# Sur une famille de complémentaires analytiques.

Par

N. Lusin (Moscou).

Cette famille est composée des complémentaires analytiques $\mathcal{E}$ dont les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ ont les classes qui „tendent vers $\Omega$ avec $\alpha$".

1. Pour expliquer aussi clairement que possible en quoi consiste l'intérêt de ces ensembles, nous considérons d'abord le plan $XOZ$ et, dans ce plan, un crible rectiligne $\Gamma$, formé d'une infinité dénombrable de segments $\sigma$ parallèles à l'axe $OX$. Soit $E$ l'ensemble analytique linéaire criblé au moyen de $\Gamma$ et $\mathcal{E}$ son complémentaire. On peut supposer sans restreindre la généralité des considérations qui suivent que les segments $\sigma$ du crible $\Gamma$ ont les extrémités à coordonnées rationnelles.

Cela posé, considérons le développement du complémentaire $\mathcal{E}$ en série des constituantes

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots \mid \Omega.$$

Parmi ces constituantes nous supprimons toutes celles qui sont *nulles*, c'est-à-dire dépourvues de points. Si les classes des constituantes restantes ne tendent pas vers $\Omega$, il existe un nombre transfini $\beta$ tel qu'il y a une infinité *non dénombrable* de constituantes non nulles $\mathcal{E}_\alpha$ dont les classes sont inférieures à $\beta$. Dans ce cas, nous avons une infinité d'ensembles mesurables $B$ numérotés au moyen de tous les nombres transfinis de seconde classe et dont les classes sont bornées. Il résulterait de là que le problème restreint de M. H. Lebesgue a une solution *positive* [1]).

[1]) Ce problème consiste à savoir si l'on peut nommer une infinité *transfinie* d'ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ non nuls et mesurables $B$ dont les classes sont *bornées*.



2. Malheureusement, nous ne pouvons pas constater l'existence de tels cas. Au contraire, nous pouvons constater l'existence de complémentaires analytiques $\mathcal{E}$ dont les constituantes non nulles $\mathcal{E}_\alpha$ ont les classes qui tendent vers $\Omega$ lorsque $\alpha$ croît transfiniment [1]). Nous les appellerons *complémentaires ordinaires*. Le but de cette Note est de démontrer l'existence de tels complémentaires.

3. Nous partons de la Note précédente de M. W. Sierpiński qui a proposé la construction très utile du crible universel $U$.

Ce crible universel $U$ de M. W. Sierpiński est situé dans l'espace à trois dimensions $XYZ$ et est formé d'une infinité dénombrable de rectangles parallèles au plan $XOY$ et ayant les sommets à coordonnées rationnelles. Chaque plan $y = C^{te}$ coupe le crible $U$ de M. W. Sierpiński en un crible rectiligne plan formé de segments parallèles à l'axe $OX$ et dont les extrémités ont les coordonnées rationnelles. Mais ce qui est bien plus remarquable c'est le fait vraiment important suivant: chaque crible rectiligne plan formé de segments parallèles à l'axe $OX$ et aux extrémités rationnelles peut être obtenu de cette manière, en choisissant convenablement le plan $y = C^{te}$. C'est pourquoi le crible $U$ de M. W. Sierpiński est nommé par lui *universel*.

Désignons par $E$ l'ensemble analytique situé dans le plan $XOY$ et criblé au moyen du crible universel $U$. Soit $\mathcal{E}$ le complémentaire de $E$. Désignons par

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots \mathcal{E}_\alpha + \ldots \mid \Omega$$

le développement du complémentaire $\mathcal{E}$ en série de constituantes déterminées par le crible $U$. Nous allons démontrer que *les classes de ces constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ tendent vers $\Omega$ avec $\alpha$.*

