par les inégalités:

$$(3) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad r_{ik}(y) < y < s_{ik}(x).$$

On a pour $x \epsilon A_{ik}$:

$$(4) \qquad \frac{1}{2^i} = r_{ik}(x) = s_{ik}(x)$$

et pour x non ϵA_{ik}:

$$(5) \qquad \frac{1}{2^i} \leqq s_{i,k+1}(x) < r_{ik}(x) < s_{ik}(x) \leqq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+2k}} < \frac{1}{2^{i-1}}$$

il en résulte que $G_{ik} \times G_{jl} = 0$ sauf dans le cas: $i = j$, $k = l$.

Définissons pour $0 \leqslant y \leqslant 1$ la fonction $f(x, y)$ par les formules:

$$(6) \qquad f(x, y) = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} \qquad \text{pour } \frac{1}{2^i} < y \leqq \frac{1}{2^{i-1}} \text{ et } (x, y) \text{ non } \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik}$$

$$(7) \qquad f(x, y) = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} \sin\left[\frac{\pi(y - r_{ik}(x))}{s_{ik}(x) - r_{ik}(x)}\right] \qquad \text{pour } (x, y) \epsilon G_{ik}$$

$$(8) \qquad f(x, y) = 1 \qquad \text{pour } y = 0.$$

Soit K_1 l'ensemble de points (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, et K_2 l'ensemble-somme de tous les rectangles: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = \frac{1}{2^i}$, $1 - \frac{1}{2^{i-1}} \leqslant z \leqslant 1 - \frac{1}{2^i}$. Posons $K = K_1 + K_2$. Soit $K(t)$ la section de K par le plan $x = t$.

On vérifie sans peine que pour $\lim_{n=\infty} t_n = t_0$ on a $\lim_{n=\infty} K(t_n) = K(t_0)$, donc les ensembles $K(t)$ sont des tranches de continuité d'une décomposition semicontinue. La correspondance entre t et $K(t)$ est une homéomorphie, enfin $K(t)$ est un **arc simple** pour $t \epsilon A$, et un **continu non-péanien** pour $t \epsilon I_0 - A$.

Warszawa, 12/III 1931.

Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Dans la théorie de Baire des fonctions de variable réelle on supposait primitivement que le domaine de variation de l'argument ainsi que celui de variation de la valeur de la fonction est l'ensemble des nombres réels. Dans les recherches ultérieures sur les fonctions mesurables B on s'est débarrassé (Hahn, Hausdorff) de l'hypothèse que les arguments soient réels, en supposant seulement qu'ils parcourent un espace métrique arbitraire. Si l'on savait, d'une façon analogue, se débarrasser de l'hypothèse que les valeurs soient réelles, la théorie des fonctions mesurables B deviendrait un chapitre de la Topologie et son champ d'applications s'élargirait de façon manifeste.

Dans cet ordre d'idées je vais démontrer plusieurs théorèmes sur les fonctions mesurables B (ainsi que sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire), en supposant que les arguments et les valeurs de la fonction appartiennent à des espaces métriques [2]). En généralisant les théorèmes connus, j'ai tâché, en même temps, de simplifier leurs démonstrations.

Définitions. Les ensembles fermés et ouverts sont dits des ensembles de classe 0 multiplicative et additive resp. Les produits (resp. les sommes) dénombrables d'ensembles de classes $< \alpha$ sont dits de classe α multiplicative (resp. additive).

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été communiqués à la Soc Pol. de Math. (Section de Lwów) le 29 Nov. 1930.

[2]) Dans le même ordre d'idées, voir les notes: S. Banach *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, ma note *La propriété de Baire dans les espaces métriques*, Fund. Math. 16, ainsi que la note qui va suivre de M. Banach.

