8. Fonctions jouissant de la propriété de Baire.

On dit qu'une fonction jouit de la propriété de Baire, lorsqu'il existe un ensemble de première catégorie P tel que la fonction devient continue lorsqu'on restreint ses arguments à l'ensemble $\mathcal{X} - P$. Si l'espace $\mathcal{Y}$ est séparable, cette condition équivaut à celle que, quel que soit l'ensemble ouvert G, l'ensemble $f^{-1}(G)$ possède la propriété de Baire (c. à d. qu'il soit somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de première catégorie) [1]. Tout ensemble de classe α étant un ensemble à propriété de Baire, il en résulte que *chaque fonction mesurable B jouit de cette propriété.*

Il y a plusieurs théorèmes concernant la propriété de Baire que l'on démontre d'une facon analogue aux théorèmes précédemment démontrés.

En particulier, si la fonction $y = f(x)$ jouit de la propriété de Baire, l'image $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$ est un ensemble jouissant de la propriété de Baire. Pour le prouver on se servira de la formule du N4, en tenant compte du fait que, si B $(\subset \mathcal{X})$ est un ensemble jouissant de la propriété de Baire, l'ensemble $B \times \mathcal{Y}$ en jouit également.

D'une façon analogue, on prouve que, si la fonction $f(x, y)$ est continue relativement à la variable x et jouit de la propriété de Baire relativement à la variable y, la fonction $f(x, y)$ jouit de la propriété de Baire relativement à la variable (x, y).

(Dans les deux cas on suppose que l'espace des valeurs est séparable, dans le deuxième, en outre, que l'espace $\mathcal{X}$ est séparable) [2].

[1]) Voir ma note citée de Fund. Math. 16.

[2]) On considère aussi la propriété de Baire de fonction (ainsi que d'ensemble) *au sens étroit*, en entendant par cela que la fonction jouit de la propriété de Baire relativement à chaque ensemble (ou chaque ensemble parfait) d'arguments. Les deux problèmes considérés tout-à-l'heure restent ouverts relativement à la propriété de Baire au sens étroit. Cela tient au fait qu'on ne sait pas, si dès que l'ensemble B la possède, $B \times \mathcal{Y}$ la possède également.

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen.

Von

Stefan Banach (Lwów).

Einleitung.

Seien X und Y zwei metrische Räume. Der Raum Y sei ausserdem separabel. Wir betrachten Operationen

$$y = f(x),$$

welche jedem Elemente $x \subset X$ ein bestimmtes Element $y \subset Y$ zuordnen.

Zwei Arten dieser Operationen werden gewöhnlich betrachtet. Die erste bilden die (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen; wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit B. Die zweite Art bilden die im Sinne von Borel meßbaren Operationen; sie sei mit L bezeichnet.

Die zu B gehörenden Operationen werden folgendermaßen erklärt:

Eine stetige Operation zählen wir zur nullten Klasse B^0. Die Grenzwerte der Folgen stetiger Operationen bilden die erste Klasse B^1. Allgemein besteht die ξ-te Klasse B^ξ (wobei ξ eine beliebige endliche oder unendliche Ordnungszahl $< \Omega$ bedeutet) aus denjenigen Operationen, welche als Grenzwerte von Folgen von Operationen niedrigerer Klassen darstellbar sind.

Die Vereinigungsmenge aller Klassen B^ξ bildet die Gesamtheit B der (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen.

Um die im Sinne von Borel meßbaren Operationen zu erklären, definieren wir zunächst die zwei Borelschen Mengenklassen P^ξ und Q^ξ.

Die Klasse P^1 besteht aus allen abgeschlossenen, die Klasse Q^1 aus allen offenen Mengen. Die Klasse P^ξ ist die Gesamtheit der in der Form $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ darstellbaren Mengen, wobei $A_n \subset Q^{\xi_n}$ ($\xi_n < \xi$, $n = 1, 2, \ldots$) ist. Die Klasse Q^ξ ist die Gesamtheit der in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ darstellbaren Mengen, wobei $A_n \subset P^{\xi_n}$ ($\xi^n < \xi$, $n = 1, 2, \ldots$) ist.

Eine Operation $f(x)$ heißt meßbar im Sinne von Borel von der Klasse $\xi \geqslant 0$, wenn für jede offene Menge $G \subset Y$ die Menge $\underset{x}{E}[f(x) \subset G]$ [1]) der Klasse $Q^{\xi+1}$ angehört. Wir bezeichnen die im Sinne von Borel meßbaren Operationen der Klasse ξ mit L^ξ und mit L die Gesamtheit aller derartigen Operationen.