4. Pour le démontrer, nous prenons un ensemble *quelconque* $e$ linéaire et mesurable $B$ situé sur l'axe $OX$. Son complémentaire linéaire $Ce$ est aussi un ensemble mesurable $B$. Désignons par $\Gamma$ un crible rectiligne de la nature indiquée qui détermine l'ensemble $Ce$ comme un ensemble criblé au moyen de $\Gamma$. Nous pouvons supposer que le crible $\Gamma$ est *au-dessous* de l'axe $OX$. Comme l'ensemble complémentaire $e$ est mesurable $B$, le crible $\Gamma$ est un crible *borné*. Cela veut dire qu'il existe un nombre transfini de seconde classe $\beta$

[1]) Nous dirons qu'une fonction transfinie $f(\alpha)$ *tend vers $\Omega$ avec $\alpha$* si nous avons $f(\alpha) > \beta$ quel que soit le nombre $\beta$ de seconde classe lorsque $\alpha$ est assez grand.

tel que chaque droite $(L)$ parallèle à l'axe $OZ$ et menée par un point de $e$ coupe le crible $\Gamma$ en un ensemble bien ordonné dont le nombre transfini correspondant $\alpha_L$ est inférieur à $\beta$, $\alpha_L < \beta$.

Cela posé. ajoutons au crible $\Gamma$ une infinité dénombrable $\mathfrak{D}$ de droites parallès à l'axe $OX$, situées *au-dessus* de cet axe et formant un ensemble bien ordonné conformement à la direction positive de l'axe $OZ$. Soit $\gamma$ le nombre transfini qui correspond à $\mathfrak{D}$. Nous pouvons toujours supposer que $\gamma$ est un nombre transfini *arbitraire supérieur à* $\beta\omega$.

La réunion de $\Gamma$ et de $\mathfrak{D}$ est évidemment un crible nouvel au moyen duquel est criblé l'ensemble considéré $Ce$; nous désignons par $\Gamma_1$ ce crible. On voit bien que chaque droite $(L)$ parallèle à l'axe $OZ$ et menée par un point de $e$ coupe le crible $\Gamma_1$ en un ensemble bien ordonné dont le nombre transfini correspondant est toujours rigoureusement *égal à* $\gamma$.

Comme le crible $U$ est universel, il existe une constante $C$ telle que le plan $y = C^{te}$ coupe le crible $U$ précisément en $\Gamma_1$.

Menons, dans le plan $XOY$, la droite $y = C^{te}$. D'après ce qui précède, on voit bien que tous les points de $\mathcal{E}$ situés sur cette droite appartiennent à la constituante $\mathcal{E}_\gamma$. Donc, la constituante $\mathcal{E}_\gamma$ est coupée par la droite $y = C^{te}$ précisément en $e$. Ainsi, chaque constituante $\mathcal{E}_\gamma$ est coupée par une droite parallèle à l'axe $OX$ et convenablement choisie précisément en un ensemble $e$ mesurable $B$ donné à l'avance lorsque l'indice $\gamma$ est assez grand.

Or, si une constituante quelconque $\mathcal{E}_\gamma$ est coupée par une droite en $e$, la classe de cette constituante est au moins égale à celle de $e$. Et comme l'ensemble $e$ est un ensemble mesurable $B$ *arbitraire*, nous concluons de là que les classes des constituantes $\mathcal{E}_\gamma$ tendent vers $\Omega$ avec $\gamma$. c. q. f. d.

5. Nous compléterons ce résultat par la remarque suivante. Chaque complémentaire analytique $\mathcal{E}$ peut être développé en une suite de constituantes

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots \mid \Omega$$

dont une infinité non dénombrable sont *nulles*. Pour le voir il suffit de prendre un crible $\Gamma$ situé au-dessous de l'axe $OX$ et d'ajouter une suite simplement infinie *croissante* de droites parallèles à l'axe $OX$ et situées au-dessus de cet axe. On voit bien que le crible $\Gamma_1$ ainsi défini nous donne un développement de $\mathcal{E}$ dont toutes les constituantes qui correspondent aux nombres transfinis de première espèce sont *nulles*.

J'ajoute que la méthode de cette Note est due à M. W. Sierpiński (*voir* notre Note des *Comptes Rendus de l'Acad. Sc. de Paris*: 12 novembre 1929: *Sur les classes des constituantes d'un complémentaire analytique*).