Une fonction $f(x)$ qui transforme un espace métrique $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble d'un espace métrique $\mathcal{Y}$ est dite fonction mesurable B de classe α (ou simplement: fonction de classe α), lorsque, quel que soit l'ensemble fermé F, l'ensemble $f^{-1}(F) = \underset{x}{E}[f(x)\in F]$ [1]) est de classe α multiplicative [2]). (On voit facilement que les fonctions continues coïncident avec les fonctions de classe 0).

1. L'ensemble $f^{-1}(M)$.

En tenant compte de la formule $f^{-1}(\mathcal{Y}-M)=\mathcal{X}-f^{-1}(M)$, on voit aussitôt que la condition pour que f soit de classe α, est que l'ensemble $f^{-1}(G)$ soit de classe α *additive*, quel que soit l'ensemble *ouvert* G.

Les formules: $f^{-1}(\sum\limits_n M_n)=\sum\limits_n f^{-1}(M_n)$ et $f^{-1}(\prod\limits_n M_n)=\prod\limits_n f^{-1}(M_n)$ impliquent que, *si f est de classe α et M de classe β, l'ensemble $f^{-1}(M)$ est de classe $\alpha+\beta$* (multiplicative ou additive conformément à la classe de M).

2. Fonctions composées.

Si la fonction $y=f(x)$ est de classe α et la fonction $z=g(y)$ est de classe β, alors la fonction $gf(x)$ est de classe $\alpha+\beta$.

En effet, on a l'équivalence: $\{gf(x)\in F\}\equiv\{f(x)\in g^{-1}(F)\}$, d'où:

$$\underset{x}{E}[gf(x)\in F]=f^{-1}[g^{-1}(F)]$$

et l'ensemble $g^{-1}(F)$ étant de classe β multiplicative (dans l'hypothèse que F est fermé), on conclut du N1 que $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ est de classe $\alpha+\beta$ multiplicative.

3. Limite de fonctions.

Nous reproduirons un raisonnement de M. Hausdorff (en le modifiant d'ailleurs légèrement) [3]).

F étant un ensemble fermé donné, soit G_n la „sphère de centre F et de rayon $1/n$", c.-à-d. l'ensemble des points à distance de F inférieure à $1/n$. Soit $y=\lim y_n$. La condition pour que le point y appartienne à F est, comme on voit facilement, que pour chaque indice n il existe un k tel que $y_{n+k}\in G_n$. En employant les opérateurs logiques $\prod\limits_n$ et $\sum\limits_k$ pour remplacer les mots „pour chaque n" et „il existe un k tel que" [1]), il vient

$$[y\in F]\equiv\prod_n\sum_k(y_{n+k}\in G_n).$$

Posons, à présent, $f(x)=\lim f_n(x)$. Donc

$$[f(x)\in F]\equiv\prod_n\sum_k[f_{n+k}(x)\in G_n]$$

d'où:

$$f^{-1}(F)=\prod_n\sum_k f^{-1}_{n+k}(G_n).$$

Supposons que les fonctions $f_n(x)$ soient de classe α. L'ensemble G_n étant ouvert, $f^{-1}_{n+k}(G_n)$ est donc de classe α additive, donc $\sum\limits_k f^{-1}_{n+k}(G_n)$ l'est également. L'ensemble $f^{-1}(F)$ est, par conséquent, de classe $\alpha+1$ multiplicative, ce qui prouve que *la limite d'une suite convergente de fonctions de classe α est de classe $\alpha+1$.*

En cas de convergence uniforme, il existe une suite d'entiers m_n telle que, pour chaque x et chaque k, on a $|f(x)-f_{m_n+k}(x)|\leqslant 1/n$. [2]) On en conclut que

$$[f(x)\in F]\equiv\prod_n\prod_k[f_{m_n+k}(x)\in H_n],$$

H_n désignant l'ensemble des points dont la distance de F est $\leqslant\frac{1}{n}$.

Par conséquent:

$$f^{-1}(F)=\prod_n\prod_k f^{-1}_{m_n+k}(H_n)$$

et l'ensemble H_n étant fermé, il en résulte que *la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe α est de classe α* [3]).