Die Operationen B wurden zuerst von Herrn Borel definiert, die Operationen L von Herrn Lebesgue. Von Herrn Hausdorff [2]) wurde das Problem gestellt, die Beziehungen zu finden, welche zwischen den Mengen B und L bestehen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Beziehungen untersucht.

Wir erklären jetzt eine neue Art von Operationen, nämlich die mit Hilfe von Operationen der Klasse L^1 analytisch darstellbaren Operationen. Man erhält sie auf folgende Weise:

Die Klasse b^1 sei mit L^1 identisch. Zur Klasse b^2 zählen wir die Grenzwerte von Folgen aus b^1: allgemein besteht die Klasse b^ξ aus Grenzwerten von Folgen, deren Operationen den Klassen niedrigerer Ordnung angehören.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit den Beziehungen, welche zwischen den Klassen B, L und b bestehen.

Ist Y die Menge aller reellen Zahlen, so ist $B^\xi \equiv L^\xi$ ($\xi \geqslant 0$), woraus offenbar $B^\xi \equiv b^\xi \equiv L^\xi$ ($\xi \geqslant 1$) folgt.

Wenn Y ein anderer Raum ist, so finden die obigen Identitäten

[1]) Diese von Herrn Lebesgue eingeführte Bezeichnung bedeutet die Menge derjenigen x, welche die in der Klammer angegebene Eigenschaft besitzen; im obigen Falle die Menge derjenigen x, für welche $f(x)$ in G enthalten ist.

[2]) Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 2 Aufl., p. 268. Es ist zu beachten, daß Herr Hausdorff unsere Operationen L mit (M^ξ, N^ξ) und unsere Operationen B mit f^ξ bezeichnet.

Zwischen unseren und den Hausdorff'schen Bezeichnungen bestehen folgende Beziehungen:

$$L^\xi \equiv (M^\xi, N^\xi), \qquad B^\xi \equiv f^\xi \qquad (\xi < \omega)$$
$$L^\xi \equiv (M^{\xi+1}, N^{\xi+1}), \qquad B^\xi \equiv f^{\xi+1} \qquad (\xi \geqslant \omega).$$

im allgemeinen nicht statt, wie das folgende Beispiel von Herrn Hausdorff [1]) zeigt:

Es bezeichne X die Gesamtheit der reellen Zahlen und Y eine aus nur zwei Elementen y_1, y_2 bestehende Menge. Jede stetige Operation ist also von der Form $f(x) = y_1$, oder $f(x) = y_2$. Das sind zugleich alle Operationen B.

Die Operation, welche durch

$$f(0) = y_1$$
$$f(x) = y_2 \quad (x \neq 0).$$

definiert ist, gehört, wie leicht zu sehen, zu L^1. In diesem Falle ist also $L^1 \neq B^1$.

Man bemerkt leicht, daß

$$B^\xi \subset b^\xi \subset L^\xi \quad (\xi \geqslant 1).$$

Das folgt aus $B^0 \equiv L^0$, $b^1 \equiv L^1$ und aus der Tatsache, daß die Grenzwerte der Folgen von im Sinne von Borel meßbaren Operationen von Klasse $< \xi$ alle der Klasse L^ξ angehören.

In dieser Arbeit beweise ich die Sätze:

1. Wenn der Raum Y separabel ist, so hat man

$$b^\xi \equiv L^\xi \quad (\xi \geqslant 1).$$

2. Wenn sich zwei beliebige Punkte des Raumes Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, so ist

$$B^\xi \equiv L^\xi \quad (\xi \neq 1)$$

(für $\xi = 1$ hat man $B^1 \subset L^1 \subset B^2$).

In diesen Sätzen wird über den Raum X lediglich vorausgesetzt, daß er metrisch ist.

Es wäre interessant festzustellen, unter welchen Voraussetzungen bezüglich des Raumes Y die Identität $B^\xi \equiv L^\xi$ für jedes ξ stattfindet. Wie man zeigen kann, ist das der Fall für gewisse vektorielle Räume, insbesondere solche vom Typus (B) [2]).

Ich erwähne noch, daß, wie Herr Kuratowski bewiesen hat (s. dieser Band S. 281), für jeden metrischen Raum Y ein ihn

[1]) Vgl. l. c. [2]) p. 268 ff.

