Sur deux complémentaires analytiques non séparables B.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de donner un exemple (qui me semble plus simple que les exemples connues [1])) de deux complémentaires analytiques plans disjoints non séparables B.

Comme on sait, il existe dans l'espace à 3 dimensions un ensemble G_δ universel, soit U, c'est-à-dire un ensemble G_δ tel, qu'en le coupant par des plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles G_δ plans possibles.

L'existence d'un tel ensemble U peut être démontrée comme il suit. Dans le vol. VII de ce journal, pp. 200—201, j'ai démontré l'existence d'un ensemble fermé universel dans l'espace à 3 dimensions [2]). Par la même méthode on peut démontrer l'existence d'un ensemble fermé Φ universel dans l'espace à 4 dimensions (c'est-à-dire d'un ensemble fermé de points (x, y, z, t) tel qu'en posant $t = \text{const.}$ (et en variant la valeur de cette constante) on obtient tous les ensembles fermés dans l'espace à 3 dimensions). On voit sans peine que la projection $P\Phi$ de Φ sur l'espace à 3 dimensions et un ensemble F_σ universel, et son complémentaire $U = CP\Phi$ (par rapport à cet espace) est l'ensemble G_δ universel cherché.

Soit $E = CPU$ (c'est-à-dire désignons par E le complémentaire par rapport au plan XOY de la projection sur ce plan de l'ensemble U) et désignons par H la projection sur le plan XOY de l'ensemble d'unicité de U (c'est-à-dire désignons par H l'ensemble de tous les points (a, b) du plan XOY tels que la droite $x = a$, $y = b$ rencontre l'ensemble U en un seul point). Je dis que E et H sont des complémentaires analytiques disjoints non séparables B.

[1]) Voir à ce sujet: N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, pp. 220, 260 et 263; P. Novikoff, *Fund. Math.* t. XVII, p. 25.

[2]) La condition que cet ensemble est borné n'est pas essentielle pour la démonstration.

L'ensemble PU, comme une projection d'un ensemble G_δ, est un ensemble analytique, donc l'ensemble $E = CPU$ est un complémentaire analytique.

L'ensemble H est aussi un complémentaire analytique, comme projection de l'esemble d'unicité d'un ensemble mesurable B [1]). Les ensembles E et H sont évidemment disjoints. Il nous reste donc à démontrer qu'ils sont non séparables B.

Soit K un ensemble contenant H et ne contenant aucun point de E, et soit M un ensemble linéaire mesurable B donné quelconque. Comme on sait, tout ensemble mesurable B, donc aussi M, est une projection d'un ensemble plan G_δ, soit Q, tel que tout point de M est une projection d'un seul point de Q [2]). L'ensemble U étant un G_δ universel, il existe un plan $x = a$ qui coupe U en l'ensemble Q, et il résulte tout de suite de la définition de H que la droite $x = a$ du plan XOY coupe l'ensemble H en l'ensemble M.

M pouvant être un ensemble linéaire mesurable B quelconque, cela prouve que l'ensemble K ne peut pas être mesurable B (les intersections d'un ensemble plan mesurable B par les droites étant des ensembles mesurables B dont les classes ne surpassent pas celle de l'ensemble plan considéré). Donc, l'ensemble H ne peut pas être séparé de l'ensemble E au moyen d'un ensemble mesurable B, et notre assertion est démontrée.

[1]) Voir le livre cité de M. Lusin, p. 259.

[2]) Voir p. e. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin u. Leipzig 1927, p. 212, th. IV.