4. Image de fonction: $I=\underset{xy}{E}[y=f(x)]$.

L'ensemble I est évidemment situé dans le „produit combinatorique" [4]) $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Nous allons prouver que, *si f est de classe α, I est un ensemble de classe α multiplicative* [5])

[1]) c.-à-d. l'ensemble des x tels que $f(x)\in F$.

[2]) Cf. H. Lebesgue, Journ. des Math. VI, 1 (1905).

[3]) *Mengenlehre*, p. 267, Berlin 1927.

[1]) Voir la note de M. Tarski et de moi, ce volume p. 250.

[2]) $|p-q|$ désigne la distance de deux points d'un espace métrique.

[3]) Hausdorff, l. c., p. 268.

[4]) voir ce volume p. 205.

[5]) Pour le cas de fonction *réelle*, voir W. Sierpiński, Fund. Math. 2, p. 78.

(relativement à $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$). Nous supposerons ici que l'espace $\mathcal{Y}$ est séparable, c.-à-d. qu'il existe une suite de sphères ouvertes („sphères rationnelles") $S_1, S_2, \dots$, telle que chaque ensemble ouvert s'obtient par la réunion d'un certain nombre de ces sphères.

On voit aussitôt que la condition pour que deux points y et y_1 de $\mathcal{Y}$ soient différents est qu'il existe une sphère S_n qui contient l'un de ces points mais ne contient pas l'autre. En symboles:

$$[y \neq y_1] \equiv \sum_n [(y \text{ non} - \epsilon S_n)\ (y_1 \epsilon S_n)].$$

Par conséquent:

$$[y \neq f(x)] \equiv \sum_n [(y \text{ non} - \epsilon S_n)\ (f(x) \epsilon S_n)].$$

d'où:

$$\mathcal{X}\times\mathcal{Y} - I = \underset{xy}{E}\,[y \neq f(x)] = \sum_n [\mathcal{X}\times(\mathcal{Y} - S_n)]\cdot[f^{-1}(S_n)\times\mathcal{Y}].$$

Or, si f est une fonction de classe α l'ensemble $f^{-1}(S_n)$ et, par conséquent [1]), l'ensemble $f^{-1}(S_n)\times\mathcal{Y}$ est de classe α additive. En le multipliant par l'ensemble fermé $\mathcal{X}\times(\mathcal{Y} - S_n)$, on n'altère pas sa classe, si $\alpha > 0$. Donc $\mathcal{X}\times\mathcal{Y} - I$ est de classe α additive, d'où I est de classe α multiplicative. En cas où $\alpha = 0$, on prouve directement que l'ensemble I est fermé.

5. Fonctions de plusieurs variables.

Supposons, à présent, que l'espace $\mathcal{X}$ est séparable ($\mathcal{Y}$ est arbitraire). Soit $r_1, r_2, \dots$, une suite de points dense dans $\mathcal{X}$. On voit facilement que, si $g(x)$ est une fonction continue, la condition, pour que $g(x)$ appartienne à F, est que pour chaque n il existe un point r_k à distance de x inférieure à $1/n$ et tel que $g(r_k) \epsilon G_n$, — les symboles F et G_n ayant le même sens qu'au N 3. La condition précédente s'exprime donc de cette façon:

$$[g(x) \epsilon F] \equiv \prod_n \sum_k (|x - r_k| < 1/n)\ (g(r_k) \epsilon G_n).$$

Nous conclurons de là que, *$f(x, y)$ étant continue relativement à x et étant de classe α relativement à y, $f(x, y)$ est une fonction de classe $\alpha + 1$* (relativement à la variable (x, y) qui parcourt l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$) [1]).