[2]) D. h. vektorielle, normierte und vollständige Räume.

enthaltender metrischer Raum H definiert werden kann, in welchem

$$B^\xi = L^\xi \quad (\xi \geqslant 0)$$

stattfindet, wobei in Y die frühere Metrik beibehalten wird.

In § 1 beweise ich eine Reihe von Hilfssätzen. Der § 2 enthält die Beweise der Sätze 1. und 2.

§ 1.

Hilfssatz 1. Wenn die Mengen G, H so beschaffen sind, daß $G \supset H$, $G \subset Q^\xi$, $H \subset P^\xi$, so gibt es eine Menge $K \subset P^\xi \cdot Q^\xi$, derart daß $G \supset K \supset H$.

Beweis. Vgl. W. Sierpiński. „Sur une propriété des ensembles ambigus", Fund. Math. 6.

Hilfssatz 2. Wenn $A \subset P^\xi \cdot Q^\xi$, so gibt es eine Folge von Mengen $\{A_j\}$ $(A_j \subset P^{\alpha_j} \cdot Q^{\alpha_j},\ \alpha_j < \xi)$, für welche

$$A = \lim_{j\to\infty} A_j$$

ist [1]).

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} H_j = \prod_{j=1}^{\infty} G_j \tag{1}$$

wobei

$$H_j \subset H_{j+1} \text{ und } H_j \subset P^{\xi_j} \quad (\xi_j < \xi)$$
$$G_j \supset G_{j+1} \text{ und } G_j \subset Q^{\eta_j} \quad (\eta_j < \xi)$$

angenommen werden kann.

Wir bezeichnen mit ε_j die größere der Ordnungszahlen ξ_j, η_j.

Wegen $G_j \supset A \supset H_j$ gibt es nach Hilfssatz 1. eine Menge $A_j \subset P^{\varepsilon_j} \cdot Q^{\varepsilon_j}$, für welche $G_j \supset A_j \supset H_j$.

[1]) D. h. es ist

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} A_j = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=n}^{\infty} A_j .$$

Vgl. z. B. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, p. 9.

Wie leicht zu sehen, folgt aus (1)

$$A_j = \lim_{j\to\infty} A_j .$$

Hilfssatz 3. Damit eine Operation $f(x)$, deren Wertmenge isoliert ist, der Klasse L^ξ angehört, ist notwendig und hinreichend, daß sie jeden ihrer möglichen Werte in einer Menge annimmt, welche in $P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ enthalten ist.

Beweis. Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Da sie isoliert ist, gibt es zu jedem y_i ein $\varepsilon_i > 0$ derart daß $(y_i\, y_j) > \varepsilon_i$ $(j \neq i)$ ist. Die Elemente y, welche der Ungleichung $(y\, y_i) < \varepsilon_i$ genügen, bilden eine offene Menge; sie sei mit K_i bezeichnet.

Offenbar ist

$$\underset{x}{E}[f(x) = y_i] = \underset{x}{E}[f(x) \subset K_i]$$
$$= X - \underset{x}{E}\Big[f(x) \subset \sum_{j \neq i} K_j\Big].$$

Da $\sum_{j \neq i} K_j$ ebenfalls offen ist, so folgt aus $f(x) \subset L^\xi$, daß $\underset{x}{E}[f(x) = y_i] \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$.

Die Bedingung ist also notwendig.

Sei G eine beliebige offene Menge und $\{y_{i_n}\}$ die darin enthaltene Teilfolge von $\{y_i\}$.

Dann ist

$$\underset{x}{E}[f(x) \subset G] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E}[f(x) = y_{i_n}].$$

Hieraus folgt, daß unsere Bedingung zugleich hinreichend ist.

Bemerkung. Aus der letzten Gleichung folgt, daß, wenn die Wertmenge von $f(x)$ abzählbar ist und $f(x)$ jeden dieser Werte in einer Menge aus $P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ annimmt, die Operation $f(x)$ von der Klasse L^ξ ist.

Hilfssatz 4. Jede Operation $f(x)$ aus L^ξ $(\xi \geqslant 1)$ ist die Grenze einer gleichmäßig konvergenten Folge von Operationen der Klasse L^ξ, deren jede eine isolierte Wertmenge besitzt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da der Raum Y separabel ist, gibt es eine abzählbare und isolierte Menge $\{y_n\}$ von der Eigenschaft, daß zu jedem y aus Y ein y_n existiert derart, daß $(y_n, y) < \varepsilon$ ist.

