Sur les images continues des continus.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Aronszajn a eu l'obligeance de m'indiquer une lacune qui se trouve dans ma démonstration du théorème: *tout continu K est l'image continue d'un continu de dimension* 1 [1]. L'ensemble U_K défini l. c. par la formule (2) n'est pas nécessairement fermé, car la famille des continus $K(p)$ peut ne pas être semi-continue supérieurement.

On peut modifier ma construction de manière suivante dont l'idée revient à M. Knaster. Soit L un ensemble de nombres réels parfait punctiforme contenu dans l'intervalle $\langle 01 \rangle$. Considérons dans R_3 un système de coordonnées semi-polaires r, φ, z et soit Φ une fonction continue telle que: $K = \Phi(L)$. Pour $p \varepsilon K$ désignons par $\alpha(p)$, $\beta(p)$ la borne inférieure et supérieure de $\Phi^{-1}(p)$ par $T(p, \varphi)$ le triangle aux sommets: $(0, -, \alpha(p))$, $(0, -, \beta(p))$, $\left(\frac{\beta(p) - \alpha(p)}{2}, \varphi, \frac{\alpha(p) + \beta(p)}{2}\right)$ par $V(\varphi)$ l'ensemble de tous les segments rectilignes contenus dans $T(p, \varphi)$, parallelles à une arête de $T(p, \varphi)$ et contenant un point de l'ensemble: $\sum\limits_{z \varepsilon \Phi^{-1}(p)} (0, -, z)$. Posons: $K(p) = \sum\limits_{\varphi \varepsilon \Phi^{-1}(p)} V(\varphi)$, $U_K = \sum\limits_{p \varepsilon K} K(p)$. Les $K(p)$ étant fermés et connexes, la dernière formule détermine une décomposition semi-continue supérieurement de U_K, dont l'hyperespace est homéomorphe à K. On vérifie aisément que U_K est un continu de dimension 1.

[1]) C. R. du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929/30, p. 66—67. Le théorème a été démontré indépendamment par M. Hurewicz: Fund. Math. XV, p. 59—60.

Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Leśniewski über meine Arbeit »Zur Hilbertschen Beweistheorie«.

Von

J. v. Neumann (Hamburg).

1. In seiner Abhandlung „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik" (Fund. Math. XIV, S. 1—81) hat sich Herr Leśniewski u. a. mit den Versuchen anderer Autoren, die Mathematik und Logik für den Zweck von „Grundlagen-Untersuchungen" in ein rein formales System von Zeichen und Operationsvorschriften mit diesen Zeichen zu übersetzen, kritisch auseinandergesetzt. Insbesondere hat er das von mir („Zur Hilbertschen Beweistheorie", Math. Zeitschr. 26, S. 1—46) angegebene formale System in dieser Hinsicht analysiert (S. 79—81 der cit. Abhandlung).

Herr Leśniewski bezweifelt die Strenge des von mir geführten Widerspruchfreiheitsbeweises für einen gewissen Teil der Mathematik, und konstruiert zur Begründung seiner Ansicht ein „Gegenbeispiel": er leitet auf Grund der formalen Vorschriften meiner Arbeit zwei Formeln a und $\sim a$ ($\sim$ ist das Zeichen der Negation) her, d. h. einen Widerspruch. Seine Methode ist dabei die folgende (ich erlaube mir seine Schlussweise etwas, wie ich glaube unwesentlich, zu varieren, da es für die folgenden Erläuterungen praktischer ist): Zwei Operationen $O_m^{(1)}(\cdot)$ und $O_n^{(1)}(\cdot)$ werden aufgestellt, für die stets $O_m^{(1)}(a) \neq O_n^{(1)}(a)$ ist [1], und irgendeine Konstante C_p. Sodann werden $O_m^{(1)}(\cdot)$, $O_n^{(1)}(\cdot)$, C, im Einklang mit meinen „Abänderungs-

[1]) D. h. $O_m^{(1)}(a) \neq O_n^{(1)}(a)$ für alle Formeln a bewiesen. Man kann z. B. $O_m^{(1)}(a) = a$, $O_n^{(1)}(a) = \sim a$ erreichen.