $\bullet(\cdot)$, $(\cdot)\bullet$ abändern, und dann (mit irgendeiner Konstanten C_p) die Formeln $O_r^{(2)}(C_p, O_s^{(1)}(C_p))$ und $O_r^{(2)}(O_t^{(1)}(C_p), C_p)$ biden: beide nehmen die Gestalt $(C_p \bullet \bullet C_p)$ an. Um solche Unannehmlichkeiten zu vermeiden, genügt es z. B. den folgenden Zusatz zu meinen „Abänderungs-Vorschriften" zu machen: kein Γ darf gleichzeitig bei einer Abänderung $\Gamma(\cdot, \ldots, \cdot)$ und bei einer Abänderung $(\cdot, \ldots, \cdot)\Gamma$ Verwendung finden (der zweite Fall könnte sogar auf das Auftreten von nur einer Leerstelle beschränkt werden).

Der Beweis für die Eindeutigkeit abgeänderter Systeme, bei denen diese Vorsichtsmassregel beachtet wird, ist unschwer zu erbringen. Ich glaube aber, dass es sich, mit Rücksicht auf die verschiedenen hier angegebenen Gründe, erübrigt ihn hier durchzuführen — um so mehr, als diese pro-domo-Erörterungen ohnehin schon zu viel Platz einnehmen.

[1]) Die 99% der Mathematiker, ohne Rücksicht auf die Grundlagen-Forschung, de facto verwenden.

Bemerkung zu den vorhergehenden »Bemerkungen...« des Herrn J. v. Neumann.

Von

Adolf Lindenbaum (Warschau).

1. In der interessanten Diskussion zwischen den Herren Leśniewski und v. Neumann [1]) beabsichtige ich natürlich gar nicht Stellung zu nehmen. Auf meinen Haupteinwand gegen die v. Neumannsche Antwort fühle ich mich jedoch geneigt hier hinzuweisen; da ich aber kein Liebhaber der „unmathematischen Stufe des Formalismus" bin, beschränke ich mich auf eine *ganz kurze* (vielleicht selbst flüchtige) Bemerkung. —

2. Es scheint mir, dass *die Ansicht, die v. Neumann im § 1 seiner „Bemerkungen" erörtert, im Widerspruch zu der Ansicht, die er dann im § 2 entwickelt, stehe*, „im Widerspruch" — nicht im Sinne einer logischen Unverträglichkeit, sondern nur einer halbpsychologischen: es ist unwahrscheinlich, dass man an einige Folgerungen der Vereinigung (Konjunktion) dieser beiden Ansichten glauben könnte.

Im § 1 der v. Neumannschen *„Bemerkungen"* ist die Leśniewski'sche Konstruktion des „Gegenbeispiels" durch eine Berufung auf „ein elementares Gesetz jeder symbolisierenden Sprache" abgelehnt: verschiedene Zeichen unterscheidbar sein müssen.

[1]) Es handelt sich um die formale Seite der wertvollen v. Neumannschen Arbeit:

— *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, Math. Ztschr. **26** (1927), Ss. 1–46.

Siehe:

S. Leśniewski: *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fund. Math. **14** (1929), Ss. 78—81

J. v. Neumann: *Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Leśniewski über meine Arbeit „Zur Hilbertschen Beweistheorie"*, Fund. Math. **17** (1931), Ss. 331–334.