[1]) Dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dénotent les axes rectangulaires du plan, l'ensemble $f^{-1}(S_n)\times\mathcal{Y}$ s'obtient en faisant passer une droite verticale par chaque point de l'ensemble $f^{-1}(S_n)$. Voir p. 252, (5)

En effet, la fonction $f(x, y)$ étant continue par rapport à x, on peut la substituer à $g(x)$ dans la formule précédente. De sorte que:

$$[f(x, y) \epsilon F] \equiv \prod_n \sum_k (|x - r_k| < 1/n)\ (f(r_k, y) \epsilon G_n)$$

Donc:

$$f^{-1}(F) = \prod_n \sum_k \{(\underset{x}{E}\,|x - r_k| < 1/n)\times\mathcal{Y}\}\cdot\{\mathcal{X}\times(\underset{y}{E}\,f(r_k, y) \epsilon G_n)\}.$$

Or, la fonction $f(x, y)$ étant de classe α par rapport à y, l'ensemble $\underset{y}{E}\,f(r_k, y) \epsilon G_n$ est de classe α additive (pour n et k fixes); l'ensemble $\underset{x}{E}\,|x - r_k| < 1/n$ est une sphère ouverte. Il en résulte que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe $\alpha + 1$ multiplicative, c. q. f. d.

En particulier, si la fonction $f(x, y)$ est continue relativement à chaque variable séparément, elle est une fonction de première classe. Une induction facile montre que, si une fonction de n variables est continue relativement à chacune d'elles, elle est une fonction de classe $n - 1$.

6. Fonctions „complexes".

Chaque couple de fonctions $x = f(t)$, $y = g(t)$, définit une fonction („complexe") $z = h(t)$, où z désigne le point (x, y) de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Dans l'hypothèse que les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont séparables, je vais prouver que *la condition, pour que $h(t)$ soit de classe α, est que chacune des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ soit de classe α.*

On a, en effet, l'équivalence: $[f(t) \epsilon G] \equiv [h(t) \epsilon (G\times\mathcal{Y})]$.

Donc, si $h(t)$ est de classe α et si G désigne un ensemble ouvert arbitraire, l'ensemble $h^{-1}(G\times\mathcal{Y})$ et, parsuite, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive, ce qui prouve que f est de classe α. Il en est de même de la fonction g. Ainsi la nécessité de notre condition est démontrée (sans faire intervenir la séparabilité de l'espace).

Supposons, à présent, que les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont séparables. Considérons la suite S_n, $n = 1, 2, \dots$ du N 4 et soit R_n, $n = 1, 2, \dots$

[1]) Cf. Lebesgue, l. c., p. 201.

une suite analogue, de „sphères rationnelles" relativement à l'espace $\mathfrak{X}$. On prouve facilement que chaque ensemble ouvert H de l'espace $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ est somme d'un certain nombre d'ensembles $R_m \times S_n$: $H = \sum_k (R_{m_k} \times S_{n_k})$. Donc

$$h(t) \in H \equiv \sum_k h(t) \in (R_{m_k} \times S_{n_k}) \equiv \sum_k [f(t) \in R_{m_k}] \cdot [g(t) \in S_{n_k}]$$

d'où $h^{-1}(H) = \sum_k f^{-1}(R_{m_k}) \cdot g^{-1}(S_{n_k})$. Par conséquent, si f et g sont de classe α, h l'est également.

Le théorème précédent se laisse généraliser au cas où au lieu de deux fonctions f et g on a un système dénombrable de fonctions données. Désignons notamment par $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ l'espace des suites $\xi = \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}, \ldots$, où $\xi^{(n)} \in \mathfrak{X}$, cet espace étant supposé métrisé par la formule de M. Fréchet[1]. Remarquons que, si l'espace $\mathfrak{X}$ est séparable, l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ l'est également. De plus, si R_n, $n = 1, 2, \ldots$ désigne le système des sphères rationnelles de l'espace $\mathfrak{X}$, les ensembles de la forme $R_{n_1} \times R_{n_2} \times \ldots \times R_{n_m} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \ldots$ jouent un rôle analogue par rapport à l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$, c.-à-d. que chaque ensemble ouvert Γ de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ est somme d'un certain nombre d'ensembles de ce genre. Désignons par Δ_n, $n = 1, 2, \ldots$ le système de ces ensembles.