Sei

$$(1) \qquad \begin{aligned} G_n &= \underset{x}{E}[(f(x), y_n) < 2\varepsilon] \\ H_n &= \underset{x}{E}[(f(x), y_n) \leqslant \varepsilon] \end{aligned}$$

Wegen $G_n \subset Q^{\xi+1}$, $H_n \subset P^{\xi+1}$ und $G_n \supset H_n$, gibt es nach Hilfssatz 1. eine Menge $K_n \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$, für welche $G_n \supset K_n \supset H_n$ ist.

Man hat

$$(2) \qquad X = \sum_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Zu jedem $x_0 \subset X$ gibt es nämlich ein y_n derart, daß $(f(x_0), y_n) < \varepsilon$ ist. Daher ist $x_0 \subset H_n \subset K_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} K_n$.

Wir setzen

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

und erklären eine Operation $\varphi(x)$ wie folgt:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= y_1 \quad \text{für} \quad x \subset K_1 \\ &= y_n \quad \text{für} \quad x \subset S_n - S_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Da $S_n \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$, gilt dasselbe für $S_n - S_{n-1}$. Auf Grund von Hilfssatz 3. folgt hieraus, daß $\varphi(x)$ der Klasse L^ξ angehört.

Wenn $x \subset S_n - S_{n-1}$, so hat man $x \subset K_n \subset G_n$ und daher wegen (1)

$$(f(x), y_n) < 2\varepsilon$$

d. h. nach (3)

$$(f(x), \varphi(x)) < 2\varepsilon.$$

Aus (2) folgt, daß diese Ungleichung für alle x stattfindet.

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, ist damit dieser Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 5. Jede Operation $f(x)$ der Klasse L^ξ $(\xi > 1)$, deren Wertmenge isoliert ist, läßt sich als Grenze einer Folge von Operationen von niedrigerer L-Klasse darstellen, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.

Beweis. Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Setzt man $A_i = \underset{x}{E}[f(x) = y_i]$, so ist $A_i \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Es gibt also nach Hilfssatz 2. Mengenfolgen $\{A_i^j\}$ aus $P^\xi \cdot Q^\xi$, für welche

$$(1) \qquad \lim_{j \to \infty} A_i^j = A_i.$$

Wir setzen $\sum_{i=1}^{n} A_i^j = S_n^j$ und erklären eine Folge von Operationen $\{f_j(x)\}$ $(j > 2)$ wie folgt:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_j(x) &= y_1 \quad \text{für} \quad x \subset A_1^j \\ &= y_n \quad \text{für} \quad x \subset S_n^j - S_{n-1}^j \quad (j > n > 1) \\ &= y_j \quad \text{für} \quad x \subset X - S_{j-1}^j. \end{aligned}$$

Die Operation $f_j(x)$ nimmt also nur endlich viele Werte an. Da die Mengen A_1^j, S_n^j, $S_n^j - S_{n-1}^j$ und $X - S_{j-1}^j$ in $P^\xi \cdot Q^\xi$ enthalten sind, ist $f_j(x)$ von einer niedrigeren Klasse als L^ξ.

Sei für ein gewisses x_0 $f(x_0) = y_n$. Wegen (1) gibt es ein J derart, daß für $j > J$ die Mengen A_i^j $(i \leqslant n-1)$ x_0 nicht enthalten, aber $x_0 \subset A_n^j$ ist. Hieraus folgt wegen (2) für $j > n$ und $j > J$:

$$f_j(x_0) = y_n, \quad \text{daher} \quad \lim_{j \to \infty} f_j(x_0) = f(x_0).$$

Es ist also $\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x)$ für jedes x.

Hilfssatz 6. Wenn

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} f_n(x) &= f(x) \\ \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} f_n(x), \varphi_n(x) \subset L^{\alpha_n}, \ (\alpha_n \geqslant 1, \ n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon \quad (x \subset X).$$

ist, so gibt es eine Folge $\{\psi_n(x)\}$ $(\psi_n(x) \subset L^{\alpha_n})$, für welche

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = \varphi(x)$$

und

$$(f_n(x), \psi_n(x)) < 2\varepsilon \quad (x \subset X, \ n = 1, 2, \ldots)$$

stattfindet.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\{\varepsilon_n\}$ eine nach Null konvergierende Folge positiver Zahlen $< \varepsilon$.

Nach Hilfssatz 4. gibt es für jedes n zwei Operationen $\bar{f}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$ aus L^{α_n}, deren Wertmenge isoliert ist und welche den Ungleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} (f_n(x), \bar{f}_n(x)) &< \varepsilon_n \\ (\varphi_n(x), \bar{\varphi}_n(x)) &< \varepsilon_n \end{aligned}$$

genügen.

Wir setzen,

$$(2) \qquad \begin{aligned} \psi_n(x) &= \bar{\varphi}_n(x) \quad \text{wenn} \quad (\bar{\varphi}_n(x), \bar{f}_n(x)) < \varepsilon \\ &= \bar{f}_n(x) \quad \text{wenn} \quad (\bar{\varphi}_n(x), \bar{f}_n(x)) \geqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$(\psi_n(x), \bar{f}_n(x)) < \varepsilon.$$

Daher ist

$$(f_n(x), \psi_n(x)) \leqslant (f_n(x), \bar{f}_n(x)) + (\bar{f}_n(x), \psi_n(x)) < \varepsilon + \varepsilon_n < 2\varepsilon.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\psi_n(x)$ der Klasse L^{α_n} angehört.

Sei $\{y_i\}$ die Menge der Werte, welche $\bar{f}_n(x)$ und $\bar{\varphi}_n(x)$ annehmen. Man hat für jedes k

$$\underset{x}{E}[\psi_n(x) = y_k] = \underset{x}{E}[\bar{\varphi}_n(x) = y_k] \cdot \underset{x}{E}[(\bar{f}_n(x), y_k) < \varepsilon] + \\ + \underset{x}{E}[\bar{f}_n(x) = y_k] \cdot \underset{x}{E}[(\bar{\varphi}_n(x), y_k) \geqslant \varepsilon].$$

Die Mengen $\underset{x}{E}[\bar{\varphi}_n(x) = y_k]$ und $\underset{x}{E}[\bar{f}_n(x) = y_k]$ sind nach Hilfssatz 3. in $P^{\alpha_n+1} \cdot Q^{\alpha_n+1}$ enthalten. Dasselbe ist der Fall für die beiden anderen Mengen. Denn man hat z. B.

$$\underset{x}{E}[(\bar{f}_n(x), y_k) < \varepsilon] = \sum_s \underset{x}{E}(\bar{f}_n(x) = y_s),$$

wobei die Summe über diejenigen s erstreckt, ist, für welche $(y_s, y_k) < \varepsilon$ ist. Da, wie soeben bemerkt, alle $\underset{x}{E}[\bar{f}_n(x) = y_s]$ in $P^{\alpha_n+1} \cdot Q^{\alpha_n+1}$ enthalten sind, gilt das gleiche für ihre Summe.

Hieraus folgt, das $\underset{x}{E}(\psi_n(x) = y_k)$ ebenfalls in $P^{\alpha_n+1} \cdot Q^{\alpha_n+1}$ enthalten ist. Da die Wertmenge von $\psi(x)$ abzählbar ist, ist diese Operation nach der Bemerkung zu Hilfssatz 3. von der Klasse L^{α_n}.

Wir beweisen schließlich, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \varphi(x)$.

Für ein beliebiges $x_0 \subset X$ ist

$$(f(x_0), \varphi(x_0)) < \varepsilon.$$

Nach (1) ist

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \bar{\varphi}_n(x) = \varphi(x).$$

Es gibt also ein N, so daß für $n > N$

$$(\bar{f}_n(x_0), \bar{\varphi}_n(x_0)) < \varepsilon$$

ist.

Hieraus folgt auf Grund von (2), daß $\psi_n(x_0) = \varphi_n(x_0)$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = \varphi(x_0)$ ist.

Bemerkung. Wenn jede der Operationen f_n und φ_n nur endlich viele Werte annimmt, so können wir, indem wir $\bar{f}_n = f_n$ und $\bar{\varphi}_n = \varphi_n$ setzen, ähnlich wie oben Operationen ψ_n erhalten, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.

Wir werden diese Bemerkung beim Beweise des nächsten Hilfssatzes benützen.

Hilfssatz 7. Jede Operation $f(x)$ der Klasse L^{ξ} $(\xi > 1)$ ist die Grenze einer Folge von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.