Passons, à présent, à la démonstration du théorème: *pour que $\xi(t)$ soit de classe α, il faut et il suffit que chaque fonction $\xi^{(n)}(t)$ soit de classe α* (l'espace $\mathfrak{X}$ étant supposé séparable).

La nécessité de cette condition se démontre comme auparavant; car on a: $\{\xi^{(1)}(t) \in G\} \equiv \{\xi(t) \in (G \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \ldots)\}$.

Pour prouver sa suffisance, posons $\Gamma = \sum_k \Delta_{m_k}$ et $\Delta_{m_k} = \Delta^1_{m_k} \times \Delta^2_{m_k} \times \ldots$ Par conséquent:

$$\xi(t) \in \Gamma \equiv \sum_k \xi(t) \in \Delta_{m_k} \equiv \sum_k \prod_n \xi^{(n)}(t) \in \Delta^n_{m_k}.$$

Or, la fonction $\xi^{(n)}(t)$ étant de classe α, l'ensemble $\underset{t}{E}\, \xi^{(n)}(t) \in \Delta^n_{m_k}$ est de classe α additive; de plus, pour n suffisamment grand cet ensemble est égal à l'espace T des arguments, car dans ce cas: $\Delta^n_{m_k} = \mathfrak{X}$. L'ensemble $\prod_n \underset{t}{E}\, \xi^{(n)}(t) \in \Delta^n_{m_k}$ est donc également de classe α additive, d'où on conclut aussitôt que la fonction $\xi(t)$ est de classe α.

[1]) voir ce volume, p. 265.

7. Représentation analytique.

On appelle fonctions représentables analytiquement de classe 0 les fonctions continues; de classe $\alpha + 1$ les limites des fonctions de classe α; de classe λ (où λ est un nombre limite) les limites des suites uniformément convergentes de fonctions de classes $< \lambda$. D'après un théorème fondamental[1]), les fonctions représentables analytiquement de classe α coïncident avec les fonctions mesurables B de classe α, lorsque on suppose que $\mathfrak{Y}$ est l'espace des nombres réels ($\mathfrak{X}$ étant un espace métrique arbitraire). Si l'on ne fait pas cette hypothèse, on peut seulement affirmer que les fonctions représentables de classe α sont mesurables de classe α (théor. du N 3 dûs à M. Hausdorff), mais la reciproque n'est pas en général vraie (comme on voit en envisageant une fonction définie sur un intervalle et admettant précisément deux valeurs, ces deux valeurs formant l'espace $\mathfrak{Y}$[2])).

Cependant nous allons voir que, si l'espace $\mathfrak{Y}$ est séparable, chaque fonction mesurable B de classe α est représentable analytiquement de classe α à l'aide de fonctions dont les valeurs *peuvent sortir* de l'espace $\mathfrak{Y}$.

Notamment, d'après le théorème d'Urysohn[3]), on peut plonger (au sens topologique) chaque espace métrique séparable $\mathfrak{Y}$ dans l'espace $\mathfrak{J}^{\aleph_0}$, $\mathfrak{J}$ désignant l'intervalle 01; autrement dit, on peut assigner à chaque point y de $\mathfrak{Y}$ une suite de coordonnées $\xi = \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ où $\xi^{(n)} \in \mathfrak{J}$, sans que l'on ait à altérer la notion de limite.

Or, étant donnée une fonction $y = f(x)$ mesurable de classe α, on a, en même temps, une fonction $\xi(x)$ mesurable de classe α et d'après le théorème du N 6, chacune des fonctions $\xi^{(n)}(x)$ est mesurable de classe α, donc, comme fonction à valeurs réelles, représentable de classe α. Mais cela entraîne que la fonction $\xi(x)$ est représentable de classe α; car la condition que la fonction $\xi(x)$ soit représentable de classe α équivaut à celle que chacune des fonctions $\xi^{(n)}(x)$ le soit.

[1]) Hausdorff, l. c. chap. 9. Cf. Lebesgue l. c.