Beweis. Nach Hilfssatz 4. gibt es eine gegen $f(x)$ gleichmäßig konvergierende Folge $\{f_m(x)\}$ von Operationen der Klasse L^{ξ}, deren jede eine isolierte Wertmenge besitzt.

Es bezeichne $\{\varepsilon_m\}$ eine den Bedingungen $\varepsilon_m > 0$ und $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < +\infty$ genügende Zahlenfolge.

Wir können annehmen, indem wir die ursprüngliche Folge $\{f_m(x)\}$ nötigenfalls durch eine Teilfolge ersetzen, daß

$$(f_m(x), f_{m+1}(x)) < \varepsilon_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Nach Hilfssatz 5. gibt es Folgen $\{f_m^n(x)\}$ von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt, derart daß

$$\lim_{n\to\infty} f_m^n(x) = f_m(x) \quad (x \subset X,\ n = 1, 2, \ldots)$$

ist.

Sei $\varphi_1^n(x) = f_1^n(x)$. Nach Hilfssatz 6. und der darauf folgenden Bemerkung gibt es eine Folge $\{\varphi_2^n\}$ von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt, für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_2^n(x) = f_2(x)$ und $(\varphi_1^n(x), \varphi^n(x)) < 2\varepsilon_1$ ist.

Indem wir ähnlich die Folgen $\{\varphi_3^n(x)\},\dots\{\varphi_m^n(x)\}$ erklären, erhalten wir eine Doppelfolge $\{\varphi_m^n(x)\}$, welche für alle m, n folgende Bedingungen erfüllt:

a) $\varphi_m^n(x)$ ist eine im Sinne von Borel meßbare Operation einer Klasse $<\xi$, deren Wertmenge endlich ist.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_m^n(x)=f_m(x)$.

c) $(\varphi_m^n(x), \varphi_{m+1}^n(x))<2\varepsilon_m$.

Für ein beliebiges $x_0 \subset X$ ist

(1) $(\varphi_n^n(x_0), f(x_0)) \leqslant (\varphi_n^n(x_0),\varphi_m^n(x_0)) + (\varphi_m^n(x_0), f_m(x_0)) + (f_m(x_0), f(x_0))$.

Für $n>m$ ist wegen c)

$$(\varphi_n^n(x_0),\varphi_m^n(x_0)) \leqslant \sum_{k=m}^{n-1}(\varphi_k^n(x_0),\varphi_{k+1}^n(x_0)) \leqslant 2\sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k$$

Daher folgt mit Hilfe von b)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\varphi_n^n(x_0),f(x_0))\leqslant 2\sum_{k=m}^{\infty}\varepsilon_k + (f_m(x_0),f(x_0)).$$

Da m beliebig ist, hat man schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^n(x_0)=f(x_0)$$

Also besitzt die Folge $\{\varphi_n^n(x)\}$ alle verlangten Eigenschaften.

Hilfssatz 8. Wir setzen voraus, daß sich zwei beliebige Punkte von Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen. Sind dann F_i $(i=1,2,\dots,k)$ disjunkte abgeschlossene Mengen aus X und y_i $(i=1,2,\dots,k)$ beliebige Elemente aus Y, so gibt es eine in X definierte stetige Operation $f(x)$, für welche

$$f(x)=y_i \quad (x\subset F_i,\ i=1,2,\dots,k).$$

Beweis. Wir erklären für beliebige reelle t eine Funktion $\varphi(t)$, deren Wertmenge in Y enthalten ist, wie folgt:

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=y_n \quad (n=1,2,\dots,k)\\ &=y_k \quad (t>k)\\ &=y_1 \quad (t<1).\end{aligned}$$

In den Intervallen $(1,2)$, $(2\ 3),\dots,(k-1,k)$ sei $\varphi(t)$ beliebig definiert, jedoch stetig. Das letztere ist möglich, da nach unserer Annahme y_i und y_{i+1} sich durch einen stetigen Bogen verbinden lassen.

Es bezeichne $u_i(x)$ die Entfernung des Elementes x von F_i; es ist also $u_i(x)=0$ für $x\subset F_i$. Die Funktionen $u_i(x)$ sind offenbar stetig.