[2]) Hausdorff, l. c. p. 269. M. Hausdorff pose le problème d'étudier les espaces où le théorème reciproque est valable. Pour d'autres théorèmes rentrant dans le même ordre d'idées, voir la note suivante de M. Banach.

[3]) Math. Ann. 94 (Zum Metrisationsproblem).

8. Fonctions jouissant de la propriété de Baire.

On dit qu'une fonction jouit de la propriété de Baire, lorsqu'il existe un ensemble de première catégorie P tel que la fonction devient continue lorsqu'on restreint ses arguments à l'ensemble $\mathcal{X} - P$. Si l'espace $\mathcal{Y}$ est séparable, cette condition équivaut à celle que, quel que soit l'ensemble ouvert G, l'ensemble $f^{-1}(G)$ possède la propriété de Baire (c. à d. qu'il soit somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de première catégorie) [1]. Tout ensemble de classe α étant un ensemble à propriété de Baire, il en résulte que *chaque fonction mesurable B jouit de cette propriété.*

Il y a plusieurs théorèmes concernant la propriété de Baire que l'on démontre d'une facon analogue aux théorèmes précédemment démontrés.

En particulier, si la fonction $y=f(x)$ jouit de la propriété de Baire, l'image $I = \underset{xy}{E}[y=f(x)]$ est un ensemble jouissant de la propriété de Baire. Pour le prouver on se servira de la formule du N4, en tenant compte du fait que, si B $(\subset \mathcal{X})$ est un ensemble jouissant de la propriété de Baire, l'ensemble $B \times \mathcal{Y}$ en jouit également.

D'une façon analogue, on prouve que, si la fonction $f(x, y)$ est continue relativement à la variable x et jouit de la propriété de Baire relativement à la variable y, la fonction $f(x, y)$ jouit de la propriété de Baire relativement à la variable (x, y).

(Dans les deux cas on suppose que l'espace des valeurs est séparable, dans le deuxième, en outre, que l'espace $\mathcal{X}$ est séparable) [2].

[1]) Voir ma note citée de Fund. Math. 16.

[2]) On considère aussi la propriété de Baire de fonction (ainsi que d'ensemble) *au sens étroit*, en entendant par cela que la fonction jouit de la propriété de Baire relativement à chaque ensemble (ou chaque ensemble parfait) d'arguments. Les deux problèmes considérés tout-à-l'heure restent ouverts relativement à la propriété de Baire au sens étroit. Cela tient au fait qu'on ne sait pas, si dès que l'ensemble B la possède, $B \times \mathcal{Y}$ la possède également.

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen.

Von

Stefan Banach (Lwów).

Einleitung.

Seien X und Y zwei metrische Räume. Der Raum Y sei ausserdem separabel. Wir betrachten Operationen

$$y = f(x),$$

welche jedem Elemente $x \subset X$ ein bestimmtes Element $y \subset Y$ zuordnen.

Zwei Arten dieser Operationen werden gewöhnlich betrachtet. Die erste bilden die (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen; wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit B. Die zweite Art bilden die im Sinne von Borel meßbaren Operationen; sie sei mit L bezeichnet.

Die zu B gehörenden Operationen werden folgendermaßen erklärt:

Eine stetige Operation zählen wir zur nullten Klasse B^0. Die Grenzwerte der Folgen stetiger Operationen bilden die erste Klasse B^1. Allgemein besteht die ξ-te Klasse B^ξ (wobei ξ eine beliebige endliche oder unendliche Ordnungszahl $< \Omega$ bedeutet) aus denjenigen Operationen, welche als Grenzwerte von Folgen von Operationen niedrigerer Klassen darstellbar sind.

Die Vereinigungsmenge aller Klassen B^ξ bildet die Gesamtheit B der (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen.

Um die im Sinne von Borel meßbaren Operationen zu erklären, definieren wir zunächst die zwei Borelschen Mengenklassen P^ξ und Q^ξ.