Wir bezeichnen mit H den k-dimensionalen Euklidischen Raum und seine Koordinaten mit $t_1, t_2,\dots,t_k$. Sei G die aus denjenigen Punkten, deren höchstens eine Koordinate verschwindet, bestehende offene Teilmenge von H und $t=F(t_1,\dots,t_k)$ eine in G definierte und stetige Funktion von der Eigenschaft, daß

$$F(t_1,\dots,t_{i-1},0,t_{i+1},\dots,t_k)=i \quad (i=1,2,\dots k)$$

Da für jedes $x\subset X$ höchstens eine der Zahlen $u_i(x)$ $(i=1,2,\dots,k)$ gleich Null ist, ist $t=F[u_1(x),\dots,u_k(x)]$ eine in X definierte stetige Funktion, für welche

(1) $$F[u_1(x),\dots,u_k(x)]=i \quad (x\subset F_i).$$

Setzt man

$$f(x)=\varphi\{F[u_1(x),\dots,u_k(x)]\}$$

so ist $f(x)$ die gesuchte Operation. Sie ist nämlich stetig und für $x\subset F_i$ hat man nach (1)

$$f(x)=\varphi(i)=y_i \quad (i=1,2,\dots,k).$$

§ 2.

Satz 1. Jede Operation der Klasse L^ξ $(\xi\geqslant 1)$ ist auch von der Klasse b^ξ und umgekehrt, d. h.

$$L^\xi\equiv b^\xi \quad (\xi\geqslant 1).$$

Beweis. Für $\xi=1$ folgt der Satz sofort aus der Definition der Klasse b^1. Durch transfinite Induktion beweist man leicht mit Hilfe von Hilfssatz 7, daß $L^\xi\subset b^\xi$ $(\xi\geqslant 1)$.

Wir zeigen jetzt, daß $b^\xi\subset L^\xi$ $(\xi\geqslant 1$, ebenfalls durch transfinite Induktion, indem wir also zunächst annehmen, daß dies für $\alpha<\xi$ richtig ist.

Sei $f(x)\subset b^\xi$, $f_n(x)\subset b^{\alpha_n}$ $(\alpha_n<\xi,\ n=1,2,\dots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

Es bezeichne K eine beliebige Kugel mit dem Mittelpunkt y_0 und dem Radius r, d. h.

$$K \equiv \underset{y}{E}[(y_0\, y) < r]$$

Wir setzen

$$G_{i,n} \equiv \underset{x}{E}\left[(f_n(x), y_0) < r - \frac{1}{i}\right].$$

Dann ist

$$\underset{x}{E}[f(x) \subset K] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n>k} G_{i,n}.$$

Wegen $G_{i,n} \subset Q^{\alpha_n+1}$ ist also

$$\underset{x}{E}(f(x) \subset K) \subset Q^{\alpha_n+2} \subset Q^{\xi+1}.$$

Da jede offene Teilmenge von Y als eine abzählbare Summe von Kugeln darstellbar ist, so folgt hieraus $f(x) \subset L^{\xi}$.

Satz 2. Wenn sich zwei beliebige Elemente von Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, so ist $L^{\xi} \equiv B^{\xi}$ $(\xi \neq 1)$ und $B^1 \subset L^1$.

Beweis. Ähnlich wie bei Satz 1. zeigt man leicht, daß $B^{\xi} \subset L^{\xi}$. (Offenbar ist $B^0 \equiv L^0$).

Wir beweisen zunächst, daß, wenn die Wertmenge einer Operation $f(x)$ aus L^1 isoliert ist, diese Operation auch der Klasse B^1 angehört, d. h. die Grenze einer Folge stetiger Operationen ist.

Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Wir setzen

$$D_i = \underset{x}{E}[f(x) = y_i].$$

Da D_i eine Menge Q^2 ist, hat man

$$D_i = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik},$$

wobei die Mengen D_{ik} der Klasse P^1 angehören, d. h. abgeschlossen sind und $D_{ik} \subset D_{ik+1}$ ist.

Nach Hilfssatz 8. gibt es für jedes n eine stetige Operation $f_n(x)$, für welche

$$f_n(x) = y_i \quad (x \subset D_{in},\ i = 1, \ldots, n).$$

Man hat für $x \subset D_i$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

also für alle x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Daher ist $f(x)$ von der Klasse B^1.

Nach Hilfssatz 7. ist daher jedes $f(x)$ aus L^2 in B^2 enthalten. Hieraus folgt durch transfinite Induktion mit Hilfe desselben Hilfssatzes, daß $L^{\xi} \subset B^{\xi}$ $(\xi \neq 1)$ ist.